

Управление в технических системах

© 2023 г. Ю.Г. БУЛЫЧЕВ, д-р техн. наук (profbulychev@yandex.ru)
(АО «Концерн Радиоэлектронные технологии», Москва),
А.А. МОЗОЛЬ, канд. техн. наук (amozol@bk.ru)
(АО «ВНИИ «Градиент», Ростов-на-Дону)

ПЕРИОДО-ВРЕМЕННОЙ МЕТОД ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЛОКАЦИОННЫХ И НАВИГАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Применительно к локационным и навигационным задачам для однопозиционного пассивного наблюдателя развит беспеленговый метод идентификации параметров полиномиальной модели движения объекта с учетом эволюции невязки между периодическим излученным и принятым квазипериодическим сигналом. Рассматривается прохождение сигнала в произвольной физической среде, при этом не требуются знание периода излученного сигнала и традиционное оценивание текущей частоты Доплера, вызывающей невязку. Метод основан на подсчете числа периодов принимаемого сигнала в заданном интервале наблюдения. Рассмотрены вопросы, связанные с анализом возникающей невязки, наблюдаемостью метода и его точностными характеристиками. Даны полезные практические рекомендации и иллюстративный пример.

Ключевые слова: излучающая цель, периодический сигнал, квазипериодический сигнал, однопозиционный пассивный наблюдатель, беспеленговый метод, временная невязка, периодо-временной метод, полиномиальное движение, параметрическая идентификация, наблюдаемость метода, корреляционная матрица ошибок оценивания, адаптация.

DOI: 10.31857/S0005231023070048, EDN: FCTVPA

1. Введение

Методы пассивной локации и навигации излучающей цели на базе однопозиционного пассивного наблюдателя широко отражены в известной литературе (см., например, [1–20]). Среди них весьма популярны доплеровско-временные беспеленговые методы, оперирующие с периодическими сигналами и ориентированные на возможность измерения непрерывного смещения доплеровской частоты принимаемого сигнала в точке наблюдения, обусловленного движением цели (для задач локации) или движением наблюдателя (для задач навигации); в [6] на стр. 169–173 дан исчерпывающий список литературы по данному вопросу, доступной в открытой печати. При этом измерения могут осуществляться на любой характерной частоте из спектра

излучаемого периодического сигнала (например, на центральной) либо модулирующей функции, а также путем сопоставления моментов прихода фронтов последовательных импульсов с учетом известного периода. Указанные методы основаны на идее «синтеза базы», что приводит в конечном итоге к формированию нескольких точек наблюдения на траектории движения и возможности использования известных методов многопозиционной локации и навигации (например, триангуляционного, разностно-дальномерного, трилатерационного и их комбинаций [21, 22]). При этом, как правило, рассматриваются такие траектории, которые на участке наблюдения либо известны (например, орбитальные с известными параметрами движения), либо достаточной для практики точно аппроксимируются моделью прямолинейного равномерного движения (как с известными, так и неизвестными параметрами движения). При этом принципиальным моментом является учет априорной информации о величине скорости цели или наблюдателя, что для практики зачастую является неприемлемым.

В [20] развивается периодо-временной метод (ПВМ), который снимает ограничение, связанное с получением априорной информации о величине скорости, а также рассматривается вопрос параметрической идентификации применительно к модели криволинейного движения, учитывающего возможный маневр цели или наблюдателя. При этом не требуется предварительная текущая оценка доплеровской частоты, что эквивалентно нахождению производной от временной невязки между периодами излучаемого (периодического) и принимаемого (квазипериодического) сигналов. Однако результаты, полученные в [20], распространяются лишь на радиосигналы (распространяющиеся в виде электромагнитной волны со скоростью света) с известным периодом, а также не исследована зависимость возникающей временной невязки от параметров движения цели. Настоящая статья является дальнейшим развитием известного ПВМ в части устранения указанных недостатков применительно к сигналам, распространяющимся в произвольных физических средах. Не снижая общности рассуждений, а также с целью компактного описания предлагаемого метода ограничимся решением задачи пассивной локации излучающей цели (ИЦ) на базе стационарного однопозиционного пассивного наблюдателя (СОПН). Применение полученных результатов к решению задачи навигации не вызовет принципиальных затруднений.

2. Постановка задачи

Пусть движущаяся ИЦ формирует в текущем времени t периодический сигнал $S_0(t)$ (период сигнала $T_S = \text{const}$ может быть неизвестным), распространяющийся в заданной физической среде в виде волны со скоростью v_S (речь может идти о различных волнах, например электромагнитных или акустических). В точке наблюдения, связанной с СОПН, на интервале наблюдения $[0, T]$ принимается квазидетерминированный сигнал $S(t)$ с переменным периодом.

Согласно ПВМ отрезок наблюдения представляется в виде

$$(2.1) \quad [0, T] = \bigcup_{n=1}^N [t_{n-1}, t_n], \quad t_n > t_{n-1}, \quad t_0 = 0, \quad t_N \leq T,$$

где $t_0 = 0$ — фиксированный момент времени, соответствующий началу принимаемого сигнала (например, поступлению первого импульса), t_n — фиксированный момент времени поступления $M_n = \sum_{p=1}^n \Delta M_p$ периодов принимаемого квазипериодического сигнала (ΔM_p — количество периодов, подсчитываемых на отрезке $[t_{p-1}, t_p]$), при этом в момент времени t_n число M_n периодов целиком укладывается в отрезок $[0, t_n]$.

Теоретические и практические вопросы, связанные с подсчетом указанных периодов, решаются с использованием электронных цифровых частотомеров и подробно изложены в известной технической литературе (см., например, [23, стр. 148–161]).

В точке наблюдения (где расположен СОПН) с учетом движения ИЦ сигнал становится квазипериодическим, поскольку возникает временная невязка $\delta(t)$ между периодами излученного и принятого сигналов

$$(2.2) \quad \delta(t) = v_S^{-1} \Delta R(t) = v_S^{-1} [R(t) - R_0], \quad t \in [0, T],$$

где $R(t)$ — текущая дальность до ИЦ, $R_0 = R(0)$ — начальная дальность.

В прямоугольной декартовой системе координат XYZ (в центре которой находится СОПН) движение ИЦ описывается полиномиальной моделью (для упрощения выкладок и наглядности метода вместо обобщенного конечного полинома с произвольными базисными функциями ограничимся степенным полиномом второй степени с начальным условием $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(0)$, $\|\mathbf{r}_0\| = R_0$)

$$(2.3) \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + 2^{-1} \mathbf{a}_0 t^2, \quad t \in [0, T],$$

где $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r} = [x, y, z]^T$ — вектор положения ($\|\mathbf{r}(t)\| = R(t)$),

$\mathbf{v}_0 = [v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}]^T$ — вектор начальной скорости ($v_0 = \|\mathbf{v}_0\|$ — величина скорости),

$\mathbf{a}_0 = [a_{x0}, a_{y0}, a_{z0}]^T$ — вектор ускорения ($a_0 = \|\mathbf{a}_0\|$ — величина ускорения), при этом векторы \mathbf{r}_0 , \mathbf{v}_0 и \mathbf{a}_0 априорно неизвестны.

Если в качестве измеряемого параметра принять величину t_n , то можно воспользоваться следующим векторным уравнением наблюдения:

$$(2.4) \quad \mathbf{h} = \mathbf{t} + \boldsymbol{\xi} = \bar{\mathbf{t}} + \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\xi},$$

где

$$\mathbf{h} = [h_n, n = \overline{1, N}]^T, \quad \mathbf{t} = [t_n, n = \overline{1, N}]^T, \quad \bar{\mathbf{t}} = [\bar{t}_n, n = \overline{1, N}]^T, \\ \boldsymbol{\delta} = [\delta_n, n = \overline{1, N}]^T, \quad \boldsymbol{\xi} = [\xi_n, n = \overline{1, N}]^T, \quad h_n = h(t_n), \quad \xi_n = \xi(t_n).$$

В (2.4) под $\boldsymbol{\xi} = [\xi_n, n = \overline{1, N}]^T$ понимается гауссовская погрешность измерений с нулевым математическим ожиданием и корреляционной матри-

цей \mathbf{K}_ξ , а измеряемый параметр t_n связан с числом подсчитываемых периодов соотношением

$$(2.5) \quad t_n = M_n T_S + \delta_n = \bar{t}_n + \delta_n = \bar{t}_n + v_S^{-1} [R_n - R_0],$$

где $\delta_n = \delta(t_n)$ — неизвестная временная невязка, $\bar{t}_n = M_n T_S$, $R_n = R(t_n)$, $t_0 = 0$.

Формулу (2.5) можно прокомментировать так (см., например, [6, стр. 154]): за время $\bar{t}_n = M_n T_S$ дальность между ИЦ и СОПН изменится на величину $\Delta R_n = R_n - R_0$, что соответствует временной невязке $\delta_n = v_S^{-1} \Delta R_n$ между периодами излученного и принятого сигналов. Если бы цель была стационарной или двигалась по окружности (в центре которой находится СОПН), то приращение дальности отсутствовало бы и $\delta_n = 0$ для всех n . Именно прохождение волной дополнительного участка пути длиной ΔR_n со скоростью v_S является причиной возникновения невязки δ_n .

Напомним, что при известном периоде T_S в качестве измеряемого параметра можно было принять величину $\delta_n = t_n - M_n T_S$ (именно так формировалось уравнение наблюдения в [6, 20]), при неизвестном периоде T_S доступны для измерения только величины t_n и M_n .

Если расстояние между ИЦ и СОПН уменьшается, то $\delta_n < 0$, в противном случае $\delta_n > 0$. Появление временной невязки $\delta_n = \delta(t_n)$ обусловлено эффектом сжатия или растяжения исходного периодического сигнала в точке наблюдения за счет движения ИЦ.

Требуется с учетом (2.1)–(2.5) разработать метод параметрической идентификации ИЦ с криволинейным (полиномиальным) движением на базе периода-временного СОПН, не требующий знания периода T_S излучаемого сигнала и вычисления текущей частоты Доплера. Метод должен включать в себя решение следующих вопросов:

- получение зависимостей, позволяющих оценить характер эволюции периода принимаемого сигнала (обусловленную движением ИЦ), что является принципиальным для данного метода;

- формирование алгоритма идентификации наклонной дальности и ряда характерных параметров движения ИЦ на точных данных (принимая $\xi_n = 0$, $n = \overline{1, N}$);

- определение условий корректного применения метода на точных данных (т.е. определение условий наблюдаемости метода);

- учет случайных погрешностей измерений;

- решение задачи идентификации на избыточных данных (\mathbf{h}) с учетом шумов измерений (задача сглаживания на основе метода наименьших квадратов (МНК)) и получение соотношения для расчета корреляционной матрицы ошибок идентификации;

- проведение вычислительного эксперимента с целью демонстрации возможностей метода.

3. Исследование эволюции периода сигнала

Набег $\delta(t)$ описывается выражением (для случая прямолинейного равномерного движения)

$$(3.1) \quad \delta(t) = v_S^{-1} \left\{ [R_0^2 + 2tR_0v_0 \cos \gamma_0 + t^2v_0^2]^{1/2} - R_0 \right\}, \quad t \geq 0, \quad \delta(0) = 0,$$

где γ_0 — угол между векторами \mathbf{r}_0 и \mathbf{v}_0 .

При $0 < \gamma_0 \leq \pi/2$ функция $\delta(t)$ является неотрицательной, гладкой и строго выпуклой, $\delta^{(1)}(t) = d\delta(t)/dt = 0$ в точке $t = 0$. При $\pi/2 < \gamma_0 < \pi$ функция $\delta(t)$ является гладкой и строго выпуклой, имеет два корня ($t = 0$ и $t = -2R_0 \cos \gamma_0/v_0$), в точке $t = -R_0 \cos \gamma_0/v_0$ достигает минимального значения ($v_S^{-1}R_0(\sin \gamma_0 - 1)$). При $\gamma_0 = 0$ имеем $\delta(t) = (v_0/v_S)t$, т.е. набег является линейной неотрицательной функцией, не зависящей от R_0 . При $\gamma_0 = \pi$ имеем $\delta(t) = -(v_0/v_S)t$ для $0 \leq t \leq R_0/v_0$, т.е. $\delta(t)$ является линейной функцией и достигает своего минимума ($-R_0/v_S$) в точке $t = R_0/v_0$. Поскольку при $\gamma_0 = 0$ и $\gamma_0 = \pi$ набег $\delta(t)$ не зависит от R_0 , то для этих некорректных случаев, связанных с движением ИЦ вдоль линии визирования, определение дальности с учетом эволюции периода сигнала в точке наблюдения невозможно.

Для более детального исследования $\delta(t)$ найдем несколько первых производных по времени (в точке $t = 0$):

$$(3.2) \quad \begin{cases} \delta_0^{(1)} = v_S^{-1}v_R, \\ \delta_0^{(2)} = (v_S R_0)^{-1}v_\tau^2, \\ \delta_0^{(3)} = -3(v_S R_0^2)^{-1}v_\tau^2v_R, \end{cases}$$

где $v_R = R_0 \cos \gamma_0$ и $v_\tau = v_0 \sin \gamma_0$ — соответственно величины радиальной и тангенциальной скорости.

В итоге можно воспользоваться разложением на основе ряда Тейлора

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \delta(t) &= v_S^{-1}t \left(v_R + \frac{v_\tau^2 t}{2R_0} - \frac{v_\tau^2 v_R t^2}{2R_0^2} + \dots \right) = \\ &= v_S^{-1}t \left[v_R + \frac{v_\tau^2 t}{2R_0} \left(1 - \frac{v_R t}{R_0} \right) + \dots \right], \end{aligned}$$

из которого следует, что спектральный состав функции $\delta(t)$ существенно зависит от условий наблюдения, и во многих практически важных случаях не удастся пренебречь производными второго и более высоких порядков, особенно для больших интервалов наблюдения и малых дальностей.

Формулы (3.1)–(3.3) весьма полезны при обосновании возможности практической реализации развиваемого ПВМ в каждом конкретном случае с учетом принятых исходных данных.

4. Построение алгоритма параметрической идентификации на точных данных

С учетом (2.3) можно воспользоваться следующей зависимостью

$$(4.1) \quad R^2(t) - R_0^2 = 2t \langle \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0 \rangle + t^2 (v_0^2 + \langle \mathbf{r}_0, \mathbf{a}_0 \rangle) + t^3 \langle \mathbf{v}_0, \mathbf{a}_0 \rangle + 4^{-1} t^4 a_0^2,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — символ скалярного произведения двух векторов, $\|\cdot\|$ — символ нормы вектора.

Формула (4.1) представляет собой первое базовое соотношение развиваемого ПВМ.

Второе базовое соотношение следует непосредственно из формулы (2.2):

$$(4.2) \quad R^2(t) - R_0^2 = 2v_S R_0 \delta(t) + v_S^2 \delta^2(t).$$

Приравнявая выражения (4.1) и (4.2), после несложных преобразований получаем уравнение

$$(4.3) \quad -2v_S \delta(t) \chi_1 + 2t \chi_2 + t^2 \chi_3 + t^3 \chi_4 + 4^{-1} t^4 \chi_5 = v_S^2 \delta^2(t),$$

где

$$(4.4) \quad \begin{cases} \chi_1 = R_0, \\ \chi_2 = \langle \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0 \rangle, \\ \chi_3 = (v_0^2 + \langle \mathbf{r}_0, \mathbf{a}_0 \rangle), \\ \chi_4 = \langle \mathbf{v}_0, \mathbf{a}_0 \rangle, \\ \chi_5 = a_0^2 \end{cases}$$

— неизвестные коэффициенты, имеющие понятный физический смысл и подлежащие идентификации.

Поскольку величины δ_n неизвестны, то с учетом (2.5) для дискретного времени запишем уравнение относительно неизвестных величин T_S и χ_i , $i = \overline{1, 5}$:

$$(4.5) \quad \begin{aligned} -2v_S (t_n - M_n T_S) \chi_1 + 2t_n \chi_2 + t_n^2 \chi_3 + t_n^3 \chi_4 + 4^{-1} t_n^4 \chi_5 = \\ = v_S^2 [(t_n - M_n T_S)]^2. \end{aligned}$$

После несложных, но громоздких преобразований формулу (4.5) можно представить в виде нового уравнения (относительно коэффициентов A_i)

$$(4.6) \quad \sum_{i=1}^6 B_{in} A_i = D_n,$$

где

$$(4.7) \quad \begin{cases} A_1 = (v_S \chi_1 - \chi_2) v_S^{-2} T_S^{-1}, & A_2 = -\chi_1 v_S^{-1}, \\ A_3 = (v_S^2 - \chi_3) (2v_S^2 T_S)^{-1}, & A_4 = 2^{-1} T_S, \\ A_5 = -\chi_4 (2T_S v_S^2)^{-1}, & A_6 = \chi_5 (8T_S v_S^2)^{-1}, \\ B_{1n} = t_n, & B_{2n} = M_n, & B_{3n} = t_n^2, \\ B_{4n} = M_n^2, & B_{5n} = t_n^3, & B_{6n} = t_n^4, \\ D_n = M_n t_n. \end{cases}$$

Соотношения (4.6) и (4.7) являются основой для идентификации параметров криволинейного движения ИЦ при неизвестном периоде излучаемого сигнала. В (4.6) неизвестными являются коэффициенты A_i , $i = \overline{1, 6}$, которые однозначно связаны с искомыми параметрами движения ИЦ и периодом излучаемого сигнала. Если уравнение (4.6) записать для всех $n = \overline{1, N}$, где $N \geq 6$, то получим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (с прямоугольной матрицей \mathbf{B})

$$(4.8) \quad \mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{D},$$

где $\mathbf{B} = [B_{in}, n = \overline{1, N}, i = \overline{1, 6}]$, $\mathbf{A} = [a_i, i = \overline{1, 6}]^T$, $\mathbf{D} = [D_n, n = \overline{1, N}]^T$.

Данная СЛАУ позволяет решать задачу оценивания указанных коэффициентов и параметров, а также периода сигнала при избыточных измерениях. При $N > 6$ речь идет о задаче сглаживания на основе МНК с использованием ортогонально-сингулярного разложения [24].

Рассмотрим частный случай, когда ИЦ движется прямолинейно и равномерно, а период сигнала неизвестен. Теперь вместо (4.3) имеем уравнение

$$(4.9) \quad -2v_S \delta(t) \chi_1 + 2t \chi_2 + t^2 \chi_3 = v_S^2 \delta^2(t),$$

где

$$(4.10) \quad \begin{cases} \chi_1 = R_0, \\ \chi_2 = \langle \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0 \rangle, \\ \chi_3 = v_0^2. \end{cases}$$

При этом вместо (4.6) в этом случае имеем

$$(4.11) \quad t_n A_1 + M_n A_2 + t_n^2 A_3 + M_n^2 A_4 = M_n t_n.$$

Если предположить, что период сигнала известен, т.е. известны величины δ_n , то с учетом (4.9) для нахождения параметров прямолинейного равномерного движения ИЦ достаточно решить СЛАУ (относительно χ_i , $i = \overline{1, 3}$)

$$(4.12) \quad -2v_S \delta_n \chi_1 + 2t_n \chi_2 + t_n^2 \chi_3 = v_S^2 \delta_n^2, \quad n = \overline{1, N}.$$

При этом находим дальность R_0 , величину скорости $v_0 = \|\mathbf{v}_0\|$ и угол γ_0 между векторами \mathbf{r}_0 и \mathbf{v}_0 с учетом очевидных соотношений:

$$(4.13) \quad \begin{cases} R_0 = \chi_1, \\ v_0 = \sqrt{\chi_3}, \\ \gamma_0 = \arccos \left[\chi_2 (R_0 v_0)^{-1} \right]. \end{cases}$$

В случае прямолинейного равноускоренного движения ИЦ (когда векторы \mathbf{v}_0 и \mathbf{a}_0 являются коллинеарными) необходимо решить СЛАУ (относительно χ_i , $i = \overline{1, 5}$)

$$(4.14) \quad -2v_S \delta_n \chi_1 + 2t_n \chi_2 + t_n^2 \chi_3 + t_n^3 \chi_4 + 4^{-1} t_n^4 \chi_5 = v_S^2 \delta_n^2.$$

Теперь имеем:

$$(4.15) \quad \begin{cases} \chi_1 = R_0, \\ \chi_2 = R_0 v_0 \cos \gamma_0, \\ \chi_3 = (v_0^2 + R_0 a_0 \cos \gamma_0), \\ \chi_4 = v_0 a_0, \\ \chi_5 = a_0^2. \end{cases}$$

По найденным значениям χ_1, \dots, χ_5 вычисляем следующие параметры движения ИЦ:

$$(4.16) \quad \begin{cases} R_0 = \chi_1, \\ a_0 = \sqrt{\chi_5}, \\ v_0 = \chi_4 a_0^{-1}, \\ \gamma_0 = \arccos \left[\chi_2 (R_0 v_0)^{-1} \right]. \end{cases}$$

Выражения (4.1)–(4.16) составляют математическую основу развиваемого ПВМ.

В следующем разделе проанализируем условия наблюдаемости развиваемого метода, т.е. выявим ситуации, при которых он становится некорректным с вычислительной точки зрения.

5. Анализ наблюдаемости метода

Развиваемый ПВМ можно реализовать на любом наборе узлов из множества $\{t_1, \dots, t_N\}$, что позволяет не только уменьшить объем вычислений, но и в ряде случаев повысить надежность формируемых оценок (особенно при отсутствии достоверной априорной информации о весовых коэффициентах, необходимых для реализации МНК). Для этого введем векторы временных узлов $\mathbf{t}_{[l]} = [t_{[l]p}, p = \overline{1, P_{[l]}}]^T$, где $l = \overline{1, L}$, $t_{[l]p} \in \{t_1, \dots, t_N\}$, $t_{[l]p+1} > t_{[l]p}$.

Здесь L — число наборов, $P_{[l]}$ — количество узлов в l -м наборе, $t_{[l]p}$ — узел с номером $[l]p$ (это натуральное число, принадлежащее множеству $\{1, \dots, N\}$). На основе (4.12) сформируем следующую СЛАУ:

$$(5.1) \quad \mathbf{C}_{[l]}\mathbf{X}_{[l]} = \mathbf{Y}_{[l]},$$

где $\mathbf{Y}_{[l]} = [\delta_{[l]p}^2, p = \overline{1, P_{[l]}}]^T$, $\mathbf{X}_{[l]} = [\chi_{i[l]}, i = \overline{1, 5}]^T$, а матрица $\mathbf{C}_{[l]}$ (размером $P_{[l]} \times 5$) образована строками $v_S^{-2} \left(-2v_S \delta_{[l]p}, 2t_{[l]p}, t_{[l]p}^2, t_{[l]p}^3, 4^{-1}t_{[l]p}^4 \right)$, $p = \overline{1, P_{[l]}}$.

Введение $\mathbf{t}_{[l]}$ позволяет с учетом геометрии наблюдения, характеристик ИЦ и СОПН находить такие наборы узлов, на которых вопрос идентификации решается наиболее качественно (это относится к известной задаче планирования эксперимента [25]).

Не снижая общности рассуждений, ограничимся плоским случаем (принимая $z = 0$) и сигналом с известным периодом, а также зададимся $P_{[l]} = 5$, что соответствует квадратной матрице $\mathbf{C}_{[l]}$. Очевидно, что для корректного применения развиваемого метода, связанного с решением СЛАУ (5.1), необходимо и достаточно выполнение условия $\det \mathbf{C}_{[l]} \neq 0$, что приводит к искомому результату $\mathbf{X}_{[l]} = \mathbf{C}_{[l]}^{-1}\mathbf{Y}_{[l]}$. Для выявления случаев, при которых это условие нарушается, запишем столбцы матрицы $\mathbf{C}_{[l]}$ в виде векторов:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{[l]1} &= [-2v_S \delta_{[l]p}, p = \overline{1, 5}]^T, & \mathbf{C}_{[l]2} &= [2t_{[l]p}, p = \overline{1, 5}]^T, \\ \mathbf{C}_{[l]3} &= [t_{[l]p}^2, p = \overline{1, 5}]^T, & \mathbf{C}_{[l]4} &= [t_{[l]p}^3, p = \overline{1, 5}]^T, & \mathbf{C}_{[l]5} &= [4^{-1}t_{[l]p}^4, p = \overline{1, 5}]^T. \end{aligned}$$

Несложно заметить, что столбцы $\mathbf{C}_{[l]2}$, $\mathbf{C}_{[l]3}$ и $\mathbf{C}_{[l]4}$ линейно независимы, следовательно, для проверки условия $\det \mathbf{C}_{[l]} \neq 0$ достаточно показать, что столбец $\mathbf{C}_{[l]1}$ не может быть представлен в виде линейной комбинации этих столбцов.

Так как $R_{[l]p} = [x_{[l]p}^2 + y_{[l]p}^2]^{-2}$ (где $R_{[l]p} = R(t_{[l]p})$, $x_{[l]p}^2 = (x_0 + v_{x0}t_{[l]p} + 2^{-1}a_{x0}t_{[l]p}^2)^2$ и $y_{[l]p}^2 = (y_0 + v_{y0}t_{[l]p} + 2^{-1}a_{y0}t_{[l]p}^2)^2$), то нарушение условия $\det \mathbf{C}_{[l]} \neq 0$ эквивалентно тому, что векторы $\boldsymbol{\mu}_{[l]} = [x_{[l]p}^2, p = \overline{1, 5}]^T$ и $\boldsymbol{\eta}_{[l]} = [y_{[l]p}^2, p = \overline{1, 5}]^T$ не связаны условием коллинеарности: $\boldsymbol{\mu}_{[l]} = k\boldsymbol{\eta}_{[l]}$, где k — коэффициент пропорциональности. В противном случае имеем

$$(5.2) \quad R_{[l]p} = [x_{[l]p}^2 + y_{[l]p}^2]^{-2} = [k^2 y_{[l]p}^2 + y_{[l]p}^2]^{-2} = q |y_{[l]p}|,$$

$$(5.3) \quad -2v_S \delta_{[l]p} = -2 [R_{[l]p} - R_0] = -2 [q |y_{[l]p}| - R_0],$$

где $q = (k^2 + 1)^{-2}$.

Из (5.2) и (5.3) следует, что координаты вектора $\mathbf{C}_{[l]1}$ можно представить линейной комбинацией из координат векторов $\mathbf{C}_{[l]2}$, $\mathbf{C}_{[l]3}$ и $\mathbf{C}_{[l]4}$. Физический

смысл условия $\mu_{[l]} = k\eta_{[l]}$ (условие вычислительной некорректности метода) состоит в том, что ИЦ движется прямолинейно вдоль линии визирования СОПН.

Таким образом, для корректности метода необходимо исключить случаи, когда ИЦ движется вдоль указанной линии или в ее окрестности. Это накладывает определенные ограничения на условия наблюдения ИЦ, что необходимо предусмотреть на практике.

Если ограничиться моделью прямолинейного равномерного движения и сигналом с известным периодом (в этом случае в (5.1) надо положить $p = \overline{1, 3}$ и $\mathbf{t}_{[l]} = [t_{[l]1}, t_{[l]2}, t_{[l]3}]^T$), то решение СЛАУ (5.1) при корректном применении метода позволяет определить искомые параметры движения ИЦ

$$(5.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_{0[l]} = 2^{-1}v_S \left(\frac{\delta_{[l]1}^2 \Delta_{[l]23}^t - \delta_{[l]2}^2 \Delta_{[l]13}^t + \delta_{[l]3}^2 \Delta_{[l]12}^t}{-\delta_{[l]1} \Delta_{[l]23}^t + \delta_{[l]2} \Delta_{[l]13}^t - \delta_{[l]3} \Delta_{[l]12}^t} \right), \\ \langle \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0 \rangle_{[l]} = 2^{-1}v_S^2 \left(\frac{t_{[l]1}^2 \Delta_{[l]23}^\delta - t_{[l]2}^2 \Delta_{[l]13}^\delta + t_{[l]3}^2 \Delta_{[l]12}^\delta}{-\delta_{[l]1} \Delta_{[l]23}^t + \delta_{[l]2} \Delta_{[l]13}^t - \delta_{[l]3} \Delta_{[l]12}^t} \right), \\ v_{0[l]} = \left[\frac{t_{[l]3} \Delta_{[l]12}^\delta - t_{[l]2} \Delta_{[l]13}^\delta + t_{[l]1} \Delta_{[l]23}^\delta}{\delta_{[l]1} \Delta_{[l]23}^t - \delta_{[l]2} \Delta_{[l]13}^t + \delta_{[l]3} \Delta_{[l]12}^t} \right]^{1/2}, \\ \gamma_{0[l]} = \arccos \left[\frac{\langle \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0 \rangle_{[l]}}{R_{0[l]} v_{0[l]}} \right], \end{array} \right.$$

где $\Delta_{[l]12}^t = t_{[l]1}t_{[l]2} (t_{[l]1} - t_{[l]2})$, $\Delta_{[l]12}^\delta = \delta_{[l]1}\delta_{[l]2} (\delta_{[l]1} - \delta_{[l]2})$ и, если не учитывать ошибки измерений и вычислений, $R_{0[l]} = R_0$, $v_{0[l]} = v_0$, $\langle \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0 \rangle_{[l]} = \langle \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0 \rangle$, $\gamma_{0[l]} = \gamma_0$.

Следовательно, появляется возможность определения параметров движения R_0 , v_0 и γ_0 (где $R_0 = \chi_1$, $v_0 = \sqrt{\chi_3}$, $\gamma_0 = \arccos [\chi_2 (R_0 v_0)^{-1}]$), не прибегая к численному решению СЛАУ, что является несомненным достоинством развиваемого ПВМ.

6. Учет случайных погрешностей измерений

Полагая период сигнала известным, для оценки влияния случайных погрешностей измерений ξ на точностные характеристики метода воспользуемся традиционной процедурой расчета элементов корреляционной матрицы $\mathbf{K}_{\chi[l]}$ ошибок оценивания координат вектора χ в линейном приближении [26]. Для этого с учетом СЛАУ (5.1) (полагая для простоты матрицу $\mathbf{C}_{[l]}$ квадратной размером 5×5) воспользуемся представлением $\chi_{[l]} = \mathbf{C}_{[l]}^{-1} \mathbf{Y}_{[l]} = [\chi_k(\delta_{[l]}), k = \overline{1, 5}]^T$ (где $\delta_{[l]} = [\delta_{[l]p}, p = \overline{1, 5}]^T$) и частными производными следующего вида: $\partial \chi_{k[l]}(\delta_{[l]}) / \partial \delta_{[l]p}$. Корреляционная матри-

ца находится по правилу

$$(6.1) \quad \mathbf{K}_{\chi[l]} = \mathbf{F}_{\chi[l]} \mathbf{K}_{\xi} \mathbf{F}_{\chi[l]}^T,$$

где $\mathbf{F}_{\chi[l]} = [\partial \chi_k[l] (\boldsymbol{\delta}_{[l]}) / \partial \delta_{[l]p}]$, $k = \overline{1, 5}$, $p = \overline{1, 5}$.

Выражение (6.1) позволяет априорно на математических ожиданиях измеряемых параметров оценить потенциальные возможности развиваемого ПВМ и выработать практические рекомендации для его наилучшего использования при конкретных условиях наблюдения ИЦ, а также обоснованно подходить к выбору основных параметров метода (длины интервала наблюдения (T), количества узлов (N) и временных наборов ($\mathbf{t}_{[l]}$)). Так, номер $l^* \in \{1, \dots, L\}$ оптимального набора $\boldsymbol{\delta}_{[l^*]}$, обеспечивающего минимизацию ошибки оценивания, находится по следующему адаптивному правилу:

$$(6.2) \quad l^* = \arg \min_l \|\mathbf{K}_{\chi[l]}\|,$$

где $\|\mathbf{K}_{\chi[l]}\|$ — любая из норм матрицы $\mathbf{K}_{\chi[l]}$, применяемая в задачах оценивания.

При практической реализации развиваемого ПВМ следует учитывать тот фактор, что при больших значениях v_S (например, когда $v_S = c$, где c — скорость света) решение квадратной СЛАУ (4.8) при наличии случайных погрешностей измерений может приводить к некорректным результатам. Поясним этот факт для случая $N = 6$ на примере вычисления скорости v_0 . Поскольку $v_0 = c\sqrt{1 - 2T_S A_3}$, то ошибка $\Delta_3 = \hat{A}_3 - A_3$ (где \hat{A}_3 — вычисленное значение коэффициента A_3 путем решения СЛАУ (4.8) с учетом ошибок измерений) приводит к следующей оценке скорости: $\hat{v}_0 = \sqrt{v_0^2 + 2c^2 T_S \Delta_3}$. То есть корректная оценка скорости возможна лишь при выполнении условия $\Delta_3 > -v_0^2 (2c^2 T_S)^{-1}$, что накладывает очень жесткое ограничение на величину погрешности Δ_3 . Данный эффект относится также ко всем коэффициентам СЛАУ (4.8), кроме A_2 и A_4 .

Для преодоления указанной некорректности (при больших скоростях v_S) рекомендуется двухэтапный подход к идентификации. На первом этапе решается СЛАУ (4.8), из которой потребуются лишь оценка \hat{A}_4 для A_4 . Это позволяет сформировать искомую оценку $\hat{T}_S = 2\hat{A}_4$ для периода T_S , а на ее основе и оценки для невязок $\hat{\delta}_n = t_n - M_n \hat{T}_S$. Все оценки параметров движения ИЦ находятся на базе СЛАУ (5.1), в которую вместо δ_n подставляется величина $\hat{\delta}_n$.

7. Учет избыточных измерений

Теперь рассмотрим случай избыточных измерений, когда матрица $\mathbf{C}_{[l]}$ и вектор $\mathbf{Y}_{[l]}$ в (5.1) имеют произвольное число строк $P_{[l]} \leq N$, которое, как правило, значительно превышает количество оцениваемых параметров. Для упрощения расчетов будем рассматривать в СЛАУ (5.1) составляющую

$\mathbf{Y}_{[l]} = \left[v_S^2 \delta_{[l]p}^2, p = \overline{1, P_{[l]}} \right]^T$ в качестве вектора вторичных измеряемых параметров, а первичные измерения $h_{[l]1}, \dots, h_{[l]P_{[l]}}$ полагаем некоррелированными. С учетом этого по аналогии с (5.1) корреляционную матрицу ошибок измерений координат вектора $\mathbf{Y}_{[l]}$ можно представить так

$$(7.1) \quad \mathbf{K}_{\mathbf{Y}_{[l]}} = \mathbf{F}_{\delta_{[l]}} \mathbf{K}_{\xi} \mathbf{F}_{\delta_{[l]}}^T.$$

В предположении, что матрица \mathbf{K}_{ξ} является диагональной, имеем $\mathbf{K}_{\mathbf{Y}_{[l]}} = \text{diag} \left[4\delta_{[l]1}^2, 4\delta_{[l]2}^2, \dots, 4\delta_{[l]P_{[l]}}^2 \right]$. При условии достаточно малых ошибок измерений для построения сглаженной оценки $\mathbf{x}_{[l]}^*$ вектора \mathbf{x} можно воспользоваться методом наименьших квадратов [25]

$$(7.2) \quad \mathbf{x}_{[l]}^* = \left(\mathbf{C}_{[l]}^T \mathbf{K}_{\mathbf{Y}_{[l]}}^{-1} \mathbf{C}_{[l]} \right)^{-1} \mathbf{C}_{[l]}^T \mathbf{K}_{\mathbf{Y}_{[l]}}^{-1} \mathbf{h}_{\mathbf{Y}_{[l]}},$$

где $\mathbf{h}_{\mathbf{Y}_{[l]}} = \left[h_{\mathbf{Y}_{[l]p}}, p = \overline{1, P_{[l]}} \right]^T$ — вектор вторичных измерений.

Корреляционную матрицу ошибок оценивания находим так:

$$(7.3) \quad \mathbf{K}_{\mathbf{x}_{[l]}^*} = \left(\mathbf{C}_{[l]}^T \mathbf{K}_{\mathbf{Y}_{[l]}}^{-1} \mathbf{C}_{[l]} \right)^{-1}.$$

Для выбора оптимального набора с номером $l^* \in \{1, \dots, L\}$ применяем адаптивный алгоритм типа (6.2).

Следует отметить, что подход (7.1)–(7.3) не является строго оптимальным, поскольку элементы матрицы $\mathbf{C}_{[l]}$ зависят от результатов наблюдений. Но при определенных ограничениях на погрешности измерений он дает вполне приемлемый результат.

Для более точного сглаживания можно использовать известные процедуры нелинейного оптимального оценивания, которые приводят на практике к трудоемким рекуррентным вычислительным алгоритмам, предполагающим задание достаточно качественного начального условия.

Другой наиболее простой и достаточно надежный способ построения сглаженной оценки $\mathbf{x}_{[l]}^*$ состоит в предварительном сглаживании первичных измерений $h_{[l]1}, \dots, h_{[l]P_{[l]}}$ соответствующим полиномом $\delta_{[l]}^*(t)$ и применении полученных результатов к решению СЛАУ (5.1). Кроме того, можно найти сглаженную оценку дальности для любого $t \in [0, T]$, а именно,

$$(7.4) \quad R_{[l]}(t) = R_{0[l]}^* + c\delta_{[l]}^*(t).$$

Здесь в качестве оптимального принимаем набор с номером $l = l^* \in \{1, \dots, L\}$.

8. Некоторые обобщения и практические рекомендации

Выше рассматривался случай оценивания начальной дальности $R_0 = R(0)$ для момента времени $t = 0$. Однако если ряд Тейлора, используемый для

описания криволинейного движения ИЦ, записать относительно не начального, а любого произвольного $t = t_* \in [0, T]$, то по аналогии с вышеизложенным можно решить задачу идентификации именно для момента времени t^* , в частности найти дальность $R_* = R(t_*)$.

Развитый метод несложно реализовать в виде следующих алгоритмов: по выборке нарастающего объема, на «скользящей сетке» или в виде фильтра [25]. При этом движение ИЦ на интервале наблюдения можно рассматривать как кусочно-полиномиальное (в [20] оно рассматривалось как кусочно-линейное).

При практической реализации метода возникают вопросы (например, выбор степени полинома, описывающего движение ИЦ или количества подсчитываемых импульсов), связанные с организацией измерительного эксперимента. В [25] даются практические рекомендации для решения этих вопросов в полном объеме. Очевидно, что развиваемый метод наиболее эффективен в случае, когда речь идет о больших пройденных расстояниях (т.е. «синтезируется база» достаточного размера), а это задает определенные ограничения на тип ИЦ (в частности на его скорость, на возможности маневра и т.д.), на адекватность используемого полинома на заданном интервале наблюдения и на технические характеристики СОПН.

Для случаев, связанных с движением ИЦ по линии визирования, можно предложить гибридный вариант использования развитого и известного энергетического метода [27]. Доказано, что данный метод, оперирующий с относительным уровнем принимаемого сигнала, реализует при движении ИЦ по линии визирования свои потенциальные возможности. В некотором смысле развитый и энергетический методы «ортогональны» друг другу в плане точности. Следовательно, комбинируя эти методы, можно выровнять рабочую зону гибридного метода и достичь приемлемых точностных характеристик для различных условий наблюдения ИЦ.

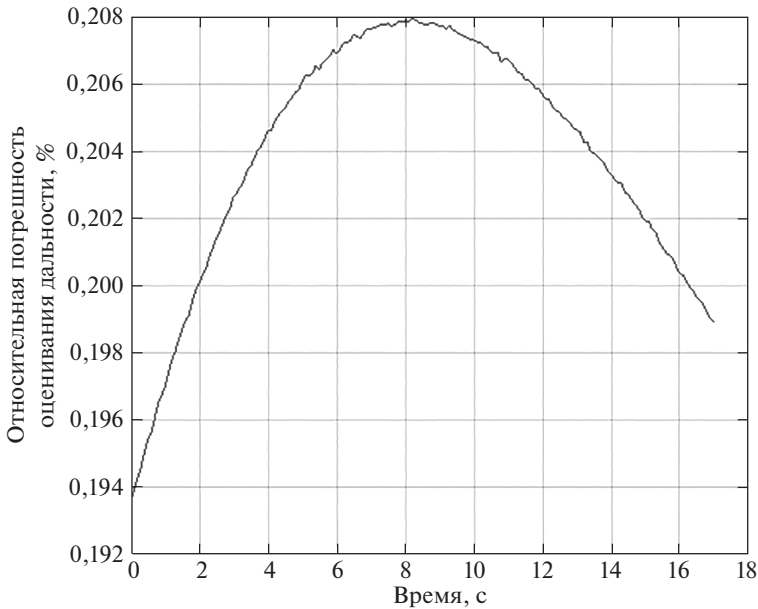
Для более эффективного применения энергетического метода следует использовать процедуры кластеризации и мажоритарной обработки для редукции и отсева ненадежных измерений.

9. Иллюстративный пример

Предположим, что ИЦ осуществляет плоскостное движение: $x(t) = x_0 + v_{x0}t$, $y(t) = y_0 + v_{y0}t$, где $x_0 = y_0 = 11 \cdot 10^3$, $v_{x0} = -5 \cdot 10^2$, $v_{y0} = 6 \cdot 10^2$, $\gamma_0 = 85$. Здесь и далее время и погрешности измерений временных интервалов задаются в секундах (с), координаты и дальность — в метрах (м), скорость — в м/с, ускорение — в м/с², частота — в герцах (Гц), угол — в градусах, относительная погрешность — в процентах.

ИЦ формирует импульсный радиосигнал

$$S_0(t) = \sum_{k=1}^K \text{rect} [(t - kT_S) \tau^{-1}] \cos(2\pi f_0 t),$$



Относительная погрешность оценивания дальности.

где $T_S = 10^{-2}$, $\tau = 10^{-5}$, $f_0 = 10^{10}$. Параметры работы СОПН: $T = 18$, $v_S = c = 3 \cdot 10^8$, $L = 1$ (т.е. использован один единственный набор узлов), $P_{[1]} = 4$ (размер набора), $\Delta M_p = \Delta M = 10$, $\mathbf{K}_\xi = \text{diag} [\sigma^2, \dots, \sigma^2]$, при этом погрешности измерений временного положения фронтов импульсов полагались некоррелированными и задавались по нормальному закону распределения с нулевым математическим ожиданием и значением среднеквадратического отклонения $\sigma = 10^{-9}$.

Реализация метода осуществлялась в два этапа с применением датчика случайных чисел и усреднением по тысяче экспериментов. На первом этапе решалась СЛАУ (4.8) с квадратной матрицей \mathbf{B} размером 4×4 (полагалось $A_5 = A_6 = 0$, так как рассматривается ИЦ с нулевым ускорением), при этом для расчета элементов матрицы \mathbf{B} и столбца \mathbf{D} использован вектор $\mathbf{t}_{[1]} = \bar{\mathbf{t}}_{[1]} + \boldsymbol{\delta}_{[1]} = [t_{[1]p}, p = \overline{1,4}]^T$ с номерами узлов: $[1]1 = 12$, $[1]2 = 65$, $[1]3 = 118$, $[1]4 = 171$, $\bar{\mathbf{t}}_{[1]} = [\bar{t}_{[1]p}, p = \overline{1,4}]^T = [[1]p \cdot 10^{-1}, p = \overline{1,4}]^T$. Из всех четырех оценок неизвестных коэффициентов выбирается только оценка периода сигнала $\hat{T}_{S[1]} = 9,999999731646 \cdot 10^{-3}$ (получена на основе набора $\mathbf{t}_{[1]} = \bar{\mathbf{t}}_{[1]} + \boldsymbol{\delta}_{[1]}$), которой соответствует относительная погрешность $\delta T_{S[1]} = 2,683540941544882 \cdot 10^{-6}$.

На втором этапе с учетом $\hat{\delta}_{[1]p} = t_{[1]p} - M_{[1]p} \hat{T}_{S[1]} = t_{[1]p} - [1]p \Delta M \hat{T}_{S[1]}$ решалась СЛАУ (5.1) с квадратной матрицей $\mathbf{C}_{[1]}$ (размером 3×3), при этом $\chi_4 = \chi_5 = 0$ и использовался набор $\bar{\mathbf{t}}_{[1]} = [\bar{t}_{[1]p}, p = \overline{1,3}]^T = [1, 1; 9, 1; 17, 1]^T$. Сама матрица образована строками $c^{-2} \begin{pmatrix} -2c\hat{\delta}_{[1]p}, 2t_{[1]p}, t_{[1]p}^2 \end{pmatrix}$, $p = \overline{1,3}$. В итоге истинной дальности $R_0 = 1,555634918 \cdot 10^4$ соответствуют оценка $\hat{R}_{0[1]} =$

$= 1,559672203 \cdot 10^4$ и погрешность $\Delta R_{0[1]} = 0,259526489$, истинной скорости $v_0 = 7,810249675 \cdot 10^2$ — оценка $v_{0[1]} = 7,821417156 \cdot 10^2$ и погрешность $\Delta v_{0[1]} = 0,142984942$, истинному углу $\gamma_0 = 84,805571092$ — оценка $\gamma_{0[1]} = 84,761511501$ и погрешность $\Delta \gamma_{0[1]} = 0,051953650$.

На рисунке представлен график зависимости относительной погрешности оценивания дальности, полученный с учетом (7.4).

Для более эффективного использования разработанного в статье метода вопрос выбора величины интервала наблюдения и узлов временной сетки, а также их согласования с динамикой движения ИЦ и величиной погрешностей измерений следует решать в оптимизационной постановке. При решении СЛАУ следует привлекать известные методы регуляризации. Результаты численного эксперимента показывают, что чем больше расстояние между узлами используемой временной сетки, тем меньшее влияние оказывают случайные погрешности измерений на результирующую точность оценивания. Это расстояние должно быть согласовано с динамикой ИЦ, а именно: чем меньше скорость движения ИЦ, тем больше должны быть шаг этой сетки и длительность интервала наблюдения.

10. Заключение

Разработанный ПВМ позволяет идентифицировать модель криволинейного полиномиального движения ИЦ по результатам регистрации временной невязки между периодами излученного сигнала и этими же периодами, подсчитанными в точке наблюдения. Метод не требует знания периода сигнала и предварительной оценки текущей частоты Доплера, а также знания каких-либо априорных данных о параметрах принятой модели движения ИЦ. Исследованы наблюдаемость и основные ограничения метода, условия его наиболее эффективного применения. Получены аналитические соотношения, позволяющие оценить эволюцию временной невязки с учетом характеристик ИЦ и СОПН, а также точностные характеристики метода для различных условий наблюдения.

Метод можно реализовать в различных вариантах: по фиксированной выборке измерений, по выборке измерений нарастающего объема, в виде алгоритма динамической фильтрации (линейной, квазилинейной или нелинейной) и др.

Метод может быть реализован как самостоятельно, так и в составе гибридного метода, объединяющего другие известные подходы пассивной однопозиционной и многопозиционной локации и навигации ИЦ. Поскольку развитый метод позволяет определять дальность, то он может быть использован в дальномерно-дальномерных системах многопозиционной локации при решении известной задачи трилатерации [21, 22].

При наличии в периодо-временных измерениях не только флуктуационных погрешностей, но и сингулярных ошибок целесообразно первоначально подвергнуть эти измерения процедуре обобщенного инвариантно-несмещен-

ного оценивания [28], обеспечивающей компенсацию этих ошибок, достижение эффекта сглаживания и оптимальное оценивание различных числовых характеристик (линейных функционалов, например производных, интегралов, спектральных коэффициентов и т.д.), полезных не только для повышения вычислительной устойчивости метода, но и оценки его эффективности. Для решения СЛАУ с использованием процедуры регуляризации можно применять известный подход [29].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Основы маневрирования кораблей / Под ред. М. Скворцова. М.: Воениздат, 1966.
2. *Шебшаевич В.С.* Введение в теорию космической навигации. М.: Сов. радио, 1971.
3. *Громов Г.Н.* Дифференциально-геометрический метод навигации. М.: Радио и связь, 1986.
4. *Хвоц В.А.* Тактика подводных лодок. М.: Воениздат, 1989.
5. *Соловьев Ю.А.* Спутниковая навигация и ее приложения. М.: Экотрендз, 2003.
6. *Мельников Ю.П., Попов С.В.* Радиотехническая разведка. М.: Радиотехника, 2008.
7. *Ярлыков М.С.* Статистическая теория радионавигации. М.: Радио и связь, 1985.
8. *Сосулин Ю.Г., Костров В.В., Паршин Ю.Н.* Оценочно-корреляционная обработка сигналов и компенсация помех. М.: Радиотехника, 2014.
9. *Бульчев Ю.Г., Манин А.П.* Математические аспекты определения движения летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 2000.
10. *Бульчев Ю.Г., Васильев В.В., Джуган Р.В. и др.* Информационно-измерительное обеспечение натурных испытаний сложных технических комплексов. М.: Машиностроение – Полет, 2016.
11. *Гельцер А.А.* Однопозиционный метод определения местоположения источника радиоизлучения с использованием отражений сигналов от множества элементов рельефа и местных предметов // Автореф. дисс. Том. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники. 2012.
12. *Сиренко И.Л., Донец И.В., Рейзенкинд Я.А. и др.* Однопозиционное определение координат и вектора скорости радиоизлучающих объектов // Радиотехника. 2019. № 10 (16). С. 28–32.
13. *Бульчев Ю.Г., Бульчев В.Ю., Ивакина С.С., Насенков И.Г.* Пассивная локация группы движущихся целей одним стационарным пеленгатором с учетом априорной информации // АиТ. 2017. № 1. С. 152–166.
Bulychev Yu.G., Bulychev V.Yu., Ivakina S.S., Nasenkov I.G. Passive Location of a Group of Moving Targets with One Stationary Bearing with Prior Information // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 1. P. 125–137.
14. *Бульчев Ю.Г., Бульчев В.Ю., Ивакина С.С., Николас П.И.* Оценка наклонной дальности до цели с полиномиальным законом движения // Вестн. Казан. гос. ун-та. 2013. № 1. С. 67–74.
15. *Бульчев Ю.Г.* Некоторые аспекты идентификации динамических объектов при некорректных условиях наблюдения // АиТ. 2020. № 6. С. 131–152.

- Bulychev Yu.G.* Some Aspects of Identification of Dynamic Objects under Incorrect Observation Conditions // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 6. P. 1073–1090.
16. *Дятлов А.П., Дятлов П.А.* Доплеровские обнаружители подвижных объектов с использованием «постороннего» источника излучения // Спец. техника. 2010. № 5. С. 16–22.
 17. *Aidala V.J., Nardone S.C.* Biased Estimation Properties of the Pseudolinear Tracking Filter // IEEE Transact. Aerospas. Electron. Syst. 1982. V. 18. No. 4. P. 432–441.
 18. *Amelin K.S., Miller A.B.* An Algorithm for Refinement of the Position of a Light UAV on the Basis of Kalman Filtering of Bearing Measurements // J. Commun. Techn. Electron. 2014. V. 59. No. 6. P. 622–631.
 19. *Miller A.B.* Development of the Motion Control on the Basis of Kalman Filtering of Bearing-Only Measurements // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 6. P. 1018–1035.
 20. *Бульчев Ю.Г., Мозоль А.А.* Однопозиционная пассивная локация источника излучения с криволинейным движением и учетом эволюции периода сигнала в точке приема // РЭ. 2023. Т. 68. № 2. С. 131–137.
 21. *Кондратьев В.С., Котов А.Ф., Марков Л.Н.* Многопозиционные радиотехнические системы. М.: Радио и связь, 1986.
 22. *Черняк В.С.* Многопозиционная радиолокация. М.: Радио и связь, 1993.
 23. *Нефедов В.И., Сигов А.С., Битюков В.К., Самохина Е.В.* Электрорадиоизмерения. М.: Форум: Инфра-М. 2018.
 24. *Лоусон Ч., Хенсон Р.* Численное решение задач метода наименьших квадратов. М.: Наука, 1986.
 25. *Жданюк Б.Ф.* Основы статистической обработки траекторных измерений. М.: Сов. радио, 1978.
 26. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей. М.: Высш. шк., 1999.
 27. *Бульчев Ю.Г., Ивакина С.С., Насенков И.Г.* Метод пассивно-энергетической локации и навигации в стационарной и нестационарной постановках // Радиотехника. 2015. № 6. С. 107–115.
 28. *Бульчев Ю.Г., Елисеев А.В.* Вычислительная схема инвариантно несмещенного оценивания значений линейных операторов заданного класса // ЖВМиМФ. 2008. Т. 48. № 4. С. 580–592.
 29. *Бульчев Ю.Г., Бурлай И.В.* Метод параметрической идентификации систем управления при неточном задании входных данных // АиТ. 1997. № 11. С. 56–65.

Статья представлена к публикации членом редколлегии О.Н. Граничиным.

Поступила в редакцию 16.06.2022

После доработки 04.05.2023

Принята к публикации 21.05.2023