*Автоматика и телемеханика, № 8, 2023*

*Нелинейные системы*

**© 2023 г. В.Л. ХАЦКЕВИЧ, д-р техн. наук (vlkhats@mail.ru)
(Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил
«Военно-воздушная академия им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина»,
Воронеж)**

# НЕПРЕРЫВНЫЕ ПРОЦЕССЫ С НЕЧЕТКИМИ СОСТОЯНИЯМИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Введены и изучены скалярные характеристики непрерывных процессов с нечеткими состояниями — средние и корреляционные функции. Установлены их алгебраические свойства, а также свойства, связанные с операциями дифференцирования и интегрирования нечетких функций вещественного аргумента. Показана зависимость между характеристиками нечеткого сигнала на входе и выходе динамической системы, описываемой дифференциальным уравнением высокого порядка с постоянными коэффициентами.

*Ключевые слова*: непрерывные нечеткие процессы, средние корреляционные функции, «нечеткие» динамические системы.

**DOI:** 10.31857/S0005231023080032, **EDN:** HBBOUB

## 1. Введение

При исследовании динамических процессов в условиях ограниченной исходной информации один из возможных подходов заключается в трактовке их параметров как реализации некоторых случайных процессов [1]. Однако часто возникает ситуация, когда закон распределения случайных величин в рассматриваемые моменты времени слабоформализуем. В этом случае удобно рассматривать такие процессы, как процессы с нечеткими состояниями (нечеткие процессы). В частности, важный класс «нечетких» динамических процессов дают системы автоматического регулирования и оптимального управления.

Таким образом, непрерывные нечеткие процессы представляют собой альтернативный по отношению к непрерывным случайным процессам метод моделирования задач теории автоматического регулирования. При этом «нечеткий» процесс понимается как параметрическая система нечетких чисел, непрерывно зависящая от параметра (времени). В настоящее время теория нечетких множеств используется при решении разнообразных прикладных задач [2, 3]. В частности, исследованы различные нечеткие модели объектов управления [4].

В разделах 3–4 настоящей работы введены и изучены числовые характеристики непрерывных процессов с нечеткими состояниями и непрерывным временем, а именно средние и корреляционные функции. Установлены их свойства, аналогичные свойствам соответствующих характеристик непрерывных случайных процессов. В разделе 3 рассмотрены алгебраические свойства средних и корреляционных функций непрерывных нечетких процессов. В разделе 4 установлены свойства этих характеристик относительно интегралов и производных от нечетких процессов. При этом интегралы от нечетких функций понимаются как частный случай интегралов Аумана [5] от многозначных функций (как интегралы от $\alpha$-срезок). Они рассмотрены в [6, 7 и др.]. Различные определения производных от нечетких функций рассмотрены в [6–8 и др.]. Здесь используем определение, связанное с разностью множеств по Хукухаре [9]. Результаты разделов 3 и 4 опираются на определение и свойства ковариации нечетких чисел, рассмотренные в работе автора [10] и изложенные в разделе 2.

В настоящее время активно исследуются «нечеткие» дифференциальные уравнения и их приложения, см. [3 (гл. 7, 8), 7, 8, 11–13 и др.]. Из последних работ отметим [14, 15]. В разделе 5 данной работы рассматриваются «нечеткие» динамические системы, описываемые линейными дифференциальными уравнениями $n$-го порядка с постоянными коэффициентами. Установлена зависимость между числовыми характеристиками нечеткого сигнала на выходе «нечеткой» динамической системы и соответствующими характеристиками входного нечеткого сигнала. В отличие от известных подходов [12–15] излагаемый здесь подход опирается на развитие метода функции Грина, широко распространенного в теории обыкновенных дифференциальных уравнений [16, гл. II; 17, гл. 1], на случай нечетких дифференциальных уравнений.

## 2. Среднее, квазискалярное произведение и ковариация нечетких чисел

Под нечетким числом будем понимать нечеткое подмножество универсального множества действительных чисел, имеющее компактный носитель и нормальную, выпуклую и полунепрерывную сверху функцию принадлежности (см., например, [2, гл. 5]). Множество таких нечетких чисел обозначим через $J$.

Ниже будем использовать интервальное представление нечетких чисел.

Как известно, интервалы $\alpha$-уровня ($\alpha$-уровни) нечеткого числа $\tilde{z}$ с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{z}}(x)$ определяются соотношениями

$$z_\alpha = \{x|\mu_{\tilde{z}}(x) \geqslant \alpha\}, \quad (\alpha \in (0,1]),\ z_0 = cl\{x|\mu_{\tilde{z}}(x) > 0\},$$

где $cl$ обозначает замыкание множества. Согласно принятым предположениям все $\alpha$-уровни нечеткого числа — замкнутые и ограниченные интервалы вещественной оси.

Обозначим левую границу $\alpha$-интервала через $z^-(\alpha)$, а правую — $z^+(\alpha)$, таким образом, $z_\alpha = [z^-(\alpha), z^+(\alpha)]$. Выражения $z^-(\alpha)$ и $z^+(\alpha)$ называют соответственно левым и правым $\alpha$-индексами (индексами) нечеткого числа. Вещественное число $x \in R$ трактуется как нечеткое число с левым и правым $\alpha$-индексами, равными $x$.

Ниже под суммой нечетких чисел с индексами $z^-(\alpha)$, $z^+(\alpha)$ и $u^-(\alpha)$, $u^+(\alpha)$ понимается нечеткое число с интервалами $\alpha$-уровня $[z^-(\alpha) + u^-(\alpha), z^+(\alpha) + u^+(\alpha)]$. Умножение на положительное число $c$ характеризуется интервалами $\alpha$-уровня $[cz^-(\alpha), cz^+(\alpha)]$, а умножение на отрицательное число $c$ — интервалами $\alpha$-уровня $[cz^+(\alpha), cz^-(\alpha)]$. Равенство нечетких чисел понимается как равенство всех соответствующих $\alpha$-индексов при $\forall\, \alpha \in [0, 1]$.

Как известно [18], среднее значение нечеткого числа $\tilde{z}$, используя интервальное представление, можно определить следующим способом:

$$m(\tilde{z}) = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 (z^-(\alpha) + z^+(\alpha))\, d\alpha. \tag{1}$$

Отметим, что среднее (1) является линейным.

*Пример 1.* Рассмотрим нечеткое треугольное число $\tilde{z}$, характеризуемое тройкой вещественных чисел $(a, b, c)$ при $a < b < c$, определяющей функцию принадлежности

$$\mu_{\tilde{z}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{если}\, x \in [a, b]; \\ \dfrac{x-c}{b-c}, & \text{если}\, x \in [b, c]; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Как известно, в этом случае нижняя и, соответственно, верхняя граница $\alpha$-интервала имеют вид

$$z^-(\alpha) = (b-a)\alpha + a, \quad z^+(\alpha) = -(c-b)\alpha + c.$$

Нетрудно подсчитать, что среднее (1) для нечеткого треугольного числа $(a, b, c)$ равно $m(\tilde{z}) = \frac{1}{4}(a + 2b + c)$.

На множестве нечетких чисел можно по-разному ввести определения расстояний между ними. При интервальном подходе часто используют расстояния Хаусдорфа между множествами $\alpha$-уровня нечетких чисел. А именно, для нечетких чисел $\tilde{z}$ и $\tilde{u}$ с $\alpha$-уровнями $z_\alpha$ и $u_\alpha$ задают метрику [19]

$$\rho(\tilde{z}, \tilde{u}) = \operatorname*{supp}_{0<\alpha\leqslant 1} \max \left\{ \operatorname*{supp}_{z\in z_\alpha} \inf_{u\in u_\alpha} |z-u|,\ \operatorname*{supp}_{u\in u_\alpha} \inf_{z\in z_\alpha} |z-u| \right\}. \tag{2}$$

Определение (2) порождает равенство

$$\rho(\tilde{z}, \tilde{u}) = \operatorname*{supp}_{0<\alpha\leqslant 1} \max \left\{ |z^-(\alpha) - u^-(\alpha)|,\ |z^+(\alpha) - u^+(\alpha)| \right\}. \tag{3}$$

Здесь $[z^-(\alpha), z^+(\alpha)]$ и $[u^-(\alpha), u^+(\alpha)]$ — интервалы $\alpha$-уровней нечетких чисел $\tilde{z}$ и $\tilde{u}$.

Отметим, что условие $\rho(\tilde{z}, \tilde{u}) = 0$ в силу (3) соответствует определению равенства нечетких чисел $\tilde{z}$ и $\tilde{u}$, данному выше.

Пусть нечеткому числу $\tilde{z}$ отвечают $\alpha$-уровни $z_\alpha = [z^-(\alpha), z^+(\alpha)]$. Положим, как это принято в интервальном анализе,

$$mid\, z_\alpha = \frac{1}{2}(z^+(\alpha) + z^-(\alpha)), \quad rad\, z_\alpha = \frac{1}{2}(z^+(\alpha) - z^-(\alpha)).$$

Здесь $mid\, z_\alpha$ характеризует среднее при каждом $\alpha \in [0, 1]$, а $rad\, z_\alpha$ — размах. Для нечетких чисел $\tilde{z}$ и $\tilde{u}$ из $J$ определим квазискалярное произведение [10]

$$\begin{aligned} \langle \tilde{z}, \tilde{u} \rangle &= \int_0^1 (mid\, z_\alpha mid\, u_\alpha + rad\, z_\alpha rad\, u_\alpha)\, d\alpha = \\ &= 0{,}5 \int_0^1 (z^+(\alpha)u^+(\alpha) + z^-(\alpha)u^-(\alpha))\, d\alpha. \end{aligned} \tag{4}$$

При этом квазинорма равна $\|\tilde{z}\| = \langle \tilde{z}, \tilde{z} \rangle^{1/2}$.

*Пример 2.* Рассмотрим два треугольных числа $\tilde{z}_1$ и $\tilde{z}_2$, характеризуемые тройками вещественных чисел $a_i$, $b_i$, $c_i$ при $a_i < b_i < c_i$ $(i = 1, 2)$. По определению их правых и левых индексов (см. пример 1) и согласно (4) квазискалярное произведение $\langle \tilde{z}_1, \tilde{z}_2 \rangle$ подсчитывается по формуле

$$\langle \tilde{z}_1, \tilde{z}_2 \rangle = \frac{2}{3} b_1 b_2 + \frac{1}{3}(a_1 a_2 + c_1 c_2) + \frac{1}{6}(a_1 b_2 + b_1 a_2 + b_1 c_2 + b_2 c_1).$$

*Утверждение 1* [10]. *Справедливы следующие свойства квазискалярного произведения* (4).

1) $\langle \tilde{z}, \tilde{u} \rangle = \langle \tilde{u}, \tilde{z} \rangle \ \forall\, \tilde{u}, \tilde{z} \in J$;

2) $\langle c_1 \tilde{z}, c_2 \tilde{u} \rangle = c_1 c_2 \langle \tilde{z}, \tilde{u} \rangle$ *при условии, что* $c_1 c_2 > 0$;

3) $\langle \tilde{z}_1 + \tilde{z}_2, \tilde{u} \rangle = \langle \tilde{z}_1, \tilde{u} \rangle + \langle \tilde{z}_2, \tilde{u} \rangle \ \forall\, \tilde{u}, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2 \in J$;

4) $\langle \tilde{z}, \tilde{z} \rangle \geqslant 0$, *причем условие* $\langle \tilde{z}, \tilde{z} \rangle = 0$ *эквивалентно равенству нулю левого и правого индексов* $\tilde{z}$;

5) *Обобщенное неравенство Коши–Буняковского* $|\langle \tilde{z}, \tilde{u} \rangle| \leqslant \langle \tilde{z}, \tilde{z} \rangle^{1/2} \langle \tilde{u}, \tilde{u} \rangle^{1/2}$, $\forall\, \tilde{u}, \tilde{z} \in J$.

Для нечетких чисел $\tilde{z}_1$ и $\tilde{z}_2$ со средними значениями $m_1$ и $m_2$ определим их ковариацию формулой [10]

$$\begin{aligned} cov[\tilde{z}_1, \tilde{z}_2] &= \langle \tilde{z}_1 - m_1, \tilde{z}_2 - m_2 \rangle = \\ &= 0{,}5 \int_0^1 \left( (z_1^+ - m_1)(z_2^+ - m_2) + (z_1^- - m_1)(z_2^- - m_2) \right) d\alpha. \end{aligned} \tag{5}$$

Обозначим дисперсию как $D(\tilde{z}) = cov|\tilde{z}, \tilde{z}|$.

*У т в е р ж д е н и е 2* [10]. *Справедливы следующие свойства ковариации* (5):

1) $cov[\tilde{z}_1 + \tilde{z}_2, \tilde{u}] = cov[\tilde{z}_1, \tilde{u}] + cov[\tilde{z}_2, \tilde{u}]$ $(\forall\, \tilde{u}, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2 \in J)$;

2) $cov[c_1\tilde{z}, c_2\tilde{u}] = c_1c_2 cov[\tilde{z}, \tilde{u}]$ $(\forall\, \tilde{u}, \tilde{z} \in J)$ *для любых вещественных* $c_1$, $c_2$, *таких что* $c_1c_2 > 0$;

3) *специфическое свойство ковариации:* $cov\,[\tilde{z}_1, \tilde{z}_2] = \langle \tilde{z}_1, \tilde{z}_2 \rangle - m_1m_2$, $(\forall\, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2 \in J)$, *где* $m_1$ *и* $m_2$ *— средние значения нечетких чисел* $\tilde{z}_1$ *и* $\tilde{z}_2$.

*У т в е р ж д е н и е 3* [10]. *Имеют место следующие свойства дисперсии*:

1) $D(c\tilde{z}) = c^2 D(\tilde{z})$ *для любого вещественного числа* $c$,

2) $D(\tilde{z} + \tilde{u}) = D(\tilde{z}) + D(\tilde{u}) + 2cov[\tilde{z}, \tilde{u}]$ *для* $\forall\, \tilde{u}, \tilde{z} \in J$.

В ряде работ (см., например, [20]) в качестве ковариации нечетких чисел $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2$ рассматривается выражение

$$cov_1[\tilde{z}_1, \tilde{z}_2] = \frac{1}{4} \int\limits_0^1 (z_1^+(\alpha) - z_1^-(\alpha))(z_2^+(\alpha) - z_2^-(\alpha))d\alpha.$$

При таком определении ковариация всегда неотрицательна, что не соответствует стандартным свойствам ковариации (для случайных величин).

## 3. Непрерывные нечеткие процессы

Фиксируем отрезок $[t_0, T]$ числовой оси при $t_0 \geqslant 0$. Отображение $\tilde{z} \colon [t_0, T] \to \to J$ будем называть процессом с нечеткими состояниями (или нечетким процессом) и непрерывным временем.

Пусть нечеткий процесс $\tilde{z}(t)$ при $t \in [t_0, T]$ характеризуется функцией принадлежности $\mu_{\tilde{z}}(x, t)$. При фиксированном $\alpha \in (0, 1]$ рассмотрим $\alpha$-интервал $z_\alpha(t) = \{x \in R : \mu_{\tilde{z}}(x, t) \geqslant \alpha\}$ и $z_0(\alpha) = cl\{x \in R : \mu_{\tilde{z}}(x, t) > 0\}$. Обозначим через $z_\alpha^-(t) = z^-(t, \alpha)$ и $z_\alpha^+(t) = z^+(t, \alpha)$ левую и соответственно правую границы $\alpha$-интервала. Так что $z_\alpha(t) = [z^-(t, \alpha), z^+(t, \alpha)]$.

Ниже будем предполагать, что индексы $z^-(t, \alpha)$ и $z^+(t, \alpha)$ квадратично суммируемы по $\alpha$ при каждом $t \in [t_0, T]$ и непрерывны по $t$ при любом $\alpha \in \in [0, 1]$.

Определим среднее значение $\tilde{z}(t)$ при каждом $t \in [t_0, T]$ равенством

$$m_{\tilde{z}}(t) = m(\tilde{z}(t)) = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 (z^-(t, \alpha) + z^+(t, \alpha))d\alpha. \tag{6}$$

*Т е о р е м а 1.* *Среднее значение непрерывного нечеткого процесса, определяемое формулой* (6), *обладает следующими свойствами.*

1. *Аддитивность. Если* $\tilde{z}_1(t)$ *и* $\tilde{z}_2(t)$ *— непрерывные нечеткие процессы, тогда* $m(\tilde{z}_1(t) + \tilde{z}_2(t)) = m(\tilde{z}_1(t)) + m(\tilde{z}_2(t))$.

2. *Однородность. Если* $\tilde{z}(t)$ *— непрерывный нечеткий процесс и* $\varphi(t)$ *— вещественная функция, тогда* $m(\varphi(t)\tilde{z}(t)) = \varphi(t)m(\tilde{z}(t))$.

Действительно, свойство 1 следует из определения интервального сложения и свойства аддитивности интеграла Лебега.

Покажем свойство 2. Рассмотрим при фиксированном $t \in [t_0, T]$ нечеткое число $\tilde{w}(t) = \varphi(t)\tilde{z}(t)$. Заметим, что его левый и правый индексы $w^-(t,\alpha)$ и $w^+(t,\alpha)$ совпадают с выражениями $\varphi(t)z^-(t,\alpha)$ и $\varphi(t)z^+(t,\alpha)$ в случае $\varphi(t) \geqslant 0$ и с выражениями $\varphi(t)z^+(t,\alpha)$ и $\varphi(t)z^-(t,\alpha)$ в случае $\varphi(t) < 0$. Однако их сумма $w^-(t,\alpha) + w^+(t,\alpha)$ совпадает с выражением $\varphi(t)(z^-(t,\alpha) + z^+(t,\alpha))$ независимого от знака $\varphi(t)$. Отсюда в соответствии с (1) следует свойство 2.

*Следствие 1. Если $f(t)$ — вещественная функция, то $m(\tilde{z}(t) + f(t)) = m(\tilde{z}(t)) + f(t)$.*

При этом считаем, что при $\forall\, t \in [t_0, T]$ для вещественного числа $f(t)$ имеет место равенство $f^-(t) = f^+(t) = f(t)$.

Определим корреляционную функцию непрерывного нечеткого процесса $\tilde{z}(t)$ равенством

$$K_{\tilde{z}}(t_1,t_2) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(z^+(t_1,\alpha) - m(\tilde{z}(t_1))\right)\left(z^+(t_2,\alpha) - m(\tilde{z}(t_2))\right) + \left(z^-(t_1,\alpha) - m(\tilde{z}(t_1))\right)\left(z^-(t_2,\alpha) - m(\tilde{z}(t_2))\right) d\alpha. \tag{7}$$

Дисперсией непрерывного нечеткого процесса назовем величину $D_{\tilde{z}}(t) = K_{\tilde{z}}(t,t)$. По определению $D_{\tilde{z}}(t) \geqslant 0$.

*Теорема 2. Корреляционная функция непрерывного нечеткого процесса, определяемая формулой (7), обладает следующими свойствами.*

1. *Симметричность. Для непрерывного нечеткого процесса $\tilde{z}(t)$ при $\forall\, t_1, t_2 \in [t_0, T]$ имеет место равенство*

$$K_{\tilde{z}}(t_1,t_2) = K_{\tilde{z}}(t_2,t_1).$$

2. *Если $\tilde{z}(t)$ — непрерывный нечеткий процесс и $\varphi(t)$ — числовая функция, тогда для непрерывного нечеткого процесса $\tilde{w}(t) = \varphi(t)\tilde{z}(t)$ корреляционная функция $K_{\tilde{w}}(t_1,t_2)$ имеет вид $K_{\tilde{w}}(t_1,t_2) = \varphi(t_1)\varphi(t_2)K_{\tilde{z}}(t_1,t_2)$ для $\forall\, t_1, t_2 \in [t_0, T]$, при которых выполнено условие $\varphi(t_1)\varphi(t_2) \geqslant 0$.*
3. *Если $\tilde{w}(t) = \tilde{z}(t) + \varphi(t)$, то $K_{\tilde{w}}(t_1,t_2) = K_{\tilde{z}}(t_1,t_2)$.*
4. *Справедливо соотношение $|K_{\tilde{z}_1}(t_1,t_2)| \leqslant \sqrt{D_{\tilde{z}}(t_1)D_{\tilde{z}}(t_2)}$.*

Теорема 2 основана на изложенных в разделе 2 свойствах ковариации (5) нечетких чисел.

Для непрерывных нечетких процессов $\tilde{z}_1(t)$ и $\tilde{z}_2(t)$ рассмотрим взаимную корреляционную функцию

$$K_{\tilde{z}_1\tilde{z}_2}(t,s) = \int\limits_0^1 \left(z_1^+(t,\alpha) - m(\tilde{z}_1(t))\right)\left(z_2^+(s,\alpha) - m(\tilde{z}_2(s))\right) + \left(z_1^-(t,\alpha) - m(\tilde{z}_1(t))\right)\left(z_2^-(s,\alpha) - m(\tilde{z}_2(s))\right) d\alpha.$$

*Теорема 3. Пусть $\tilde{z}_1(t)$ и $\tilde{z}_2(t)$ — непрерывные нечеткие процессы. Тогда корреляционная функция суммы $\tilde{w}(t) = \tilde{z}_1(t) + \tilde{z}_2(t)$ имеет вид*

$$K_{\tilde{w}}(t,s) = K_{\tilde{z}_1}(t,s) + K_{\tilde{z}_2}(t,s) + K_{\tilde{z}_1,\tilde{z}_2}(t,s) + K_{\tilde{z}_1,\tilde{z}_2}(s,t).$$

Непрерывные нечеткие процессы $\tilde{z}_1(t)$ и $\tilde{z}_2(t)$ назовем некоррелированными на отрезке $[t_0, T]$, если выполнено равенство

$$K_{\tilde{z}_1 \tilde{z}_2}(t,s) = 0 \quad (\forall\, t, s \in [t_0, T]).$$

*Следствие 2. Если непрерывные нечеткие процессы $\tilde{z}_1(t)$, $\tilde{z}_2(t)$ некоррелированны и $\tilde{w}(t) = \tilde{z}_1(t) + \tilde{z}_2(t)$, то*

$$K_{\tilde{w}}(t,s) = K_{\tilde{z}_1}(t,s) + K_{\tilde{z}_2}(t,s) \quad (\forall\, t, s \in [t_0, T]).$$

## 4. Интегрирование и дифференцирование непрерывных нечетких процессов

Интегралом по промежутку $[t_0, T]$ от непрерывного нечеткого процесса $\tilde{z}(t)$ называют [7] нечеткое число $\tilde{g}$, такое что его интервалы $\alpha$-уровня при любом $\alpha \in [0,1]$ имеют вид $g_\alpha = \int_{t_0}^{T} z_\alpha(t)\, dt$. Интеграл обозначают как $\int_{t_0}^{T} \tilde{z}(t)\, dt$.

По существу, это интеграл Аумана [5] от многозначного отображения $z_\alpha(t)$.

Если интеграл $\int_{t_0}^{T} \tilde{z}(t)\, dt$ существует, то процесс $\tilde{z}(t)$ называют интегрируемым на $[t_0, T]$.

Имеет место следующее свойство средних относительно интегралов.

*Теорема 4. Пусть $\tilde{z}(t)$ — интегрируемый на $[t_0, T]$ нечеткий процесс. Тогда $m\left(\int_{t_0}^{T} \tilde{z}(\tau) d\tau\right) = \int_{t_0}^{T} m(\tilde{z}(\tau))\, d\tau$.*

Действительно, по определению интеграла для его индексов имеем

$$\left(\int_{t_0}^{T} \tilde{z}(\tau)\, d\tau\right)_\alpha^{\pm} = \int_{t_0}^{T} z^{\pm}(\tau, \alpha)\, d\tau.$$

Тогда

$$m\left(\int\limits_{t_0}^{T} \tilde{z}(\tau)\, d\tau\right) = \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{1} \left(\int\limits_{t_0}^{T} (z^-(\tau,\alpha)) + (z^+(\tau,\alpha))\, d\tau\right) d\alpha = \int\limits_{t_0}^{T} m(\tilde{z}(\tau)) d\tau.$$

Для непрерывного нечеткого процесса $\tilde{z}(t)$ при $\forall\, t \in [t_0, T]$ определим непрерывный нечеткий процесс $\tilde{g}(t) = \int_{t_0}^{t} \tilde{z}(\tau)\, d\tau$.

*Теорема 5. Для корреляционной функции $K_{\tilde{g}}(t_1, t_2)$ интеграла $\tilde{g}(t)$ от непрерывного нечеткого процесса $\tilde{z}(t)$ имеет место равенство $K_{\tilde{g}}(t_1, t_2) = \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_2} K_{\tilde{z}}(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2$.*

*Доказательство.* По определению

$$K_{\tilde{g}}(t_1,t_2) =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(\int\limits_{t_0}^{t_1} z^+(\tau,\alpha)\,d\tau - \int\limits_{t_0}^{t_1} m(\tilde{z}(\tau,\alpha))\,d\tau\right)\left(\int\limits_{t_0}^{t_2} z^+(\tau,\alpha)\,d\tau - \int\limits_{t_0}^{t_2} m(\tilde{z}(\tau))d\tau\right) +$$

$$+\left(\int\limits_{t_0}^{t_1} z^-(\tau,\alpha)\,d\tau - \int\limits_{t_0}^{t_1} m(\tilde{z}(\tau,\alpha))\,d\tau\right)\left(\int\limits_{t_0}^{t_2} z^-(\tau,\alpha)\,d\tau - \int\limits_{t_0}^{t_2} m(\tilde{z}(\tau))\,d\tau\right)\,d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(\int\limits_{t_0}^{t_1} (z^+(\tau,\alpha) - m(\tilde{z}(\tau))\,d\tau)\left(\int\limits_{t_0}^{t_2} z^+(\tau,\alpha) - m(\tilde{z}(\tau))\,d\tau\right)\right)\,d\alpha +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(\int\limits_{t_0}^{t_1} z^-(\tau,\alpha) - m(\tilde{z}(\tau))\,d\tau \int\limits_{t_0}^{t_2} z^-(\tau,\alpha) - m(\tilde{z}(\tau))\,d\tau\right)\,d\alpha.$$

Рассмотрим первый интеграл в последнем выражении. Поскольку значение интеграла не зависит от переменной интегрирования, то его можно записать в виде

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(\int\limits_{t_0}^{t_1} z^+(\tau_1,\alpha) - m(\tilde{z}(\tau_1))\,d\tau_1\right)\left(\int\limits_{t_0}^{t_2} z^+(\tau_2,\alpha) - m(\tilde{z}(\tau_2))\,d\tau_2\right)\,d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{t_0}^{t_2} \big(z^+(\tau_1,\alpha) - m(\tilde{z}(\tau_1))\big)\big(z^+(\tau_2,\alpha) - m(\tilde{z}(\tau_2))\big)\,d\tau_1\,d\tau_2\,d\alpha.$$

Аналогично для индексов с минусом. Таким образом,

$$K_{\tilde{g}}(t_1,t_2) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{t_0}^{t_2} \big(z^+(\tau_1,\alpha) - m(\tilde{z}(\tau_1))\big)\big(z^+(\tau_2,\alpha) - m(\tilde{z}(\tau_2))\big) +\right.$$

$$\left. + \big(z^-(\tau_1,\alpha) - m(\tilde{z}(\tau_1))\big)\big(z^-(\tau_2,\alpha) - m(\tilde{z}(\tau_2))\big)\,d\tau_1\,d\tau_2\right)\,d\alpha.$$

Меняя здесь порядок интегрирования, получим утверждение теоремы 5.

Перейдем к рассмотрению производных от нечетких функций. В литературе используются различные определения. Одно из наиболее распространенных опирается на определение разности Хукухары [9]. А именно, для множеств $A$, $B$ множество $C$ называют разностью Хукухары, если $A = B + C$ и обозначают $A \overset{h}{-} B$.

Отображение $\tilde{z} : [t_0, T] \to J$ называют дифференцируемым в точке $t \in \in [t_0, T]$ [7], если для $\forall\, \alpha[0,1]$ многозначное отображение $z_\alpha(t)$ дифференцируемо по Хукухаре в точке $t$ с производной $D_H z_\alpha(t)$ и семейство $\{D_H z_\alpha(t) : \alpha \in [0,1]\}$ определяет некоторый элемент $\tilde{z}\,'(t)$, принадлежащий $J$. Элемент $\tilde{z}\,'(t)$ называют нечеткой производной от $\tilde{z}(t)$ в точке $t$.

По определению нечеткая производная $\tilde{z}\,'(t)$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{\Delta t \to 0} \rho \left( \frac{1}{\Delta t} \left( \tilde{z}(t + \Delta t) \overset{h}{-} \tilde{z}(t) \right), \tilde{z}\,'(t) \right) = 0,$$

где расстояние $\rho$ определяется формулой (3).

*У т в е р ж д е н и е 4* [7]. *Пусть отображение $\tilde{z} : [t_0, T] \to J$ дифференцируемо и нечеткая производная $\tilde{z}\,'(t)$ интегрируема по $[t_0, T]$. Тогда*

$$\tilde{z}(t) = \tilde{z}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \tilde{z}\,'(s) ds. \tag{8}$$

*У т в е р ж д е н и е 5* [11]. *Пусть нечеткий процесс $\tilde{z}(t)$ дифференцируем и $z_\alpha(t) = [z_\alpha^-(t), z_\alpha^+(t)]$ — его $\alpha$-интервал при любом $\alpha \in [0,1]$. Тогда функции $z_\alpha^-(t)$ и $z_\alpha^+(t)$ дифференцируемы по $t$ и $\alpha$-интервал производной $\tilde{z}\,'(t)$ имеет вид $[\tilde{z}\,'(t)]_\alpha = [(z_\alpha^-)'(t), (z_\alpha^+)'(t)]$.*

Утверждение 5 показывает связь рассмотренной выше производной с производной Сеиккала [8].

*Т е о р е м а 6. Среднее от производной дифференцируемого нечеткого процесса $\tilde{z}(t)$, производная которого $\tilde{z}\,'(t)$ интегрируема, совпадает с производной от среднего: $m(\tilde{z}\,'(t)) = \frac{d}{dt} m(\tilde{z}(t))$.*

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Возьмем среднее от левой и правой части формулы (8). Тогда

$$m(\tilde{z}(t)) = m(\tilde{z}(t_0)) + \int_{t_0}^{t} m(\tilde{z}\,'(s))\, ds.$$

Здесь воспользовались свойством аддитивности средних и теоремой 4. Продифференцируем обе части последнего равенства. Тогда, используя свойства интеграла с переменным верхним пределом, получим $\frac{d}{dt} m(\tilde{z}(t)) = = m(\tilde{z}\,'(t))$, т.е. утверждение теоремы 6.

*Т е о р е м а 7. Корреляционная функция производной $\tilde{z}\,'(t)$ дифференцируемого нечеткого процесса $\tilde{z}(t)$ вычисляется по формуле*

$$K_{\tilde{z}\,'}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 (K_{\tilde{z}}(t_1, t_2))}{\partial t_1 \partial t_2}.$$

*Доказательство.* Обозначим $\tilde{z}'(t) = \tilde{w}(t)$. Рассмотрим $\tilde{g}(t) = \int_{t_0}^{t} \tilde{w}(s)\,ds$. Согласно теореме 5 корреляционная функция $K_{\tilde{g}}(t_1, t_2)$ имеет вид

$$K_{\tilde{g}}(t_1, t_2) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\int_{t_0}^{t_1} w^+(\tau_1, \alpha) d\tau_1 - m(\tilde{w}(\tau_1))\right)\left(\int_{t_0}^{t_2} w^+(\tau_2, \alpha) d\tau_2 - m(\tilde{w}(\tau_2))\right) d\alpha +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\int_{t_0}^{t_1} w^-(\tau_1, \alpha) d\tau_1 - m(\tilde{w}(\tau_1))\right)\left(\int_{t_0}^{t_2} w^-(\tau_2, \alpha) d\tau_2 - m(\tilde{w}(\tau_2))\right) d\alpha.$$

Дифференцируя это равенство сначала по $t_1$, а затем по $t_2$, получаем

$$\frac{\partial^2 K_{\tilde{g}}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \big(w^+(\tau_1, \alpha) - m(\tilde{w}(\tau_1))\big)\big(w^+(\tau_2, \alpha) - m(\tilde{w}(\tau_2))\big)\, d\alpha +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^1 \big(w^-(\tau_1, \alpha) - m(\tilde{w}(\tau_1))\big)\big(w^-(\tau_2, \alpha) - m(\tilde{w}(\tau_2))\big)\, d\alpha.$$

Так что справедлива формула

$$\frac{\partial^2 K_{\tilde{g}}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = K_{\tilde{w}}(t_1, t_2). \tag{9}$$

Далее воспользуемся формулой (8). Обозначая $\tilde{z}(t_0) = \tilde{\xi}$, можем записать

$$\tilde{z}(t) = \tilde{\xi} + \int_{t_0}^{t} \tilde{w}(s)\,ds = \tilde{\xi} + \tilde{g}(t).$$

Полагая $\tilde{\eta}(t) = \tilde{\xi} + \tilde{g}(t)$ и используя формулу для подсчета корреляционной функции от суммы нечетких процессов, получим

$$K_{\tilde{z}}(t_1, t_2) = K_{\tilde{\eta}}(t_1, t_2) = K_{\tilde{\xi}}(t_1, t_2) + K_{\tilde{g}}(t_1, t_2) + K_{\xi g}(t_1, t_2) + K_{\xi g}(t_2, t_1).$$

Продифференцируем обе части этого равенства сначала по $t_1$, а затем по $t_2$. Тогда $\frac{\partial^2 K_{\tilde{z}}(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial^2 K_{\tilde{g}}(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}$. Остальные члены справа занулятся, поскольку $K_{\tilde{\xi}}$ не зависит от $t_1$, $t_2$ по определению, $K_{\xi g}(t_1, t_2)$ зависит только от $t_2$, а $K_{\xi g}(t_2, t_1)$ — только от $t_1$. Учитывая установленную выше формулу (9), получим равенство

$$\frac{\partial^2 K_{\tilde{z}}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = K_{\tilde{w}}(t_1, t_2) = K_{\tilde{z}'}(t_1, t_2),$$

что и доказывает теорему 7.

## 5. Преобразование непрерывного нечеткого процесса линейной динамической системой

Рассмотрим ситуацию, когда на вход некоторого устройства А поступает непрерывный нечеткий сигнал $\tilde{y}(t)$, а на выходе наблюдается непрерывный нечеткий сигнал $\tilde{z}(t)$.

Устройство А называют линейной динамической системой, если связь между входом и выходом описывается дифференциальным уравнением $n$-го порядка с постоянными коэффициентами. Если на входе и выходе наблюдаются нечеткие сигналы $\tilde{y}(t)$ и $\tilde{z}(t)$ соответственно, то линейная динамическая система описывается «нечетким» дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned} a_n\tilde{z}^{(n)}(t) + a_{n-1}\tilde{z}^{(n-1)}(t) + \dots + a_1\tilde{z}\,'(t) + a_0\tilde{z}(t) = \\ = b_k\tilde{y}^{(k)}(t) + b_{k-1}\tilde{y}^{(k-1)}(t) + \dots + b_1\tilde{y}\,'(t) + b_0\tilde{y}(t) \equiv \tilde{f}(t). \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь коэффициенты $a_i$ $(i = 0, \dots, n)$ и $b_i$ $(i = 0, \dots, k)$ — постоянные числа, производные второго порядка от нечеткой функции понимаются как $\tilde{z}\,''(t) = (\tilde{z}\,'(t))'$ и т.д. для последующих производных.

Связь между средними значениями входного и выходного нечетких сигналов характеризует

Лемма 1. *Среднее значение $z_{cp}(t) = m(\tilde{z}(t))$ нечеткого сигнала $\tilde{z}(t)$ на выходе динамической системы* (10) *удовлетворяет скалярному дифференциальному уравнению*

$$a_nx^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x = f(t), \tag{11}$$

*где через $f$ обозначено среднее от правой части* (10) $f(t) = m\tilde{f}(t)$.

Действительно, рассмотрим среднее от левой и правой частей равенства (10). Используя свойства аддитивности и однородности средних, а также теорему 6, получим

$$\begin{aligned} a_n(m\tilde{z}(t))^{(n)} + a_{n-1}(m\tilde{z}(t))^{(n-1)} + \dots + a_1(m\tilde{z}(t))' + a_0m\tilde{z}(t) = \\ = b_k(m\tilde{y}(t))^{(k)} + b_{k-1}(m\tilde{y}(t))^{(k-1)} + \dots + b_1(m\tilde{y}(t))' + b_0(m\tilde{y}(t)) \equiv m\tilde{f}(t). \end{aligned}$$

Тогда для скалярной функции $z_{cp}(t) = m(\tilde{z}(t))$ выполнено уравнение (11).

Утверждение 6 [16, гл. II]. *Пусть корни характеристического уравнения $a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$ не содержат точек мнимой оси. Тогда для любой непрерывной ограниченной на всей числовой оси функции $f(t)$ уравнение* (11) *имеет ограниченное на всей числовой оси решение, причем единственное. Оно дается формулой*

$$x(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t-s)f(s)\,ds, \tag{12}$$

*где $G(t)$ — функция Грина задачи об ограниченных решениях уравнения* (11).

Отметим, что общий вид функции Грина задачи об ограниченных решениях уравнения (11) известен (см., например, [17, гл. 1, § 8]).

*Замечание 1.* Пусть в условиях утверждения 6 все корни характеристического уравнения лежат в левой полуполоскости ($Re\lambda_i < 0$, $i = 1, \ldots, n$). Тогда ограниченное решение уравнения (11) асимптотически устойчиво по Ляпунову. При этом функция Грина задачи об ограниченных решениях уравнения (11) имеет вид

$$G(t) = \begin{cases} k(t) & \text{при } t \geqslant 0; \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases}$$

где $k(t)$ — функция Коши однородного уравнения, соответствующего (11).

*Теорема 8. Пусть входной нечеткий процесс $\tilde{y}(t)$ ограничен на всей числовой оси, а корни характеристического уравнения $a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$ не содержат точек мнимой оси. Тогда среднее значение $m(\tilde{z}(t))$ на выходе динамической системы* (10) *представимо в виде*

$$m(\tilde{z}(t)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t-s) m(\tilde{f}(s))\, ds, \tag{13}$$

*где $G$ — функция Грина задачи об ограниченных решениях уравнения* (11).

Действительно, в условиях теоремы 8 правая часть уравнения (11) — ограниченная на всей оси функция. Тогда согласно лемме 1 функция $z_{cp}(t) = m(\tilde{z}(t))$ является ограниченным на всей оси решением уравнения (11). Поэтому теорема 8 вытекает из утверждения 6.

Отметим, что ограниченность нечеткого процесса $\tilde{y}(t)$ в теореме 8 и ниже понимается как ограниченность по $t$ всех соответствующих $\alpha$-индексов $y_\alpha^\pm(t)$, $\forall\, \alpha \in [0, 1]$.

*Следствие 3. Пусть в условиях теоремы 8 на вход поступает «квазистационарный» сигнал, т.е. $m(y(t)) = m_{\tilde{y}} = \mathrm{const}$. Тогда на выходе также будет «квазистационарный» сигнал, причем его среднее значение равно $m(\tilde{z}(t)) = m_{\tilde{z}} = \frac{b_0}{a_0} m_{\tilde{y}}$.*

Действительно, поскольку производная любого порядка от постоянной равна нулю, то в этом случае правая часть уравнения (11) равна $b_0 m_{\tilde{y}}$. Тогда $m_{\tilde{z}}$ — решение соответствующего уравнения (11), а именно $a_0 m_{\tilde{z}} = b_0 m_{\tilde{y}}$. Других ограниченных решений уравнение (11) в условиях теоремы 8 не имеет.

Такой же вывод можно сделать, когда среднее значение нечеткого входного сигнала стабилизируется с течением времени, т.е. $m(y(t)) \to m_{\tilde{y}}$ при $t \to \infty$.

В некоторых случаях удается выписать индексы нечеткого сигнала на выходе динамической системы (10) в явном виде.

*Теорема 9. Пусть выполнены условия теоремы 8 и дополнительно все коэффициенты динамической системы* (10) *положительны* ($a_i > 0$,

$i = 0, \ldots, n$). *Тогда индексы нечеткого сигнала* $\tilde{z}(t)$ *на выходе динамической системы* (10) *имеют вид*

$$(14) \qquad z_\alpha^-(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t-s) f_\alpha^-(s)\, ds, \quad z_\alpha^+(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t-s) f_\alpha^+(s)\, ds,$$

*где* $f_\alpha^\pm(s)$ — *индексы функции* $\tilde{f}(s)$.

Действительно, поскольку равенство нечетких чисел означает равенство всех соответствующих $\alpha$-интервалов, то согласно правилам интервальной арифметики с учетом положительности коэффициентов $a_i$ и в силу теоремы 6 получим, что уравнение (10) влечет при $\forall\, \alpha \in [0, 1]$ выполнение равенства

$$(15) \qquad a_n (z_\alpha^-)^{(n)}(t) + a_{n-1} (z_\alpha^-)^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 (z_\alpha^-)'(t) + a_0 z_\alpha^-(t) = f_\alpha^-(t)$$

и аналогично для индексов с плюсом

$$(16) \qquad a_n (z_\alpha^+)^{(n)}(t) + a_{n-1} (z_\alpha^+)^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 (z_\alpha^+)'(t) + a_0 z_\alpha^+(t) = f_\alpha^+(t).$$

Согласно (15) и (16) в силу утверждения 6 выполнены равенства (14).

*Утверждение 7. Пусть выполнены условия теоремы 9 и дополнительно функция Грина* $G$ *задачи* (10) *неотрицательна. Тогда для нечеткого ограниченного сигнала на выходе динамической системы* (10) *справедливо представление*

$$(17) \qquad \tilde{z}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t-s) \tilde{f}(s)\, ds.$$

Действительно, согласно определению интеграла от нечеткой функции имеют место соотношения для индексов

$$\left( \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t-s) \tilde{f}(s)\, ds \right)_\alpha^- = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t-s) f_\alpha^-(s)\, ds,$$

$$\left( \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t-s) \tilde{f}(s)\, ds \right)_\alpha^+ = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t-s) \tilde{f}_\alpha^+(s)\, ds,$$

которые в силу (14) влекут представление (17).

*Теорема 10. Пусть выполнены условия теоремы 9 и дополнительно вещественные части всех корней характеристического уравнения отрицательны* ($Re\lambda_i < 0$, $i = 1, \ldots, n$). *Тогда корреляционная функция* $K_{\tilde{z}}(t_1, t_2)$

*нечеткого сигнала $\tilde{z}(t)$ на выходе динамической системы* (10) *определяется формулой*

$$K_{\tilde{z}}(t_1,t_2) = \int\limits_{-\infty}^{t_1}\int\limits_{-\infty}^{t_2} G(t_1-\tau_1)G(t_2-\tau_2)K_{\tilde{f}}(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2, \tag{18}$$

*где $K_{\tilde{f}}(\tau_1,\tau_2)$ — корреляционная функция входного сигнала $\tilde{f}=\sum_{i=1}^{n} b_i\tilde{y}^{(i)}$, а $G$ — функция Грина задачи об ограниченных решениях уравнения* (11).

*Доказательство.* По определению (7) и в силу (13), (14) с учетом замечания 1 имеем

$$K_{\tilde{z}}(t_1,t_2) =$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left[\left(\int\limits_{-\infty}^{t_1} G(t_1-s)(f_\alpha^+(s)-m(\tilde{f}(s)))ds\right)\left(\int\limits_{-\infty}^{t_2} G(t_2-s)(f_\alpha^+(s)-m(\tilde{f}(s)))ds\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\int\limits_{-\infty}^{t_1} G(t_1-s)(f_\alpha^-(s)-m(\tilde{f}(s)))ds\right)\left(\int\limits_{-\infty}^{t_2} G(t_2-s)(f_\alpha^-(s)-m(\tilde{f}(s)))ds\right)\right]d\alpha =$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1\int\limits_{-\infty}^{t_1}\int\limits_{-\infty}^{t_2} G(t_1-\tau_1)G(t_2-\tau_2)\Big[(f_\alpha^+(\tau_1)-m(\tilde{f}(\tau_1)))(f_\alpha^+(\tau_2)-m(\tilde{f}(\tau_2)))+$$
$$+(f_\alpha^-(\tau_1)-m(\tilde{f}(\tau_1)))(f_\alpha^-(\tau_2)-m(\tilde{f}(\tau_2)))\Big]d\tau_1 d\tau_2 d\alpha.$$

Меняя здесь порядок интегрирования, получим

$$K_{\tilde{z}}(t_1,t_2) =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{t_1}\int\limits_{-\infty}^{t_2} G(t_1-\tau_1)G(t_2-\tau_2)\left(\frac{1}{2}\int\limits_0^1 (f_\alpha^-(\tau_1)-m(\tilde{f}(\tau_1)))(f_\alpha^-(\tau_2)-m(\tilde{f}(\tau_2)))+\right.$$
$$\left.+(f_\alpha^+(\tau_1)-m(\tilde{f}(\tau_1)))(f_\alpha^+(\tau_2)-m(\hat{f}(\tau_2)))d\alpha\right)d\tau_1 d\tau_2.$$

Отсюда следует формула (18).

Отметим, что предположение $Re\lambda_i<0$, $i=1,\ldots,n$ в теореме 10 служит лишь для наглядности в сравнении с теоремой 5. Без этого предположения формула (18) принимает вид

$$K_{\tilde{z}}(t_1,t_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t_1-\tau_1)G(t_2-\tau_2)K_{\tilde{f}}(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2.$$

*Пример 3.* На вход линейной динамической системы, описываемой дифференциальным уравнением первого порядка с постоянными коэффициентами

$$\tilde{z}'(t) + \beta\tilde{z}(t) = \tilde{y}'(t), \quad \beta > 0$$

поступает нечеткий ограниченный на всей числовой оси сигнал $\tilde{y}'(t)$.

Укажем характеристики выходного нечеткого сигнала. Заметим, что функция Грина задачи об ограниченных решениях скалярного уравнения $x' + \beta x = y(t)$ представима формулой

$$G_1(t) = \begin{cases} e^{-\beta t} & \text{при } t \geqslant 0; \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Тогда согласно теореме 8 среднее значение на выходе имеет вид

$$m(\tilde{z}(t)) = \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\beta(t-s)} m(\tilde{y}'(s))ds = e^{-\beta t} \int\limits_{-\infty}^{t} e^{\beta s} m(\tilde{y}(s))' ds.$$

Взяв интеграл справа по частям, получим

$$m(\tilde{z}(t)) = m(\tilde{y}(t)) - \beta e^{-\beta t} \int\limits_{-\infty}^{t} e^{\beta s} m(\tilde{y}(s))ds.$$

Для корреляционной функции на выходе $K_{\tilde{z}}(t_1, t_2)$ согласно теореме 10 и свойству 2 из теоремы 2 можем записать

$$K_{\tilde{z}}(t_1, t_2) = e^{-\beta(t_1+t_2)} \int\limits_{-\infty}^{t_1} \int\limits_{-\infty}^{t_2} e^{\beta(\tau_1+\tau_2)} \frac{\partial^2 K_{\tilde{y}}(\tau_1, \tau_2)}{\partial\tau_1 \partial\tau_2} d\tau_1 d\tau_2,$$

где $K_{\tilde{y}}(\tau_1, \tau_2)$ — корреляционная функция входного сигнала.

*Пример 4.* На вход линейной динамической системы, описываемой дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\tilde{z}''(t) + a_1\tilde{z}'(t) + a_0\tilde{z}(t) = \tilde{y}(t),$$

поступает непрерывный нечеткий ограниченный на всей числовой оси сигнал $\tilde{y}(t)$. Укажем характеристики выходного нечеткого сигнала $\tilde{z}(t)$.

Пусть коэффициенты данного уравнения удовлетворяют условиям $a_1, a_0 > 0$ и $a_1^2 - 4a_0 > 0$. Тогда корни $\lambda_1$, $\lambda_2$ характеристического уравнения $\lambda^2 + a_1\lambda + {} + a_0 = 0$ вещественны и различны, причем $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. В этом случае функция Грина $G_2$ задачи об ограниченных решениях для уравнения $a_2x'' + a_1x' = {} + a_0x = f(t)$ имеет вид

$$G_2(t) = \begin{cases} (e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t})(\lambda_2 - \lambda_1)^{-1} & \text{при } t \geqslant 0; \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Тогда в соответствии с теоремами 8, 10 для нечеткого сигнала $\tilde{z}(t)$ на выходе справедливы соотношения

$$m(\tilde{z}(t)) = \int\limits_{-\infty}^{t} G_2(t-s)m(\tilde{y}(s))ds,$$

$$K_{\tilde{z}}(t_1,t_2) = \int\limits_{-\infty}^{t_1}\int\limits_{-\infty}^{t_2} G_2(t_1-\tau_1)G_2(t_2-\tau_2)K_{\tilde{y}}(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2.$$

Заметим, что функции Грина $G_1$ и $G_2$ примеров 3, 4 неотрицательны, так что в условиях примеров 3, 4 справедливо представление (17).

*Пример 5.* На вход линейной динамической системы, описываемой дифференциальным уравнением третьего порядка с постоянными коэффициентами

$$\tilde{z}'''(t) + a_2\tilde{z}''(t) + a_1\tilde{z}''(t) + a_0\tilde{z}(t) = \tilde{y}(t),$$

поступает непрерывный нечеткий ограниченный на всей числовой оси сигнал $\tilde{y}(t)$. Укажем характеристики выходного нечеткого сигнала $\tilde{z}(t)$.

Предположим, что $a_2 > 0$, $a_1 > 0$, $a_0 > 0$ и $a_2a_1 - a_0 > 0$. Тогда согласно критерию Гурвица для характеристических чисел уравнения $\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1 + a_0 = 0$ выполнены условия $Re\lambda_i < 0$ $(i = 1,2,3)$. Поэтому в соответствии с теоремами 8, 10 для выходного нечеткого сигнала $\tilde{z}(t)$ справедливы следующие соотношения

$$m(\tilde{z}(t)) = \int\limits_{-\infty}^{t} G_3(t-s)m(\tilde{y}(s))ds,$$

$$K_{\tilde{z}}(t_1,t_2) = \int\limits_{-\infty}^{t_1}\int\limits_{-\infty}^{t_2} G_3(t_1-\tau_1)G_3(t_2-\tau_2)K_{\tilde{y}}(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2.$$

Здесь $G_3(t)$ — функция Грина задачи об ограниченных решениях для уравнения

$$x'''(t) + a_2x''(t) + a_1x'(t) + a_0x(t) = f(t),$$

определяемая равенством $G_3(t) = \begin{cases} k(t) & \text{при } t \geqslant 0; \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases}$ (см., например, [17, гл. 2, § 8], где $k(t)$ — функция Коши, определяемая как решение однородного уравнения

$$k'''(t) + a_2k''(t) + a_1k'(t) + a_0k(t) = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$k(0) = k'(0) = 0, \quad k''(0) = 1.$$

Например, в случае различных корней характеристического уравнения функция Коши определяется формулой

$$k(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 e^{\lambda_3 t},$$

где

$$C_1 = \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)},\ C_2 = \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_1)},\ C_3 = \frac{1}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}.$$

## 6. Заключение

Результаты разделов 3, 4 данной работы о свойствах числовых характеристик нечетких процессов аналогичны известным результатам для непрерывных случайных процессов. Однако, несмотря на их значимость, они ранее не отмечались.

Основные результаты данной работы относятся к «нечетким» динамическим системам, описываемым линейными дифференциальными уравнениями $n$-го порядка в предположении ограниченности входного нечеткого сигнала (раздел 5). Они опираются на установленные свойства средних и корреляционных функций непрерывных нечетких процессов (разделы 3, 4), а также на развитие метода функции Грина на случай нечетких дифференциальных уравнений.

Изложенный здесь подход является альтернативой стандартному подходу к исследованию линейных динамических систем с постоянными коэффициентами, связанному с частотной характеристикой, прямым и обратным преобразованием Фурье. В отличие от известных подходов он не предполагает стационарности (в каком-либо смысле) рассматриваемых процессов. Отметим, что данный подход допускает развитие для непрерывных процессов с нечеткими случайными состояниями.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория случайных процессов и их инженерные приложения. М.: Кнорус, 2016. 439 с.
2. *Аверкин А.Н.* Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта. М.: Наука, 1986.
3. *Buckley J.J., Eslami E., Feuring T.* Fuzzy mathematics in economic and engineering. Heidelberg, N.Y.: Physica-Verl., 2002.
4. *Пегат А.* Нечеткое моделирование и управление. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015.
5. *Aumann R.J.* Integrals of set-valued functions // J. Math. Anal. Appl. No. 12. 1965. P. 1–12.
6. *Puri M.L., Ralescu D.A.* Differential of fuzzy functions // J. Math. Anal. Appl. 91. 1983. P. 552–558.
7. *Kaleva O.* Fuzzy differential equations // Fuzzy sets and systems. V. 24. No. 3. 1987. P. 301–317.

8. *Seikkala S.* On the fuzzy initial value problem // Fuzzy Sets and Systems. 24 (No. 3). 1987. P. 319–330.
9. *Hukuhara M.* Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe // Func. Ekvacioj. No. 11. 1967. P. 205–223.
10. *Khatskevich V.L.* Means, quasi-scalar product and covariance of fuzzy numbers. Journal of Physics: Conference Series. 2021, 1902(1), 012136.
11. *Jong Yeoul Park, Han H.* Existence and uniqueness theorem for a solution of fuzzy differential equations // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 1996. P. 271–280.
12. *Ahmad L., Farooq M., Abdullah S.* Solving nth order fuzzy differential equation by fuzzy Laplace transform // Ind. J. Pure Appl. Math. 2014.
13. *Мочалов И.А., Хрисат М.С., Шихаб Еддин М.Я.* Нечеткие дифференциальные уравнения в задачах управления. Часть II. М.: Информационные технологии, т. 21, № 4. 2015.
14. *Деменков Н.П., Микрин Е.А., Мочалов И.А.* Нечеткое оптимальное управление линейными системами. Часть 1. Позиционное управление. Информационные технологии. Т. 25, № 5. 2019.
15. *Esmi E., Sanchez D.E., Wasques V.F., de Barros L.C.* Solutions of higher order linear fuzzy differential equations with interactive fuzzy values // Fuzzy Sets and Systems. V. 419. 2021. P. 122–140.
16. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
17. *Красносельский М.А., Бурд В.Ш., Колесов Ю.С.* Нелинейные почти периодические колебания. М.: Наука, 1970. 351 с.
18. *Dubois D., Prade H.* The mean value of fuzzy number // Fuzzy sets and systems. 1987. P. 279–300.
19. *Kaleva O., Seikkala S.* On fuzzy metric spaces // Fuzzy Sets and Systems. V. 12. 1984. P. 215–229.
20. *Fuller R., Majlender P.* On weighted possibilistic mean value and variance of fuzzy numbers // Fuzzy sets and systems. V. 136. 2003. P. 363–374.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии Д.В. Виноградовым.*

Поступила в редакцию 25.02.2022

После доработки 03.04.2023

Принята к публикации 09.06.2023