Автоматика и телемеханика, № 8, 2023

Стохастические системы

© 2023 г. **С.В. ИВАНОВ, д-р физ.-мат. наук (sergeyivanov89@mail.ru),**
А.И. КИБЗУН, д-р физ.-мат. наук (kibzun@mail.ru),
В.Н. АКМАЕВА (akmaeva@mail.ru)
(Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет))

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ ПОИСКА ГАРАНТИРУЮЩЕГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КВАНТИЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ[1]

Исследуется задача стохастического программирования с квантильным критерием для нормального распределения в случае кусочно-линейной по случайным параметрам и выпуклой по стратегии функции потерь. С помощью доверительного метода исходная задача аппроксимируется детерминированной минимаксной задачей, параметризованной радиусом шара, вписанного в доверительное многогранное множество. Аппроксимирующая задача сводится к задаче выпуклого программирования. Исследуются свойства меры доверительного множества при изменении радиуса шара. Предлагается алгоритм поиска радиуса шара, обеспечивающего гарантирующее решение задачи. Описан способ получения нижней оценки оптимального значения критериальной функции. Доказаны теоремы о сходимости алгоритма с любой наперед заданной вероятностью и о точности получаемого решения.

Ключевые слова: стохастическое программирование, квантильный критерий, доверительный метод, квантильная оптимизация, гарантирующее решение.

DOI: 10.31857/S0005231023080056, **EDN:** HBFTOO

1. Введение

Задачи стохастического программирования с квантильным критерием представляют собой задачи оптимизации, в которых ищется точка минимума квантили функции потерь, зависящей от стратегии оптимизации и случайных параметров. Подобные задачи возникают при моделировании технических и экономических систем, в которых большую роль играют требования к надежности принимаемого решения. Функция квантили описывает уровень потерь, который не может быть превышен с заданной фиксированной вероятностью, как правило, близкой к единице. Задачам данного класса посвящены монографии [1, 2].

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-21-00213, https://rscf.ru/project/22-21-00213/).

Эффективным способом решения задачи минимизации функции квантили является доверительный метод [1, 2]. Суть этого метода состоит в том, что исходная задача квантильной оптимизации аппроксимируется минимаксной задачей. В этой задаче сначала рассматривается максимум целевой функции на некотором множестве значений случайных параметров (доверительном множестве) как функция доверительного множества и стратегии оптимизации. Затем ищется минимум полученной функции максимума по стратегии оптимизации и доверительному множеству. Выбор оптимального доверительного множества представляет собой непростую задачу. Однако при правильно подобранном фиксированном доверительном множестве можно получить достаточно точную верхнюю оценку функции квантили. В частности, показано [2], что для гауссовского распределения случайных факторов выбор доверительного множества в форме шара при больших значениях уровня надежности обеспечивает высокую точность получаемой оценки. В данной статье рассматриваются функции потерь, которые представлены как максимум конечного числа линейных (по случайным параметрам) функций. Для этого класса функций потерь оптимальным доверительным множеством является многогранник. В связи с этим оценку на шаре можно улучшить, проведя дополнительную оптимизацию по классу доверительных множеств в форме многогранников, параметризованных радиусом вписанного шара. Эта идея была реализована для гауссовского распределения в [3]. В [4] данный алгоритм был распространен на случай произвольного распределения случайных факторов, а также предложен алгоритм дальнейшего улучшения гарантирующего решения за счет переноса граней доверительного выпуклого многогранного множества при сохранении его вероятностной меры. Следует отметить, что в [3, 4] функция потерь предполагалась линейной по стратегии оптимизации. Это позволило свести аппроксимирующую минимаксную задачу к задаче линейного программирования.

Особенностью получаемой при применении алгоритмов [3, 4] аппроксимирующей задачи является тот факт, что в случае гауссовского распределения с ее помощью можно получить не только верхнюю, но и нижнюю оценку оптимального значения функции квантили. Для этого нужно в аппроксимирующей задаче вместо доверительного множества взять ядро вероятностной меры [2], представляющее собой в случае стандартного гауссовского распределения шар радиуса, вычисляемого как квантиль стандартного нормального распределения такого же уровня, как и у функции квантили. Следует отметить, что ядро вероятностной меры не является доверительным множеством.

Отдельный интерес представляет случай линейной по случайным параметрам функции потерь. В [1] доказано, что в условиях регулярности ядра функция квантили может быть вычислена как максимум по случайным параметрам функции потерь на ядре. В дальнейшем условия регулярности ядра были ослаблены в [5]. Указанное свойство ядра использовалось в [6] для построения алгоритма решения задачи стохастического программирования с квантильным критерием и билинейной функцией потерь, а также в [7] для аппроксимации вероятностных ограничений.

Задачи стохастического программирования с квантильным критерием являются частным случаем задач с вероятностными ограничениями [8, 9]. Обзор методов решения задач с вероятностными ограничениями можно найти в [10]. В частности, следует отметить подход, основанный на использовании p-эффективных точек [11, 12]. Однако задачи с квантильным критерием обладают рядом свойств, не свойственным задачам с произвольными вероятностными ограничениями, что позволяет использовать специальные методы анализа, в частности доверительный метод. Задачи с квантильным критерием и дополнительными вероятностными ограничениями подробно изучались в [1].

В данной статье рассматривается задача стохастического программирования с кусочно-линейной по случайным параметрам и выпуклой по стратегии оптимизации функцией потерь, что позволяет аппроксимировать изучаемую задачу задачей выпуклого программирования. Для этой задачи разрабатывается алгоритм, основанный на идеях построения алгоритмов в [3, 4] для кусочно-линейных задач. Даются оценки точности предлагаемого алгоритма.

2. Постановка задачи

Пусть X — случайный вектор (столбец) с реализациями $x \in \mathbb{R}^m$, заданный на вероятностом пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Предполагается, что распределение X является стандартным нормальным. Будем считать, что функция потерь Φ является кусочно-линейной по случайным параметрам:

$$\Phi(u,x) \triangleq \max_{i=\overline{1,k_1}} \{B_{1i}(u)x + b_{1i}(u)\}.$$

Ограничения в задаче описываются функцией

$$Q(u,x) \triangleq \max_{j=\overline{1,k_2}} \{B_{2j}(u)x + b_{2j}(u)\},$$

где $u \in U \subset \mathbb{R}^n$ — стратегия; $B_{1i}(u)$, $B_{2j}(u)$ — строки матриц $B_1(u)$, $B_2(u)$ соответственно, $b_{1j}(u)$, $i = \overline{1,k_1}$, и $b_{2j}(u)$, $j = \overline{1,k_2}$, — элементы векторов (столбцов) $b_1(u)$ и $b_2(u)$ соответственно. В данной статье предполагается, что функции $u \mapsto B_1(u)$, $u \mapsto B_2(u)$ являются линейными (т.е. $B_l(u) = D_l u + a_l$, где D_l — матрица, a_l — вектор, $l \in \{1,2\}$), а функции $u \mapsto b_1(u)$, $u \mapsto b_2(u)$ — выпуклыми и непрерывными на выпуклом замкнутом множестве U. Отметим, что линейное преобразование случайного вектора X не изменяет структуры функций Φ и Q. Кроме того, любой нормальный вектор может быть получен за счет линейного преобразования вектора X подходящей размерности. По этим причинам случай произвольного нормального распределения вектора X сводится к рассматриваемому.

Определим функцию вероятности

$$P_\varphi(u) \triangleq \mathbf{P}\{\Phi(u,X) \leqslant \varphi, \quad Q(u,X) \leqslant 0\},$$

где $\varphi \in \mathbb{R}$ — заданное значение функции потерь, и функцию квантили

$$\Phi_\alpha(u) \triangleq \min\{\varphi \mid P_\varphi(u) \geqslant \alpha\}, \quad \alpha \in (0, P^*),$$

где

$$P^* \triangleq \sup_{u \in U} \mathbf{P}\{Q(u,X) \leqslant 0\}.$$

В статье рассматривается задача квантильной оптимизации

$$U_\alpha \triangleq \mathrm{Arg}\min_{u \in U} \Phi_\alpha(u). \tag{1}$$

Поскольку функции Φ и Q являются непрерывными и измеримыми, согласно результату [13, теорема 6], являющемуся обобщением аналогичного результата в [1], функция $u \mapsto \Phi_\alpha(u)$ является полунепрерывной снизу. Поэтому решение задачи (1) существует, если множество U компактное. Определим оптимальное значение критериальной функции

$$\varphi_\alpha \triangleq \Phi_\alpha(u_\alpha),$$

где $u_\alpha \in U_\alpha$. В дальнейшем будем предполагать, что решение задачи (1) существует. При этом ограниченность множества U, вообще говоря, не требуется.

3. Построение оценок решения

Согласно доверительному методу [1] задача (1) эквивалентна задаче

$$\varphi_\alpha = \min_{S \in \mathcal{E}_\alpha, u \in U} \left\{ \sup_{x \in S} \Phi(u,x) \mid \sup_{x \in S} Q(u,x) \leqslant 0 \right\}, \tag{2}$$

где $\mathcal{E}_\alpha$ — семейство всех доверительных множеств $S \subset \mathbb{R}^m$ уровня α, т.е. борелевских множеств таких, что $\mathbf{P}\{X \in S\} \geqslant \alpha$.

Обозначим через B_r шар радиуса r:

$$B_r \triangleq \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| \leqslant r\},$$

где $\|x\| \triangleq \sqrt{x^\top x}$ — евклидова норма вектора x.

Рассмотрим задачу, аналогичную задаче (2), в которой зафиксировано множество $S = B_r$:

$$\psi(r) \triangleq \min_{u \in U} \left\{ \max_{x \in B_r} \Phi(u,x) \mid \max_{x \in B_r} Q(u,x) \leqslant 0 \right\}. \tag{3}$$

Будем предполагать, что минимум по u в задаче (3) достигается, что выполнено, например, в случае компактного множества U. В задаче (3) супремум заменен на максимум, поскольку

$$\max_{x \in B_r} \Phi(u,x) = \max_{x \in B_r} \max_{i=\overline{1,k_1}} \{B_{1i}(u)x + b_{1i}(u)\} =$$
$$= \max_{i=\overline{1,k_1}} \max_{x \in B_r} \{B_{1i}(u)x + b_{1i}(u)\} = \max_{i=\overline{1,k_1}} \{b_{1i}(u) + \|B_{1i}(u)\|r\}.$$

Аналогичным образом находится $\max_{x \in B_r} Q(u,x)$. Таким образом, задача (3) может быть переписана в виде

$$(4)\quad \psi(r) = \min_{u \in U} \left\{ \max_{i=\overline{1,k_1}} \{b_{1i}(u) + \|B_{1i}(u)\|r\} \mid \max_{j=\overline{1,k_2}} \{b_{2j}(u) + \|B_{2j}(u)\|r\} \leqslant 0 \right\}.$$

Если ограничения этой задачи несовместны, будем считать, что $\psi(r) = +\infty$. Из монотонного неубывания целевой функции и сужения множества допустимых стратегий при увеличении r следует, что функция ψ является неубывающей. Задача (4) эквивалентна задаче выпуклого программирования

$$(5)\qquad \varphi \to \min_{u \in U,\, \varphi \in \mathbb{R}}$$

при ограничениях

$$b_{1i}(u) + \|B_{1i}(u)\|r \leqslant \varphi, \quad i = \overline{1,k_1},$$
$$b_{2j}(u) + \|B_{2j}(u)\|r \leqslant 0, \quad j = \overline{1,k_2}.$$

Эквивалентность здесь понимается в том смысле, что оптимальное значение переменной φ совпадает с $\psi(r)$, а множества допустимых значений u совпадают. Общее число ограничений этой задачи обозначим через $k = k_1 + k_2$. Задача (5) может быть решена с высокой точностью с помощью методов выпуклой оптимизации [14].

Пусть R_α — шар вероятностной меры α, т.е. решение уравнения

$$\mathbf{P}\{X \in B_{R_\alpha}\} = \alpha.$$

Зафиксируем в задаче (2) доверительное множество S в форме шара B_{R_α}. Тогда в силу (2) $\psi(R_\alpha) \geqslant \varphi_\alpha$. Таким образом, может быть найдена верхняя оценка функции квантили.

Для поиска нижней оценки может быть использовано ядро вероятностной меры, определяемое как пересечение всех замкнутых полупространств A таких, что $\mathbf{P}\{X \in A\} = \alpha$. Известно, что при $\alpha > \frac{1}{2}$ ядро распределения стандартного нормального гауссовского вектора является шаром радиуса ρ_α с центром в нуле, где ρ_α — квантиль стандартного нормального распределения уровня α. В [1, раздел 3.4.3, следствие 2] показано, что $\psi(\rho_\alpha) \leqslant \varphi_\alpha$, когда X распределен стандартно нормально.

Таким образом, получена оценка

$$\psi(\rho_\alpha) \leqslant \varphi_\alpha \leqslant \psi(R_\alpha). \tag{6}$$

Верхнюю оценку $\psi(R_\alpha)$ можно улучшить. Пусть $(u(r), \psi(r))$ — некоторое решение задачи (5). Определим множество

$$\begin{aligned} C_r \triangleq \Big\{x \in \mathbb{R}^m \mid \Phi(u(r), x) \leqslant \psi(r),\ Q(u(r), x) \leqslant 0\Big\} = \\ = \Big\{x \in \mathbb{R}^m \mid B_{1i}(u(r))x + b_{1i}(u(r)) \leqslant \psi(r), \\ B_{2j}(u(r))x + b_{2j}(u(r)) \leqslant 0,\ i = \overline{1, k_1},\ j = \overline{1, k_2}\Big\}. \end{aligned} \tag{7}$$

Введем обозначение $h(r) \triangleq \mathbf{P}\{X \in C_r\}$ для вероятностной меры множества C_r. Отметим, что $h(r)$ и C_r зависят от выбора $u(r)$. Поэтому в дальнейшем выбор $u(r)$ считается зафиксированным.

Так как

$$\max_{x \in B_r} \Phi(u(r), x) = \psi(r), \quad \max_{x \in B_r} Q(u(r), x) \leqslant 0, \tag{8}$$

справедливо включение $B_r \subset C_r$. Кроме того,

$$\max_{x \in B_r} \Phi(u(r), x) = \max_{x \in C_r} \Phi(u(r), x), \quad \max_{x \in C_r} Q(u(r), x) \leqslant 0. \tag{9}$$

Из (8) и (9) следует, что если $h(r) \geqslant \alpha$, то множество C_r является доверительным и $\psi(r) \geqslant \varphi_\alpha$.

Из монотонности ψ следует, что верхнюю оценку функции квантили можно улучшить, найдя r, близкое к $r^* \triangleq \inf\{r \mid h(r) \geqslant \alpha\}$, такое что $h(r) \geqslant \alpha$. Если функция $r \mapsto h(r)$ является монотонной, то для поиска r^* может быть применен метод дихотомии. К сожалению, функция h может оказаться немонотонной, что демонстрирует следующий пример.

Пример 1. Пусть функция потерь имеет вид

$$\Phi(u, x) = \max\{u + 4x, -u + 2x + 2, -11u - 4x\},$$

$u \in \mathbb{R}$, x — реализация случайной величины $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, $\sigma^2 = \frac{1}{9}$.

Как нетрудно проверить, задача (5) имеет решение

$$\begin{gathered} u(r) = 1 - r, \ \ \psi(r) = 1 + 3r \ \text{ при } \ r \in [0, 1]; \\ u(r) = 0, \ \ \psi(r) = 4r \ \text{ при } \ r \in [1, +\infty). \end{gathered}$$

Поэтому

$$C_r = \{x \mid \Phi(u(r), x) \leqslant \psi(r)\} = \begin{cases} [-3 + 2r, r], & \text{если } r \in [0, 1], \\ [-r, r], & \text{если } r \in [1, +\infty). \end{cases}$$

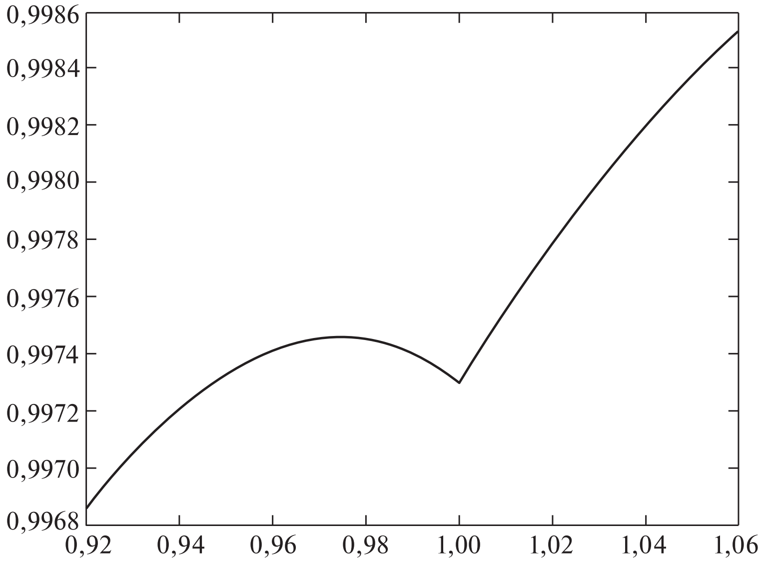

График зависимости $h(r) = \mathbf{P}\{X \in C_r\}$ от r.

Вычислим меру множества C_r при $r \in [0, 1]$:

$$h(r) = \mathbf{P}\{X \in C_r\} = \int\limits_{-3+2r}^{r} \frac{3}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{3x^2}{2}}\, dx.$$

Вычислим производную полученной функции:

$$\frac{dh}{dr}(r) = \frac{3}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{3r^2}{2}} - 2\frac{3}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{3(2r-3)^2}{2}}.$$

Вычислим левосторонний предел

$$\lim_{r \to 1-} \frac{dh}{dr}(r) = -\frac{3}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{3}{2}} < 0.$$

Это значит, что на некотором интервале $(1 - \varepsilon, 1)$, где $\varepsilon > 0$, функция h убывает. При этом $h(1) \approx 0{,}9973$. График зависимости $h(r)$ изображен на рисунке.

Как видно из приведенного примера, функция h может оказаться немонотонной. В связи с этим предложим достаточные условия, обеспечивающие монотонность функции h.

Т е о р е м а 1. *Пусть $U = \mathbb{R}^n$ и выполнены условия:*

1) $b_{1i}(u) = A_{1i}u + c_{1i}$, A_{1i} *— строки матрицы* A_1, $b_{2j}(u) = A_{2j}u + c_{2j}$, A_{2j} *— строки матрицы* A_2, *матрицы* $B_1(u)$ *и* $B_2(u)$ *не зависят от* u;

2) *строки блочной матрицы*

$$\begin{pmatrix} A_1 & e_{k_1} \\ A_2 & 0_{k_2} \end{pmatrix}$$

Таблица 1. Зависимость R_α от m

$\alpha \setminus m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	50
0,95	1,96	2,45	2,80	3,08	3,32	3,55	3,75	3,94	4,11	4,28	8,22
0,99	2,58	3,03	3,37	3,64	3,88	4,10	4,30	4,48	4,65	4,82	8,73

Таблица 2. Зависимость ρ_β от k

$\alpha \setminus k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	50
0,95	1,64	1,96	2,13	2,24	2,33	2,39	2,45	2,50	2,54	2,58	3,09
0,99	2,33	2,58	2,71	2,81	2,88	2,93	2,98	3,02	3,06	3,09	3,54

являются линейно независимыми, где e_{k_1}, 0_{k_2} *— столбцы из единиц и нулей соответственно (если* $Q(u,x) \equiv 0$*, то в приведенной выше матрице строки, соответствующие* A_2*, отсутствуют);*

3) *при некотором* $r = R$ *решение задачи* (5) *существует.*

Тогда функция h *является неубывающей на отрезке* $[0, R]$.

Доказательство теоремы 1 и всех последующих теорем вынесены в Приложение.

Отметим, что в теореме 1 множество U не является компактным. К сожалению, более общие условия монотонности функции h предложить затруднительно, так как монотонность меры может быть гарантирована только в предположении расширения множества C_r при увеличении r. Однако гарантировать можно только удаление от начала координат граней, касающихся шара B_r. Остальные грани могут как удаляться, так и приближаться к началу координат.

В связи с немонотонностью функции h необходимо по возможности максимально точно указать интервал, в котором необходимо искать r^*. Для этого получим следующий результат.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $k = k_1 + k_2$. *Неравенство* $h(r) \geqslant \alpha$ *выполнено, если* $r \geqslant \rho_\beta$ *и множество* C_r *определено, где* ρ_β *— квантиль стандартного нормального распределения уровня* $\beta = 1 - \frac{1-\alpha}{k}$.

Из теоремы 2 и неравенства (6) следует, что

$$\psi(\rho_\alpha) \leqslant \varphi_\alpha \leqslant \min\{\psi(R_\alpha), \psi(\rho_\beta)\} = \psi\left(\min\{R_\alpha, \rho_\beta\}\right). \tag{10}$$

Из определения доверительного шара следует, что $R_\alpha = \sqrt{\chi^2_\alpha(m)}$, где $\chi^2_\alpha(m)$ — квантиль распределения хи-квадрат с m степенями свободы. В отличие от R_α величина ρ_β не зависит от размерности случайного вектора, а зависит только от числа ограничений k. Известно [2], что $R_\alpha - \rho_\alpha \to 0$ при $\alpha \to 1$, но скорость сходимости зависит от размерности n. Нетрудно заметить, что $\rho_\beta \to +\infty$ при $k \to 1$. Однако оказывается, что при небольших значениях k может быть выполнено неравенство $\rho_\beta < R_\alpha$. Зависимость R_α от m приведена в табл. 1, а зависимость ρ_β от k — в табл. 2. Рассматриваются уровни $\alpha = 0{,}95$

и $\alpha = 0{,}99$. Пусть, например, $m = 8$, $\alpha = 0{,}95$. Тогда $R_\alpha = 3{,}94$, а $\rho_\beta < R_\alpha$ даже при $k = 50$.

Заметим, что при $k = 1$ выполнено равенство $\rho_\beta = \rho_\alpha$. Поэтому $\varphi_\alpha = \psi(\rho_\alpha)$, а оптимальная стратегия u_α может быть найдена из задачи (5) при $r = \rho_\alpha$, что согласуется с известным результатом [5].

4. Алгоритм поиска гарантирующего решения

Стратегию $u \in U$, удовлетворяющую соотношению $\varphi_\alpha(u) \leqslant \psi(\min\{R_\alpha, \rho_\beta\})$, будем называть гарантирующим решением. Таким образом, гарантирующее решение может быть найдено из задачи (5) при $r = \bar{R}_\alpha$, где $\bar{R}_\alpha \triangleq \min\{R_\alpha, \rho_\beta\}$. Обозначим данное гарантирующее решение через u^0. В данном разделе предлагается алгоритм улучшения гарантирующего решения u^0, т.е. обеспечивающего меньшее значение критериальной функции $\varphi_\alpha(u)$, чем $\varphi_\alpha(u^0)$.

Как было отмечено в предыдущем разделе, для поиска радиуса шара r^*, вписанного в доверительный многогранник C_r, можно использовать метод дихотомии. При этом возникают следующие трудности: во-первых, непрерывность и монотонность $h(r) = \mathbf{P}\{X \in C_r\}$ в общем случае не гарантируется, во-вторых, вычисление вероятности попадания X в многогранник C_r требует использования приближенных методов. Тем не менее будем для поиска улучшенного гарантирующего решения использовать метод дихотомии. В связи с тем, что $h(r)$ будем вычислять приближенно с помощью процедуры Монте-Карло, будем искать такое значение r, при котором $h(r) \geqslant \alpha + \varepsilon$, где ε — малая положительная константа ($\varepsilon < 1 - \alpha$). Приближенное вычисление меры может привести к тому, что будет найдено недопустимое решение задачи, поэтому необходимо задать вероятность p нахождения допустимого решения. Поскольку квантильная постановка подразумевает нахождение решения, гарантирующего заданный уровень значения целевой функции с вероятностью α, рекомендуется выбирать $p \geqslant \alpha$.

Алгоритм 1.

1. Установить параметры алгоритма $\varepsilon \in (0, 1 - \alpha)$ (параметр точности вычисления меры), $\delta > 0$ (параметр точности вычисления радиуса) и $p \in [\alpha, 1)$ (вероятность нахождения допустимого решения).

2. Вычислить ρ_α — квантиль уровня α стандартного нормального распределения и $\bar{R}_\alpha \triangleq \min\{R_\alpha, \rho_\beta\}$, где $R_\alpha = \sqrt{\chi^2_\alpha(m)}$, $\chi^2_\alpha(m)$ — квантиль распределения хи-квадрат с m степенями свободы, $\beta = 1 - \frac{1-\alpha}{k}$.

3. Вычислить объем выборки

$$N = \left\lceil \frac{\ln(1/(1 - \sqrt[K]{p}))}{2\varepsilon^2} \right\rceil,$$

где $K = \left\lceil \log_2 \dfrac{|\bar{R}_\alpha - \rho_\alpha|}{\delta} \right\rceil$, $\lceil a \rceil$ — округление a до ближайшего целого в большую сторону.

4. Задать $r_1 := \rho_\alpha$, $r_2 := \bar{R}_\alpha$.

5. Найти нижнюю оценку решения $\psi(r_1)$ и верхнюю оценку $\psi(r_2)$ оптимального значения критериальной функции, а также начальное гарантирующее решение $u(r_2)$, решив задачу (5) при $r = r_1$ и $r = r_2$.

6. Пока $|r_1 - r_2| > \delta$ повторять следующие шаги:

6.1. Присвоить $r := \frac{r_1+r_2}{2}$.

6.2. Вычислить $u(r)$ и $\psi(r)$, решив задачу (5).

6.3. Смоделировать N независимых реализаций случайного вектора X.

6.4. Вычислить $\mu(r) \triangleq \mathbf{P}\{X \in B_r\} = F_{\chi^2(m)}(r^2)$, где $F_{\chi^2(m)}(r^2)$ — значение функции распределения закона хи-квадрат с m степенями свободы в точке r^2.

6.5. Найти $\hat{h}(r)$ — оценку меры множества C_r, определенного формулой (7):

$$\hat{h}(r) = \mu(r) + \frac{s(r)}{N},$$

где $s(r)$ — количество элементов выборки, попавших во множество $C_r \setminus B_r$.

6.6. Если $\hat{h}(r) \geqslant \alpha + \varepsilon$, то $r_2 := r$. Иначе $r_1 := r$.

7. В качестве гарантирующего решения принять $u(r_2)$.

Отметим, что для повышения точности алгоритма можно использовать не метод дихотомии, а делить отрезок поиска решения на несколько равных частей. В этом случае на шаге 6.1 алгоритма нужно будет брать несколько значений r в отрезке $[r_1, r_2]$. Также следует заметить, что в случае немонотонной зависимости $r \mapsto h(r)$ алгоритм может не найти корень уравнения $h(r) = \alpha + \varepsilon$, но при этом будет найдено некоторое гарантирующее решение.

Сформулируем теорему о сходимости алгоритма.

Теорема 3. *Пусть задача* (5) *имеет решение при* $r \in [\rho_\alpha, \bar{R}_\alpha]$. *Тогда применение алгоритма обеспечивает нахождение гарантирующего решения с вероятностью, не меньшей* p.

Следующая теорема характеризует точность решения, найденного с помощью предложенного алгоритма 1. Этот результат является уточнением [2, теорема 3.13] для задач оптимизации рассматриваемого класса.

Теорема 4. *Пусть функция* ψ *определена и принимает конечные значения на отрезке* $[\rho, R]$, *а функция потерь является липшицевой с константой* L, *т.е.*

$$|\Phi(u, x) - \Phi(u, y)| \leqslant L\|x - y\|.$$

Также предположим, что

$$\max_{j=\overline{1,k_2}} \{b_{2j}(u(\rho)) + \|B_{2j}(u(\rho))\| R\} \leqslant 0. \tag{11}$$

Тогда $0 \leqslant \psi(R) - \psi(\rho) \leqslant (R - \rho)L$.

Как было показано в (10), $\psi(\rho_\alpha) \leqslant \varphi_\alpha \leqslant \psi(\bar{R}_\alpha)$. Это неравенство говорит о близости найденной верхней оценки критериальной функции к ее оптимальному значению. Теорема 4 дает оценку границ в этих неравенствах, которая может быть получена еще до применения алгоритма 1. Согласно этой оценке

$$0 \leqslant \psi(\bar{R}_\alpha) - \psi(\rho_\alpha) \leqslant L|\bar{R}_\alpha - \rho_\alpha|,$$

если выполнены условия теоремы 4. Отметим, что эти условия выполнены для липшицевой функции потерь, например, при $Q(u,x) \equiv 0$.

5. Численный эксперимент

Пример 2. Найдем гарантирующее решение задачи (1) для

$$\begin{gathered}\Phi(u,x) = \max\bigl\{u_1 + 3u_3 + 2u_5 + x_1 + 2x_3 + 4,\\ -u_1 + 2u_2 - u_3 + 3u_4 + 2u_5 + 2x_1 - x_2 + 2x_3,\\ 2u_1 + u_2 + 2u_3 - 2u_4 - u_5 + 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2,\\ 3u_1 - 2u_2 + u_3 + 3u_4 - 3u_5 - 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 5,\\ 0{,}1u_1^2 - 0{,}02u_1u_2 - 0{,}03u_1u_3 + 0{,}2u_2^2 + 0{,}05u_3^2 + 0{,}3u_4^2 +\\ + 0{,}1u_5^2 - 0{,}2u_1 - 0{,}3u_2 - 0{,}1u_3 - 0{,}2u_5 - 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 6\bigr\},\\ Q(u,x) = 3u_2 + u_1 + 4u_3 - 2u_5 - x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 10,\end{gathered}$$

$U = \bigl\{u \in \mathbb{R}^5 \mid u_i \in [0;10], i = \overline{1,5}\bigr\}$, $\alpha = 0{,}95$. Для данного уровня α, $\rho_\alpha = 1{,}645$, $R_\alpha = 2{,}796$, $\beta = 0{,}992$, $\rho_\beta = 2{,}394$, $\bar{R}_\alpha = 2{,}394$. Поэтому функцию h нужно рассматривать на отрезке $[1{,}645; 2{,}394]$. Решая задачу (5) при $r = \rho_\alpha$ и $r = \bar{R}_\alpha$, находим оценку

$$\varphi_\alpha \in [\psi(\rho_\alpha), \psi(\bar{R}_\alpha)] = [11{,}813; 14{,}754].$$

Начальное гарантирующее решение имеет вид

$$u(\bar{R}_\alpha) = (0{,}139; 0{,}602; 0{,}000; 0{,}004; 1{,}613)^\top.$$

Зададим параметры алгоритма: $\varepsilon = 0{,}001$, $\delta = 0{,}01$, $p = 0{,}99$. Для этих параметров требуется объем выборки $N = 3\,273\,389$. Применение алгоритма 1 отражено в табл. 3. Улучшенное гарантирующее решение соответствует

Таблица 3. Применение алгоритма 1

Итерация	r	$\hat{h}(r)$	$\psi(r)$
1	2,019	0,949	13,267
2	2,207	0,970	14,007
3	2,113	0,961	13,635
4	2,066	0,956	13,451
5	2,043	0,952	13,359
6	2,031	0,950	13,313
7	2,037	0,9507	13,336

$r = r^* \triangleq 2{,}043$ и имеет вид

$$u(r^*) = (0{,}536; 0{,}688; 0{,}000; 0{,}003; 1{,}356)^\top.$$

При этом

$$\varphi_\alpha \in [\psi(\rho_\alpha), \psi(r^*)] = [11{,}813; 13{,}359].$$

Таким образом, применение алгоритма 1 позволило сократить длину интервала неопределенности оптимального значения критериальной функции на $(1 - \frac{13{,}359-11{,}813}{14{,}754-11{,}813})100\% = 47\%$, что говорит об эффективности предложенного алгоритма.

Все вычисления проводились на ЭВМ с процессором Intel(R) Core(TM) i5-6300U CPU, 2,40 ГГц, ОЗУ 8 ГБ в системе Matlab с использованием программы для решения квадратичных задач оптимизации Gurobi. Время счета составило 1035 с. Основной объем счета составило вычисление меры многогранника C_r с помощью метода Монте-Карло.

6. Заключение

В статье предложен алгоритм решения задачи стохастического программирования с квантильным критерием в случае кусочно-линейной по случайным параметрам и выпуклой по стратегии функции потерь. Достоинством предлагаемого алгоритма является легкость построения аппроксимирующих задач, которые в дальнейшем могут быть решены с помощью методов выпуклой оптимизации. Основную вычислительную трудность при его применении составляет необходимость оценки меры с помощью метода Монте-Карло. Предложенный алгоритм выбора доверительного множества, параметризованного радиусом вписанного шара, как показал пример, может быть успешно применен для решения задач стохастической оптимизации с квантильным критерием в случае выпуклой кусочно квадратично-линейной функции потерь. Можно заметить, что данный алгоритм может быть применен и для случая дискретных стратегий оптимизации. Вид алгоритма 1 при этом не изменится, но в ходе применения алгоритма нужно будет решать не выпуклую задачу непрерывной оптимизации, а задачу дискретной оптимизации. Алгоритмы решения подобных задач могут являться предметом дальнейших исследований.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Условия 2 и 3 гарантируют, что все ограничения в задаче (5) являются активными. Это значит, что все грани множества C_r касаются шара B_r. При увеличении r на отрезке $[0, R]$ грани множества C_r переносятся параллельно, касаясь шара B_r. Это значит, что множество C_r расширяется при увеличении r. Поэтому функция h, определенная как мера C_r, является неубывающей. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\gamma \in (0,1)$. Множество C_{ρ_γ} определено как пересечение k полуплоскостей меры, не меньшей γ. Обозначим эти полуплоскости через L_i, $i = \overline{1,k}$. Тогда

$$h(\rho_\gamma) = \mathbf{P}\left\{X \in \bigcap_{i=1}^{k} L_i\right\} = 1 - \mathbf{P}\left\{X \in \bigcup_{i=1}^{k} (\mathbb{R}^m \setminus L_i)\right\} \geqslant$$
$$\geqslant 1 - \sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}\{X \notin L_i\} = 1 - (1-\gamma)k.$$

Таким образом, $h(\rho_\gamma) \geqslant \alpha$ при $\alpha \leqslant 1 - (1-\gamma)k$, что равносильно $\gamma \geqslant \beta = 1 - \frac{1-\alpha}{k}$. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Поскольку на каждой итерации отрезок поиска решения сужается два раза, число итераций алгоритма K может быть найдено как минимальное натуральное число K, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{|\bar{R}_\alpha - \rho_\alpha|}{2^K} \leqslant \delta.$$

Из данного неравенства следует, что $K = \left\lceil \log_2 \frac{|\bar{R}_\alpha - \rho_\alpha|}{\delta} \right\rceil$. Алгоритм может совершить ошибку при своей работе только в том случае, когда на некоторой итерации окажется, что $\hat{h}(r) \geqslant \alpha + \varepsilon$, хотя на самом деле $h(r) < \alpha$. Как нетрудно заметить, случайная величина $s(r)$ распределена по биномиальному закону с вероятностью успеха $h(r) - \mu(r)$. Известно неравенство [15, гл. 1, § 6]:

$$\mathbf{P}\{\hat{h}(r) - h(r) \geqslant \varepsilon\} = \mathbf{P}\left\{\frac{s(r)}{N} - (h(r) - \mu(r)) \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant e^{-2N\varepsilon^2}.$$

Поэтому, если предположить, что $h(r) < \alpha$, то $\mathbf{P}\{\hat{h}(r) \geqslant \alpha + \varepsilon\} \leqslant e^{-2N\varepsilon^2}$. Поскольку выборки, используемые для оценки меры, независимые, вероятность безошибочной работы алгоритма составляет не менее $(1 - e^{-2N\varepsilon^2})^K$. Отсюда следует, что для обеспечения вероятности успешной работы алгоритма p должно быть выполнено неравенство

$$p \leqslant (1 - e^{-2N\varepsilon^2})^K \iff N \geqslant \frac{\ln(1/(1 - \sqrt[K]{p}))}{2\varepsilon^2}.$$

Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Пусть $\Psi(u,r) \triangleq \max_{x \in B_r} \Phi(u,x) = \Phi(u, x^0(r))$, где x^0 — точка на границе шара B_r, в которой достигается указанный максимум. Так как $B_\rho \subset B_R$, выполнено $\Psi(u,\rho) \leqslant \Psi(u,R)$. Поскольку точка $y = \frac{\rho}{R} x^0(R)$ лежит на границе шара B_ρ, $\Phi(u,y) \leqslant \Psi(u,\rho)$. Поэтому

$$0 \leqslant \Psi(u,R) - \Psi(u,\rho) \leqslant \Phi(u, x^0(R)) - \Phi(u,y) \leqslant L\|x^0(R) - y\| = (R-\rho)L.$$

Таким образом, справедливы неравенства

$$\Psi(u,\rho) \leqslant \Psi(u,R) \leqslant \Psi(u,\rho) + (R-\rho)L. \tag{П.1}$$

Минимизируя левые и правые части первого неравенства в (П.1) по $u \in U$ так, что $\max_{j=\overline{1,k_2}} \{b_{2j}(u) + \|B_{2j}(u)\|R\} \leqslant 0$ (ограничения задачи (4) при $r = R$), получаем первое доказываемое неравенство $\psi(\rho) \leqslant \psi(R)$ (здесь учтено, что $\psi(\rho)$ определен как минимум на более широком множестве). Из (11) и второго неравенства в (П.1) следует, что

$$\psi(R) \leqslant \Psi(u(\rho),R) \leqslant \Psi(u(\rho),\rho) + (R-\rho)L = \psi(\rho) + (R-\rho)L.$$

Из этой оценки следует второе доказываемое неравенство. Теорема 4 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kibzun A.I., Kan Y.S.* Stochastic Programming Problems with Probability and Quantile Functions. Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore: John Wiley & Sons, 1996.
2. *Кибзун А.И., Кан Ю.С.* Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М.: Физматлит, 2009.
3. *Кибзун А.И., Наумов А.В.* Гарантирующий алгоритм решения задачи квантильной оптимизации // Космические исследования. 1995. Т. 33. № 2. С. 160–165.
4. *Наумов А.В., Иванов С.В.* Исследование задачи стохастического линейного программирования с квантильным критерием // АиТ. 2011. № 2. С. 142–158.

   Naumov A.V., Ivanov S.V. On stochastic linear programming problems with the quantile criterion // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 2. P. 353–369.
5. *Кан Ю.С.* Расширение задачи квантильной оптимизации с линейной по случайным параметрам функцией потерь // АиТ. 2020. № 12. С. 67–81.

   Kan Yu.S. An extension of the quantile optimization problem with a loss function linear in random parameters // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 12. P. 2194–2205.
6. *Васильева С.Н., Кан Ю.С.* Метод решения задачи квантильной оптимизации с билинейной функцией потерь // АиТ. 2015. № 9. С. 83–101.

   Vasil'eva S.N., Kan Yu.S. A method for solving quantile optimization problems with a bilinear loss function // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 9. P. 1582–1597.
7. *Васильева С.Н., Кан Ю.С.* Аппроксимация вероятностных ограничений в задачах стохастического программирования с использованием ядра вероятностной меры // АиТ. 2019. № 11. С. 93–107.

   Vasil'eva S.N., Kan Yu.S. Approximation of Probabilistic Constraints in Stochastic Programming Problems with a Probability Measure Kernel // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 11. P. 2005–2016.
8. *Prékopa A.* Stochastic Programming. Dordrecht–Boston: Kluwer, 1995.
9. *Shapiro A., Dentcheva D., Ruszczyński A.* Lectures on Stochastic Programming. Modeling and Theory. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2014.

10. *Lejeune M.A., Prékopa A.* Relaxations for Probabilistically Constrained Stochastic Programming Problems: Review and Extensions // Ann. Oper. Res. 2018. https://doi.org/10.1007/s10479-018-2934-8
11. *Dentcheva D., Prékopa A., Ruszczyński A.* On Convex Probabilistic Programming with Discrete Distributions // Nonlinear Anal.-Theor. 2001. V. 47. No. 3. P. 1997–2009.
12. *Van Ackooij W., Berge V., de Oliveira W., Sagastizábal C.* Probabilistic Optimization via Approximate p-Efficient Points and Bundle Methods // Comput. Oper. Res. 2017. V. 77. P. 177–193.
13. *Иванов С.В., Кибзун А.И.* Общие свойства двухэтапных задач стохастического программирования с вероятностными критериями // АиТ. 2019. № 6. С. 70–90.

    Ivanov S.V., Kibzun A.I. General properties of two-stage stochastic programming problems with probabilistic criteria // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 6. P. 1041–1057.
14. *Boyd S., Vandenberghe L.* Convex Optimization. Cambridge: University Press, 2009.
15. *Ширяев А.Н.* Вероятность. М.: МЦНМО, 2017.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.

Поступила в редакцию 30.01.2023

После доработки 16.05.2023

Принята к публикации 09.06.2023