

# Управление в технических системах

© 2023 г. Н.В. ГРИГОРЬЕВ, канд. физ.-мат. наук (lab76@lii.ru)  
(Летно-исследовательский институт им. М.М. Громова, Жуковский)

## СИНТЕЗ ТЕСТ-УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Предлагается новый подход к решению проблемы планирования летного эксперимента для идентификации аэродинамических характеристик автоматически управляемых летательных аппаратов — синтез закона управления для отслеживания заданной информативной траектории. Приведены математическая постановка и метод решения задачи синтеза. В численном эксперименте показана возможность значительного повышения точности идентификации на синтезированном управлении по сравнению с точностью идентификации на оптимальном программном тест-сигнале.

*Ключевые слова:* аэродинамические характеристики, планирование тестовых сигналов, параметрическая идентификация, автоматическое управление.

DOI: 10.31857/S000523102308007X, EDN: НСККСА

### 1. Введение

Задача планирования тест-сигналов для идентификации аэродинамических характеристик (АДХ) летательного аппарата (ЛА) заключается в формировании специально возмущенного движения ЛА в целях повышения точности идентификации АДХ. Возмущенное движение ЛА (тест-маневр) формируется подачей на органы управления ЛА так называемых тестовых входных сигналов (тест-сигналов). В качестве критериев выбора тест-сигнала, как правило, используются критерии, принятые в теории оптимального планирования эксперимента, характеризующие в той или иной мере ожидаемую точность идентификации.

Для задач активной идентификации АДХ ЛА характерно большое разнообразие математических постановок. Постановки задач, для которых в натуральных или численных экспериментах получены решения, отличаются: размерностью тест-сигнала (скаляр [1–9], вектор [1, 4, 9–16]), классом функций, в котором оптимизируется тест-сигнал (непрерывных функций [9], дискретных функций [1, 2, 4, 8, 17], полигармонических функций [2, 10, 12, 15, 16, 18], управлений типа «bang-zero-bang» и близких к ним

управлений [2, 6, 8, 12, 14, 15], параметризованных управлений [2, 4, 7, 11], функций простой формы [5]), по типу ограничений (только на тест-сигнал [2, 3, 5, 9] на компоненты вектора состояния ЛА в возмущенном движении [1–4, 6, 7, 11, 14, 17]), критерием (число Тьюринга [1],  $L$ -,  $D$ -критерии [1–7, 9, 11, 12, 14, 15, 17, 18], пик-фактор [10, 12, 15, 16]). Обычно предполагается, что выбор тест-сигнала производится до проведения эксперимента, однако рассматривается и возможность поэтапной оптимизации тест-сигнала в ходе его проведения [3]. Оптимизация тест-сигналов производится чаще во временной области [1, 12, 14, 16], но также и в частотной [18] и во временной и частотной области одновременно [13, 17]. Для дальнейшего изложения важно отметить, что в известных постановках задачи активной идентификации АДХ ЛА ограничения на компоненты вектора состояния ЛА в возмущенном движении не учитывают (за исключением [6]) возможные отличия неизвестных АДХ от их априорных оценок, а выбор тест-сигналов производится в классе программных управлений, т.е. адаптивное управление в целях активной идентификации АДХ ЛА практически не рассматривается [2, 19].

Условия безопасности летного эксперимента, различные физические и методические ограничения определяют ограничения на возмущения компонент вектора состояния ЛА в тест-маневре. В ряде важных приложений учет данных ограничений является необходимым условием выполнения тест-маневра [11]. При нарушении ограничений тест-маневр не выполняется (прерывается системой автоматического управления ЛА). Выполнение ограничений нужно обеспечить априори — когда АДХ и начальные условия тест-маневра при выборе тест-сигнала известны приближенно.

В [6] предложен метод оптимизации тест-сигнала с учетом указанных ограничений в классе «bang-zero-bang» управлений. В [7] предложен метод оптимизации тест-сигнала с учетом указанных ограничений в классе параметризованных управлений, в частности, получено решение в классе кусочно-постоянных функций с малым временем постоянства, которое существенно отличается от «bang-zero-bang» управления. Полученный в [7] программный тест-сигнал обеспечивает выполнение заданных ограничений при всех априори возможных значениях АДХ. Но следствием этого положительного свойства тест-сигнала является его оптимальность «в среднем» на множестве всех ограничений, определяемом совокупностью возможных значений АДХ. А это означает, что в каждом конкретном случае (в частности, при истинных значениях АДХ) такой тест-сигнал будет заведомо неоптимальным. Очевидно, что в классе программных тест-сигналов нельзя выбрать тест-сигнал, который будет оптимален при всех возможных значениях АДХ. Однако можно улучшить информативные свойства выбранного тест-сигнала непосредственно в ходе летного эксперимента за счет получаемой информации о векторе состояния ЛА. В [20] был предложен метод приближенного решения данной задачи. Ниже излагается метод нахождения ее оптимального решения.

## 2. Постановка задачи

Предлагаемая математическая постановка задачи синтеза управления для идентификации АДХ содержит модель динамики объекта на тестовом режиме длительностью  $T$  секунд, описываемую линейным (линеаризованным относительно опорного движения ЛА) дифференциальным уравнением

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = A(b)x + Gu, \quad t[0, T], \quad x(0) = x_0,$$

и модель дискретных измерений

$$(2) \quad z_i = z(x(t_i)) = Hx(t_i) + v_i, \quad i = \overline{1, N},$$

где:  $x$  —  $n$ -мерный вектор состояния ЛА;  $u = u(t, x)$  — оптимизируемый вектор управления размерности  $m$ ;  $z_i$  —  $p$ -мерный вектор измерений;  $v_i$  — вектор «белых» гауссовых шумов измерений,  $E(v_i) = 0$ ,  $E(v_i v_j^T) = 0$ ,  $i \neq j$ ,  $E(v_i v_i^T) = R$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $j = \overline{1, N}$  ( $E$  — символ математического ожидания);  $A(b)$ ,  $G$ ,  $H$  — матрицы соответствующих размерностей;  $t_i$  — моменты времени, в которые производятся измерения,  $t_i = h(i - 1)$ ,  $h = T/(N - 1)$ ;  $N$  — количество измерений. Матрица  $A(b)$  зависит от подлежащего идентификации вектора неизвестных параметров  $b$  (искомых АДХ) размерности  $k$ . Истинные значения  $b^{\text{ист}}$  параметров  $b$  не известны. Априорная оценка  $b^{\text{апр}}$  вектора  $b^{\text{ист}}$  содержит ошибку  $\Delta b$ ,  $b^{\text{апр}} = b^{\text{ист}} + \Delta b$ , относительно которой известно, что компоненты  $\Delta b_i$  вектора  $\Delta b$  принадлежат интервалам  $[-\Delta_i, \Delta_i]$ :  $\Delta b_i \in [-\Delta_i, \Delta_i]$ ,  $i = \overline{1, k}$ . Множество возможных значений  $b$  обозначим символом  $B$ .

Будем предполагать, что движение ЛА перед началом тест-маневра должно быть квазистационарным. Это означает, что компоненты вектора  $x_0$  в (1) близки к нулю, но могут быть отличны от нуля. Будем считать, что  $x_0^{\text{ист}}$  принадлежит замкнутому ограниченному множеству  $X^0$ , содержащему нулевой вектор. Возможные значения компонент векторов  $x_0$  и  $b$  будем считать независимыми друг от друга.

Требуется выбором на интервале  $[0, T]$  вектор-функции  $u = u(t, x)$  из некоторого класса функций  $U$  (определен ниже):

- 1) обеспечить выполнение скалярных линейных ограничений на вектор состояния ЛА при всех априори возможных значениях  $b$  и  $x_0$

$$(3) \quad |x_s(t, b, x_0, u)| \leq q_s(t), \quad b \in B, \quad x_0 \in X^0, \quad s = \overline{1, r},$$

где:  $x_s$  — компоненты вектора  $x$ , на которые наложены ограничения;  $q_s(t)$  — заданные функции;  $r$  — количество ограничений;

- 2) минимизировать по управлению  $u$  функционал

$$(4) \quad J = \text{tr} (WM^{-1}(b^{\text{апр}}, x_0, u)),$$

где  $\text{tr}$  — обозначение следа матрицы,  $W$  — неотрицательно определенная матрица весов (как правило, диагональная),  $M$  — информационная матрица:

$$(5) \quad M(b, x_0, u) = \sum_{i=1}^N (\partial x(t_i, b, x_0, u) / \partial b)^T Q (\partial x(t_i, b, x_0, u) / \partial b).$$

В (5) матрица  $Q = H^T R^{-1} H$ ;  $x_0 = 0$ ; производные  $S_j = \frac{\partial x(t, b, x_0, u)}{\partial b_j}$ ,  $j = \overline{1, k}$  определяются из системы дифференциальных уравнений для функций чувствительности:

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{dS_j}{dt} = A(b)S_j + \frac{\partial A(b)}{\partial b_j} x(t, b, x_0, u), \\ S_j(0) = 0, \quad j = \overline{1, k}. \end{cases}$$

Уравнения (6) и (1) решаются совместно.

Математическая постановка задачи планирования тест-сигнала в классе программных управлений отличается от приведенной постановки задачи только тем, что искомое управление ищется в заданном классе функций времени, т.е.  $u = u(t)$  (обычно в классе непрерывных или кусочно-непрерывных функций времени [1–18]).

Решение  $u = u(t, x)$  задачи (1)–(4) предлагается искать среди управлений, обеспечивающих отслеживание некоторой траектории системы (1), обладающей хорошей информативностью об идентифицируемых параметрах и удовлетворяющей ограничениям (3), а именно в классе функций, представимых в виде

$$(7) \quad u(t, x) = \mu u^{\text{апп}}(t) + L(\mu x^{\text{апп}}(t) - x(t)),$$

где  $x^{\text{апп}}(t) = x(t, b^{\text{апп}}, 0, u^{\text{апп}})$  — траектория системы (1) на оптимальном при  $B = b^{\text{апп}}$ ,  $X^0 = 0$  программном тест-сигнале  $u^{\text{апп}}(t)$ ; коэффициент  $\mu$ ,  $0 \leq \mu \leq 1$ , и элементы  $L_{ij}$  матрицы  $L$

$$(8) \quad |L_{i,j}| \leq C, \quad i = \overline{1, l}, \quad j = \overline{1, n}$$

подлежат определению из условия минимума критерия (4) при ограничениях (3). Константа  $C$  отражает ограничения на коэффициенты обратной связи системы автоматического управления (САУ). Для удобства дальнейших ссылок приведенную задачу будем называть задачей выбора тест-управления, а искомую функцию  $u(t, x(t))$  — тест-управлением.

Система (1) при управлении (7) может быть записана в виде

$$(9) \quad \frac{dx}{dt} = (A(b) - GL)x + \mu G(u^{\text{апп}}(t) + Lx^{\text{апп}}(t)), \quad x(0) = x_0,$$

поэтому при достаточно малых значениях коэффициента  $\mu$  ограничения (3) будут заведомо выполнены. Кроме того, из (4)–(6) и (9) следует, что для произвольной функции  $u = u(t)$  справедливо равенство  $J(\mu u) = J(u)/\mu^2$ , поэтому для минимизации функционала (4) значение  $\mu$  должно выбираться максимально возможным при условии выполнения ограничений (3).

Уравнения для функций чувствительности  $S_j$ ,  $j = \overline{1, k}$  записаны в виде (6), так как предполагается, что в процедуре послеполетной оценки вектора  $b$  будет применен обычный в практике идентификации прием искусственного размыкания системы (9), когда на вход настраиваемой модели движения с исключенным контуром САУ подается сигнал  $u_\Sigma(t) = \mu u^{\text{анп}}(t) + L(\mu x^{\text{анп}}(t) - x(t))$ , известный из летного эксперимента. Если настраиваемая модель включает модель САУ, то матрицу  $A$  в (6) нужно заменить матрицей  $A - GL$ .

Достаточно полной характеристикой решения задачи (1)–(5) является плотность распределения значений функции  $J(b, x_0) = \text{tr } M^{-1}(b, x_0, u)$ . Функция  $J(b, x_0)$  характеризует ожидаемую погрешность идентификации (нижнюю границу суммы дисперсий оценок параметров) на тест-управлении  $u(t, x(t))$  (или на тест-сигнале  $u(t)$ ) в случае, если  $b^{\text{ист}} = b$ ,  $x(0) = x_0$ . Для построения оценки данной плотности распределения (полигона) достаточно вычислить значения функции  $J(b, x_0)$  для достаточно большого числа  $N_P$  пар векторов  $b$  и  $x_0$ ,  $b \in B$ ,  $x_0 \in X^0$ , выбираемых случайным образом. Если плотности распределения компонент векторов  $b$  и  $x_0$  на интервалах их возможных значений неизвестны, то в силу рекомендаций [21] их следует принять равномерными. Число  $N_P$  выбирается так, чтобы при его увеличении положение и форма полигона не изменялись. При малых затратах расчетного времени полигон ожидаемых значений погрешности идентификации представляет собой удобную для анализа интегральную характеристику качества тест-управления, позволяющую оценить вероятности получения тех или иных значений ожидаемой погрешности идентификации параметров.

### 3. Метод решения

Оптимальный в случае  $B = b^{\text{анп}}$ ,  $X^0 = 0$  программный тест-сигнал  $u^{\text{анп}}(t)$  и соответствующая траектория  $x^{\text{анп}}(t) = x(t, b^{\text{анп}}, 0, u^{\text{анп}})$  могут быть найдены, например, одним из методов, изложенных в [2, 7]. Ниже излагается метод оптимизации коэффициента и матрицы  $L$  в (7).

Объединим элементы матрицы  $L$  и коэффициент  $\mu$  в один вектор  $v \in V$ , где  $V$  — гиперкуб, определяемый неравенствами (8) и неравенством  $0 \leq \mu \leq 1$ . Размерность вектора  $v$  равна  $N_v \leq nl + 1$  (некоторые элементы матрицы  $L$  могут быть положены равными нулю, чтобы исключить обратную связь по соответствующим компонентам и сократить количество настраиваемых коэффициентов). Для определенности  $v_{N_v} = \mu$ . Обозначим через  $x(t, b, x_0, u^v)$  решение системы (1) на управлении (7) при заданном векторе  $v$ .

Пусть  $N_C$  — положительное целое число. Разобьем интервал оптимизации  $[0, T]$  точками  $t_i = \Delta_C(i - 1)$ ,  $i = \overline{1, N_C}$  на подынтервалы одинаковой длины  $\Delta_C = T/(N_C - 1)$ . Выберем  $N_C$  настолько большим, что при выполнении ограничений

$$(10) \quad \begin{aligned} |x_s(t_i, b, x_0, u^v)| &\leq q_s(t_i), \quad t_i = \Delta_C(i - 1), \quad i = \overline{1, N_C}, \\ b &\in B, \quad x_0 \in X^0, \quad s = \overline{1, r} \end{aligned}$$

ограничения (3) можно считать выполненными при всех  $t \in [0, T]$  с достаточной точностью. Таким образом, для решения поставленной задачи достаточно решить задачу минимизации критерия (4) на множестве  $S$  векторов  $v$ , удовлетворяющих множеству ограничений (10).

Определим следующую вспомогательную задачу. Минимизировать по  $v \in V$  критерий

$$(11) \quad J = \text{tr} (WM^{-1}(b^{\text{анп}}, 0, u^v))$$

на некотором замкнутом, ограниченном множестве  $\check{S}$  векторов  $v$ , определяемом конечным числом ограничений

$$(12) \quad \begin{aligned} |x_s(t_i, b^j, x_0^j, u^v)| &\leq q_s(t_i), \quad i = \overline{1, N_C}, \\ b^j &\in B, \quad x_0^j \in X^0, \quad s = \overline{1, r}, \quad j = \overline{1, K}, \quad v \in V. \end{aligned}$$

Решение этой типовой задачи нелинейного программирования может быть найдено различными методами, например методом линеаризации [22]. Градиенты ограничений (12) по компонентам вектора  $v$  равны

$$S_{v_j} = \frac{\partial x(t, b, x_0, u^v)}{\partial v_j}, \quad j = \overline{1, N_v}.$$

Градиент функционала (11) может быть вычислен, если известны функции

$$S_{v_j}^{b_i} = S_{v_j}^{b_i}(t, b, x_0, u^v) = \frac{\partial}{\partial v_j} S_i, \quad i = \overline{1, k}, \quad j = \overline{1, N_v}.$$

Функции  $S_{v_j}, S_{v_j}^{b_i}$  могут быть определены из решения следующих систем уравнений, которые должны решаться совместно с уравнениями (1) и (6):

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dS_{v_j}}{dt} &= (A(b) - GL)S_{v_j} - G \frac{\partial L}{\partial v_j} x(t, b, x_0, u) + \mu G \frac{\partial L}{\partial v_j} x^{\text{анп}}, \quad \text{при } j = \overline{1, N_v - 1}, \\ \frac{dS_{v_{N_v}}}{dt} &= (A(b) - GL)S_{v_{N_v}} + G(u^{\text{анп}} + Lx^{\text{анп}}), \\ S_{v_j}(0) &= 0, \quad j = \overline{1, N_v}; \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dS_{v_j}^{b_i}}{dt} &= A(b)S_{v_j}^{b_i} + \frac{\partial A(b)}{\partial b_i} S_{v_j}, \\ S_{v_j}^{b_i}(0) &= 0, \quad j = \overline{1, N_v}, \quad i = \overline{1, k}. \end{aligned} \right.$$

Решение исходной задачи минимизации по вектору  $v$  критерия (11) при ограничениях (8) и (10) может быть получено следующим итерационным алгоритмом:

*Шаг 0.* Установим счетчик числа итераций:  $iter = 0$ . Зададим произвольные  $b^j \in B$ ,  $x_0^j \in X^0$ ,  $j = \overline{1, K}$  и определим множество  $S^{iter}$  как множество векторов  $v$ , удовлетворяющих неравенствам и условиям (12).

*Шаг 1.* Решим вспомогательную задачу, в которой  $\check{S} = S^{iter}$ . Обозначим решение через  $v^{iter}$ , соответствующее тест-управление (7) — через  $u^{v^{iter}}$ .

*Шаг 2.* Для проверки выполнения ограничений (10) на найденном управлении  $u^{v^{iter}}$  для каждого  $s = \overline{1, r}$  и  $i = \overline{1, N_C}$  определим  $\max_{b \in B, x_0 \in X^0} |x_s(t_i, b, x_0, u^{v^{iter}})|$ .

*Шаг 3.* Если при всех  $s = \overline{1, r}$ ,  $i = \overline{1, N_C}$  окажется, что

$$\max_{b \in B, x_0 \in X^0} |x_s(t_i, b, x_0, u^{v^{iter}})| \leq q_s(t_i),$$

то задача (11)–(10) решена — найдено тест-управление, удовлетворяющее ограничениям (10) и минимизирующее функционал (11). Далее переход на шаг 5.

*Шаг 4.* Если при некоторых  $s^*$ ,  $i^*$  окажется, что

$$\max_{b \in B, x_0 \in X^0} |x_{s^*}(t_{i^*}, b, x_0, u^{v^{iter}})| = |x_{s^*}(t_{i^*}, b^*, x_0^*, u^{v^{iter}})| > q_{s^*}(t_{i^*}),$$

т.е. ограничения (10) нарушаются, то множество  $S^{iter}$  дополним ограничениями  $|x_{s^*}(t_{i^*}, b^*, x_0^*, u^{v^{iter}})| \leq q_{s^*}(t_{i^*})$ . Полученное таким образом множество снова обозначим через  $S^{iter}$ , предварительно положив  $iter = iter + 1$ . Далее переход на шаг 1.

*Шаг 5.* Строится полигон значений функции  $J(b, x^0) = \text{tr}(WM^{-1}(b, x_0, u^{opt}))$ , где  $u^{opt} = u^{v^{iter}}$ . Способ построения полигона был описан в разделе 2.

Поясним: каждое последующее множество  $S^{i+1}$  векторов  $v$  уже содержится в предыдущем множестве  $S^i$  в силу того, что каждое добавляемое на шаге 4 ограничение сужает множество, на котором минимизируется критерий (11). Таким образом:  $S^0 \supset S^1 \supset \dots \supset S^i \supset \dots \supset S$ , где  $S$  — это множество векторов  $v$ , определяемое формулами (10). Следовательно, минимум критерия (11) на множестве  $S$  не меньше минимума на множестве  $S^i$ . Поэтому если на  $i$ -й итерации выполнены условия шага 3 алгоритма, то выполнены ограничения (10), а найденный на множестве  $S^i$  минимум есть минимум на множестве  $S$ .

Таким образом, решение задачи (4), (10) сведено к решению последовательности типовых задач нелинейного программирования, которые «аппроксимируют» исходную задачу в окрестности искомого минимума с возрастающей в ходе итераций точностью аппроксимации. Такой подход, разработанный ранее для оптимизации программных тест-сигналов [7], представляется

более предпочтительным по сравнению с оптимизацией тест-сигналов методом динамического программирования [6, 14] в связи с «проклятием размерности».

Изложенный метод решения задачи может быть обобщен на случай зависимости матриц  $G$  и  $H$  от идентифицируемых параметров  $b$ .

#### 4. Численное моделирование

Рассмотрим задачу построения на временном интервале длиной восемь секунд ( $T = 8$ ) двухкомпонентного ( $m = 2$ ) тест-управления  $u(t, x(t))$  в целях идентификации коэффициентов  $b_i$ ,  $i = \overline{1, 5}$  модели бокового движения самолета [9]

$$(13) \quad \begin{cases} \dot{\beta} = b_1\beta + w_y + 0,0565\gamma + 0,0289\delta_N, \\ \dot{w}_x = b_2\beta - 0,935w_x - 0,124w_y + 1,4\delta_N + 2,88\delta_e, \\ \dot{w}_y = b_3\beta + 0,119w_x + b_4w_y + b_5\delta_N, \\ \dot{\gamma} = w_x, \end{cases}$$

дополненной простейшими моделями привода руля направления и элерона:

$$(14) \quad \begin{cases} \dot{\delta}_N = \omega_N, \\ \dot{\omega}_N = k(\delta_N^{\text{зад}} - \delta_N) - k_2\omega_N, \delta_N^{\text{зад}} = u_1(t, x(t)), \\ \dot{\delta}_e = \omega_e, \\ \dot{\omega}_e = k(\delta_e^{\text{зад}} - \delta_e) - k_2\omega_e, \delta_e^{\text{зад}} = u_2(t, x(t)), \\ k = \frac{0,456}{\tau^2}, k_2 = \frac{0,8}{\tau}, \tau = 0,02. \end{cases}$$

В (13) и (14):  $\beta$  — угол скольжения самолета,  $w_x, w_y$  — угловые скорости крена и рысканья,  $\gamma$  — угол крена,  $\delta_N, \delta_e$  — углы отклонения руля направления и элерона,  $\omega_N, \omega_e$  — угловые скорости отклонения руля направления и элерона,  $k, k_2, \tau$  — параметры приводов руля направления и элерона, коэффициенты  $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$  — подлежащие идентификации производные боковой аэродинамической силы и аэродинамических моментов крена и рысканья по соответствующим компонентам вектора состояния ЛА:  $\beta, w_x, w_y, \delta_N$ . Размерность угловых скоростей — градус за секунду, углов — градус. Переменные  $\beta, w_x, w_y, \gamma, \delta_N, \delta_e$  независимо измеряются с частотой 25 герц.

Таким образом, имеем вектор состояния ЛА  $x = (\beta, w_x, w_y, \gamma, \delta_N, \delta_e, \omega_N, \omega_e)^T$ , вектор идентифицируемых параметров  $b = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)^T$ , вектор измерений  $z_i = z(t_i) = Hx(t_i) + v_i$ ,  $t_i = h(i - 1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ , где  $H$  — матрица с элементами  $H_{ii} = 1$  при  $i = \overline{1, 6}$ ,  $H_{ij} = 0$  при  $i = \overline{1, 6}$ ,  $j = \overline{1, 8}$ ,  $i \neq j$ ;  $v_i$  — вектор «белых» гауссовых шумов измерений,  $E(v_i) = 0$ ,  $E(v_i v_j^T) = 0$ ,  $i \neq j$ ,  $E(v_i v_i^T) = R$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $j = \overline{1, N}$ ,  $h = 0,04c$ ,  $N = 201$ . Среднеквадратичные погрешности измерений ( $\sqrt{R_{ii}}$ ,  $i = \overline{1, 6}$ ) составляют: для  $\beta$  —  $1^\circ$ , для  $w_x, w_y$  —  $0,71^\circ/c$ , для  $\delta_N, \delta_e$  —  $0,5^\circ$ .



Априорная оценка истинных значений  $b^{\text{ист}}$  вектора  $b$ :

$$b^{\text{апп}} = (-0,119, -4,43, -2,99, 0,178, 1,55)^T.$$

Границы допусковых интервалов  $[-\Delta_i, \Delta_i]$ , таких что  $\Delta b_i \in [-\Delta_i, \Delta_i]$ , имеют вид:  $\Delta_i = \pm 0,5 |b_i^{\text{апп}}|$ ,  $i = \overline{1, 4}$ ,  $\Delta_5 = \pm 0,2 |b_5^{\text{апп}}|$ . Таким образом, априорная неопределенность первых четырех компонент вектора  $b$  составляет  $\pm 50\%$  от номинальных значений. Совокупность возможных значений вектора  $b$  определяет параллелепипед с центром в точке  $b^{\text{апп}}$  — множество  $B$ . Тест-маневр должен начинаться из квазистационарного состояния:

$$(15) \quad \begin{aligned} |\omega_x(0)| &\leq 0,5^{0/c}, & |\beta(0)| &\leq 1^0, & |\omega_N(0)| &\leq 0,05^{0/c}, & |\delta_N(0)| &\leq 0,5^0, \\ |\omega_y(0)| &\leq 0,5^{0/c}, & |\gamma(0)| &\leq 0,5^0, & |\omega_e(0)| &\leq 0,05^{0/c}, & |\delta_e(0)| &\leq 0,5^0. \end{aligned}$$

Совокупность возможных значений начальных условий тест-маневра  $x_0 = x(0)$  определяет многогранник — множество  $X^0$ . Интервалы  $I_6 = \pm 0,5^{0/c}$ ,  $I_7 = \pm 1^0$ ,  $I_8 = \pm 0,05^{0/c}$ ,  $I_9 = \pm 0,5^0$ ,  $I_{10} = \pm 0,5^{0/c}$ ,  $I_{11} = \pm 0,5^0$ ,  $I_{12} = \pm 0,05^{0/c}$ ,  $I_{13} = \pm 0,5^0$ , определяющие возможные значения  $x_0$ , а также допусковые интервалы  $I_i = [-\Delta_i, \Delta_i]$ ,  $i = \overline{1, 5}$  далее будем называть интервалами априорной неопределенности.

При построении полигонов значений  $J(b, x_0)$  будем предполагать, что компоненты априорной оценки вектора  $b$  и компоненты вектора  $x_0$  равномерно распределены на интервалах априорной неопределенности  $I_i = [-\Delta_i, \Delta_i]$ ,  $i = \overline{1, 13}$  и независимы друг от друга. Матрица  $W$  в (4) принималась единичной.

На допустимые возмущения каждой из компонент вектора  $x$  в тест-маневре наложим ограничения:

$$(16) \quad \begin{aligned} |\omega_N(t, b, x_0, u)| &\leq 30^{0/c}, & |\omega_e(t, b, x_0, u)| &\leq 30^{0/c}, & |\beta(t, b, x_0, u)| &\leq 3^0, \\ |w_x(t, b, x_0, u)| &\leq 5^{0/c}, & |w_y(t, b, x_0, u)| &\leq 5^{0/c}, & |\gamma(t, b, x_0, u)| &\leq 5^0, \\ & & b \in B, & x_0 \in X^0, & t \in [0, 8]. \end{aligned}$$

Первые два ограничения в (16) отражают физические ограничения скорости движения приводов, а остальные — ограничения для обеспечения безопасности тест-маневра. Дискретизация по времени (см. (10)) ограничений (16) производилась с параметром  $\Delta_C = h$ .

Задача состоит в определении такого тест-управления  $u^A(t, x(t))$ :

$$(17) \quad u_i^A(t, x(t)) = \mu u_i^{\text{апп}}(t) + \sum_{j=1}^4 L_{i,j} (\mu x_i^{\text{апп}}(t) - x_i(t)), \quad i = 1, 2,$$

на котором функционал (4) достигает минимального значения. Ограничение на элементы матрицы  $L_{i,j}$  в тест-управлении (17) принимались в виде (8)

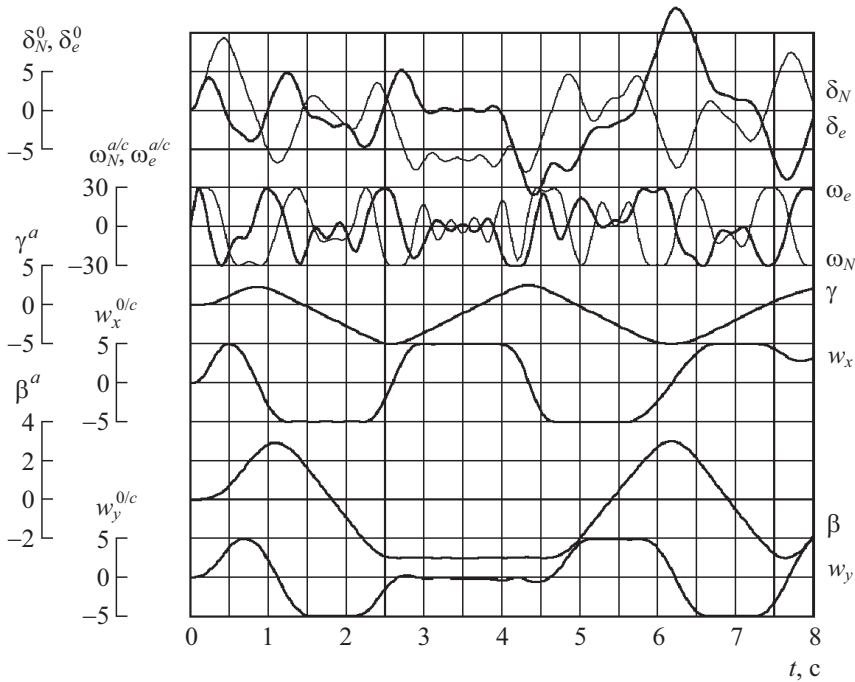


Рис. 1. Оптимальное решение задачи в классе программных управлений при  $B = b^{\text{апр}}$ ,  $X^0 = 0$ .

при  $C = 0,5, 1, 2$ . Оптимальное тест-управление  $u^A(t, x(t))$  определялось в соответствии с алгоритмом раздела 3. Оптимизация программного тест-сигнала  $u^{\text{апр}}(t)$  при  $B = b^{\text{апр}}$ ,  $x_0 = 0$  и замене ограничений (16) на ограничения

$$|\omega_N(t, b^{\text{апр}}, 0, u)| \leq 30^{0/c}, \quad |\omega_e(t, b^{\text{апр}}, 0, u)| \leq 30^{0/c}, \quad |\beta(t, b^{\text{апр}}, 0, u)| \leq 3^0, \\ |w_x(t, b^{\text{апр}}, 0, u)| \leq 5^{0/c}, \quad |w_y(t, b^{\text{апр}}, 0, u)| \leq 5^{0/c}, \quad |\gamma(t, b^{\text{апр}}, 0, u)| \leq 5^0, \quad t \in [0, 8]$$

выполнялась методом, изложенным в [7], в классе параметризованных управлений, представимых в виде

$$u_j^{\text{апр}}(t) = \sum_{i=1}^{50} d_{i+50(j-1)} \sin(2\pi it/T), \quad j = 1, 2,$$

где  $d_i$ ,  $i = \overline{1, 100}$  — оптимизируемые параметры. На рис. 1 представлена траектория  $x(t, b^{\text{апр}}, 0, u^{\text{апр}})$  системы (13)–(14), соответствующая оптимальному программному тест-сигналу  $u^{\text{апр}}(t)$  для данной задачи. Компоненты оптимального программного тест-сигнала  $u^{\text{апр}}(t)$  практически совпадают с приведенными на графике зависимостями  $\delta_N(t)$ ,  $\delta_e(t)$ . Значение критерия на оптимальном тест-сигнале равно  $\text{tr}(M^{-1}(b^{\text{апр}}, 0, u^{\text{апр}})) = 0,0036$ .

Далее в соответствии с алгоритмом раздела 3 находились оптимальные значения  $\mu$  и  $L_{i,j}$ ,  $i = \overline{1, 2}$ ,  $j = \overline{1, 4}$  в (17). В качестве начальной выборки

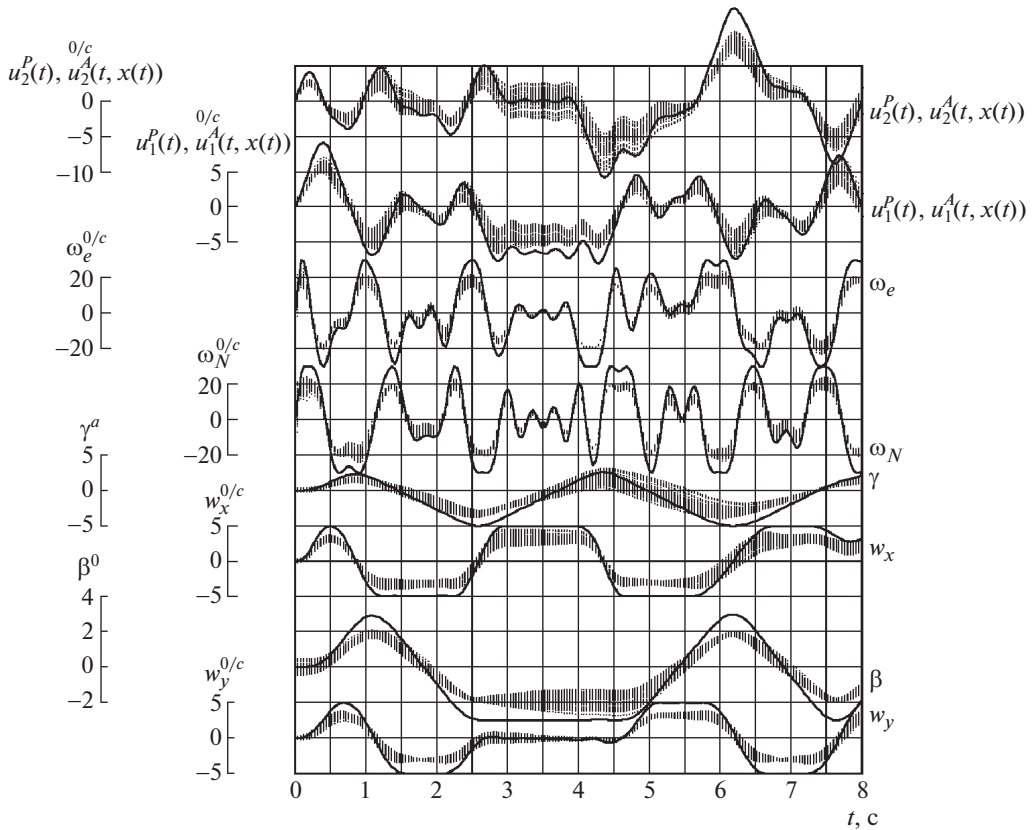


Рис. 2. Поля траекторий системы (1) на оптимальном тест-управлении при  $C = 2$ . Компоненты траектории  $x^{\text{анп}}(t) = x(t, b^{\text{анп}}, 0, u^{\text{анп}})$  показаны жирными линиями.

значений  $b^j \in B$ ,  $x_0^j \in X^0$ ,  $j = \overline{1, 32}$  принимались все угловые точки куба  $B$  при  $x_0^j = 0$ . Для нахождения тест-управлений при каждом  $C = 0,5, 1, 2$  потребовалось от пяти до восьми итераций алгоритма. Значения критерия  $\text{tr } M^{-1}(b^{\text{анп}}, 0, u^A(t, x(t)))$  на оптимальных тест-управлениях равны: 0,0089 при  $C = 2$ ; 0,011 при  $C = 1$  и 0,018 при  $C = 0,5$ .

На рис. 2 показаны поля значений компонент вектора  $x$ , вычисленных на тест-управлении  $u^A(t, x(t))$  при  $C = 2$  для 60 различных пар  $b^j$ ,  $x_0^j$  из априори возможных (т.е. для 60 возможных решений системы (13)–(14)). При  $C = 1$  и 0,5 поля компонент вектора  $x$  отличались в основном большей шириной «дорожек» значений. Из рисунка видно, что все заданные ограничения (16) удовлетворяются. Численная проверка выполнения ограничений (16) производилась для 20 000 различных пар  $b^j$ ,  $x_0^j$  при каждом значении  $C = 0,5, 1, 2$ . Оптимальное значение  $\mu$  при  $C = 2$  равнялось  $\mu = 0,75$ . Отметим, что на программном тест-сигнале  $u(t) = \mu u^{\text{анп}}(t)$  ограничения (15) нарушались бы уже при  $\mu = 0,1$ .

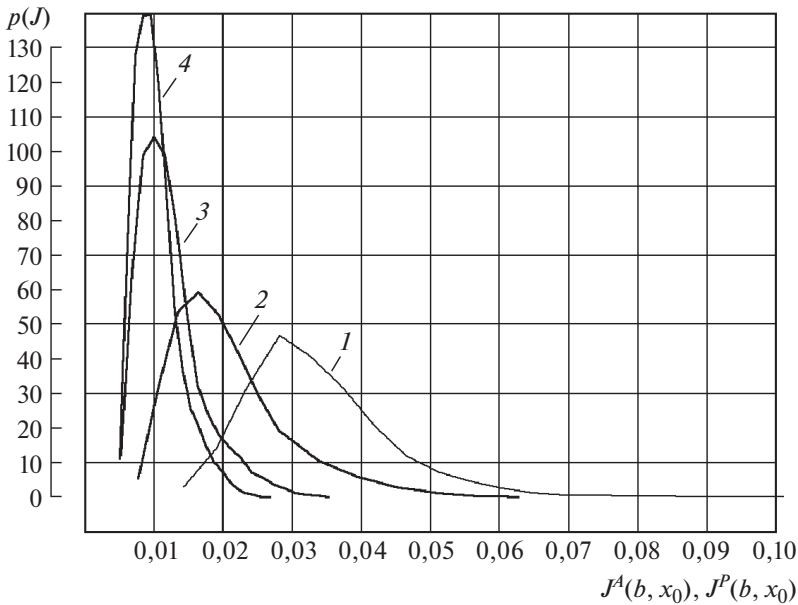


Рис. 3. Полигоны ожидаемой погрешности идентификации на оптимальном программном тест-сигнале (1) и на тест-управлениях при  $C$ , равных: 0,5 (2), 1 (3), 2 (4).

Одновременно с проверкой ограничений проверялась устойчивость системы (9). Во всех указанных случаях все собственные числа матриц  $A(b^j) - GL$  имели отрицательные действительные части.

На рис. 3 приведены полигоны ожидаемых погрешностей идентификации  $J^A(b, x_0) = \text{tr } M^{-1}(b, x_0, u^A(t, x(t)))$  на оптимальных тест-управлениях в сравнении с полигоном ожидаемых погрешностей идентификации  $J^P(b, x_0) = \text{tr } M^{-1}(b, x_0, u^P(t))$  на оптимальном программном тест-сигнале  $u^P(t)$ . Программный тест-сигнал  $u^P(t)$  для задачи (13)–(16) находился методом, изложенным в [7]. Значение критерия на оптимальном программном тест-сигнале есть  $\text{tr } (M^{-1}(b^{\text{анр}}, 0, u^P(t))) = 0,031$ .

Ожидаемые погрешности идентификации  $J^P(b, x_0)$  и  $J^A(b, x_0)$  вычислялись на решениях одних и тех же систем уравнений (13)–(14) и (6), отличающихся только входными сигналами  $u = u(t) = u^P(t)$  и  $u = u_\Sigma(t) = u^A(t, x(t))$  соответственно. Количество точек для построения полигона равнялось  $N_P = 20\,000$ .

Из рис. 3 очевидно, что тест-управление существенно лучше программного тест-сигнала. Полигоны ожидаемых погрешностей идентификации на тест-управлениях находятся левее полигона ожидаемой погрешности идентификации на программном тест-сигнале в области меньших значений ожидаемых погрешностей идентификации. Разброс возможных значений ожидаемой погрешности идентификации на тест-управлениях существенно меньше. Пра-

вые «хвосты» полигонов, соответствующие большим значениям ожидаемой погрешности, на тест-управлениях заметно короче, чем у полигона на программном тест-сигнале. При  $C = 2$  среднее значение (среднеквадратичное отклонение) ожидаемой погрешности идентификации на тест-управлении более чем в 3,2 (3,2) раза меньше, чем у ожидаемой погрешности на программном тест-сигнале, при  $C = 1$  — более чем в 2,7 (2,2) раза, при  $C = 0,5$  — более чем в 1,6 (1,2) раза. Из 20 000 реализаций значений  $b$  и  $x_0$ , из априори возможных, доля реализаций, для которых соотношение ожидаемых погрешностей идентификации на тест-сигнале и тест-управлении составило более двух, равнялась: при  $C = 2$  — 93%, при  $C = 1$  — 78%, при  $C = 0,5$  — 28%.

Отметим, что в рамках проведенного сравнения постановка задачи оптимизации программного тест-сигнала соответствовала благоприятным для идентификации условиям проведения тест-маневра: с разомкнутым контуром управления.

Оптимальные значения  $\mu$  и  $L_{i,j}$  в рассматриваемой задаче были таковы, что:  $\max_{i,j} L_{i,j} = C$ ;  $\mu = 0,75$  при  $C = 2$ ,  $\mu = 0,55$  при  $C = 1$ ,  $\mu = 0,45$  при  $C = 0,5$ . Можно предположить, что оптимальные (максимально достижимые) значения параметра  $\mu$  в управлении (7) лимитируются значением параметра  $C$  в (8). Для подтверждения данного предположения критерий (4) в данной задаче был заменен на критерий  $J = \mu$ , который максимизировался по  $\mu$  и  $L$  при тех же ограничениях (16), (8) и в том классе управлений (17). Полученные при  $C = 0,5, 1, 2$  оптимальные для критерия  $J = \mu$  значения  $\mu$  и  $L_{i,j}$  практически не отличались от соответствующих ранее полученных значений. Отметим, что задача максимизации  $\mu$  существенно проще задачи минимизации нелинейного критерия (4).

Априорная неопределенность начальных условий тест-маневра заметно влияет на эффективность тест-управления. Влияние данной неопределенности можно ослабить, если обратную связь вводить в начале тест-маневра постепенно (см. [20]). В рассмотренном примере такой прием приводит к уменьшению средней ожидаемой погрешности идентификации на тест-управлении в 4,2 раза (при  $C = 2$ ) по сравнению с погрешностью на программном тест-сигнале  $u^P(t)$ .

## 5. Заключение

Рассмотрена задача планирования эксперимента для параметрической идентификации модели движения объекта при ограничениях на допустимые возмущения вектора состояния объекта в эксперименте и априорной неопределенности относительно начальных условий эксперимента. Предложены методы решения данной задачи в классе управлений с обратной связью, обеспечивающих отслеживание такой траектории движения объекта, которая удовлетворяет заданным ограничениям и обладает хорошей информативностью об идентифицируемых параметрах. Тем самым задача планирования эксперимента сведена к хорошо изученной задаче слежения.

Область применения предложенных в статье методов ограничена задачами планирования экспериментов для уточнения характеристик автоматически управляемых объектов, в частности аэродинамических характеристик автоматически управляемых летательных аппаратов. Следует ожидать, что эффективность предложенных методов в таких задачах возрастает с ростом неопределенности априорных оценок идентифицируемых характеристик и ужесточением ограничений на допустимые возмущения вектора состояния объекта в эксперименте.

Управление, синтезированное для активной параметрической идентификации в классе управлений с обратной связью, предлагается назвать тест-управлением по аналогии с тест-сигналами, выбираемыми в классе программных управлений.

Результатами статистического моделирования, проведенного при пятидесятипроцентной априорной неопределенности относительно истинных значений идентифицируемых параметров, подтверждено, что выбором тест-управления погрешность идентификации может быть существенно уменьшена по сравнению с погрешностью идентификации на оптимальном программном тест-сигнале как в среднем, так и «по вероятности», — т.е. для большинства априори возможных траекторий движения объекта.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Касьянов В.А., Ударцев Е.П.* Определение характеристик воздушных судов методами идентификации. М.: Машиностроение, 1988.
2. *Овчаренко В.Н.* Аэродинамические характеристики летательных аппаратов: Идентификация по полетным данным. М.: ЛЕНАД, 2019.
3. *Hosseini B., Diepolder J., Holzapfel F.* Online Parameter Estimation and Optimal Input Design // MMSC. 2020. P. 128–139. CEUR-WS.org/vol-2783/paper-09.pdf.
4. *Licitra G., Burgerc A., Williamsa P., et al.* Optimal Input Design for Autonomous Aircraft // Control Engineering Practice. 2018. V. 77. P. 15–27.
5. *Овчаренко В.Н.* Планирование идентифицирующих входных сигналов в линейных динамических системах // АиТ. 2001. № 2. С. 75–87.  
*Ovcharenko V.N.* Planning of Identifying Input Signals in Linear Dynamic Systems // Autom. Remote Control. 2001. V. 62. No. 2. P. 236–247.
6. *Hosseini B., Botkin N., Diepolder J., Holzapfel F.* Robust Optimal Input Design for Flight Vehicle System Identification // AIAA Scitech 2020 Forum, 2020.  
<https://doi.org/10.2514/6.2020-0290>
7. *Григорьев Н.В.* Планирование тестовых сигналов для идентификации аэродинамических характеристик автоматически управляемых летательных аппаратов с учетом неопределенности априорных данных // АиТ. 2022. № 4. С. 125–139.
8. *Jayanti E.B., Atmasari N., Mardikasari H., et al.* Pengaruh Masukan Kendali Terhadap Hasil Identifikasi Parameter Pesawat Udara Konfigurasi Konvensional Matra Terbang Longitudinal // J. Techn. Sist. Comput. 2019. No. 7(1). P. 25–30.  
<https://doi.org/10.14710/jtsiskom.7.1.2019.25-30>
9. *Gupta N.K., Hall W.E. Jr.* Input Design for Identification of Aircraft Stability and Control Derivatives. NASA CR-2493. 1975.

10. *Белоконь С.А., Золотухин Ю.Н., Филиппов М.Н.* Метод формирования тестовых сигналов для оценивания аэродинамических параметров летательного аппарата // *Автометрия*. 2017. Т. 53. № 4. С. 59–65.
11. *Григорьев Н.В., Нестеров В.Е.* Активная идентификация АДХ возвращаемого ракетного блока в летных условиях на масштабируемом демонстраторе // *Авиакосмическая техника и технология*. 2014. № 1. С. 47–56.
12. *Lichota P.* Multi-Axis Inputs for Identification of a Reconfigurable Fixed-Wing UAV // *Aerospace*, 2020. 7. <https://doi.org/10.3390/aerospace7080113>
13. *Roeser M.S., Fezans N.* Method for designing multi-input system identification signals using a compact time-frequency representation // *J. CEAS Aeronaut.* 2021. V. 12. P. 291–306. <https://doi.org/10.1007/s13272-021-00499-6>
14. *Morelli E.A.* Flight test of optimal inputs and comparison with conventional inputs // *J. Aircr.* 36(2), 389–397 (1999). <https://doi.org/10.2514/2.2469>
15. *Morelli E.A.* Optimal Input Design for Aircraft Stability and Control Flight Testing // *J. Optim. Theory Appl.* 2021. 191. P. 415–439. <https://doi.org/10.1007/s10957-021-01912-0>
16. *Grauer J.A., Boucher M.* Aircraft system identification from multisine inputs and frequency responses / *AIAA Scitech 2020 Forum*. Orlando, FL, USA (2020). <https://doi.org/10.2514/6.2020-0287>
17. *Hosseini B., Holzapfel F.* Optimal Input Design for Flight Vehicle System Identification in Frequency Domain // *AIAA Scitech 2022 Forum*, 2022. <https://doi.org/10.2514/6.2022-2297>
18. *Берестов Л.М., Поплавский Б.К., Мирошниченко Л.Я.* Частотные методы идентификации летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1985.
19. *Талалай А.М.* Активная идентификация при адаптивном управлении // *АиТ*. 1986. № 9. С. 70–74.  
*Talalay A.M.* Active identification in the case of adaptive control // *Autom. Remote Control*, 1986. V. 47. No. 2. P. 1226–1230.
20. *Григорьев Н.В.* Активная идентификация аэродинамических характеристик: от тест-сигнала к тест-управлению // *Полет*. 2022. № 10. С. 3–11.
21. *Кан Ю.С., Кибзун А.И.* Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М.: Физматлит, 2009.
22. *Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М.* Численные методы в экстремальных задачах. М.: Наука, 1978.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галеевым.*

Поступила в редакцию 07.12.2022

После доработки 25.04.2023

Принята к публикации 28.04.2023