Автоматика и телемеханика, № 9, 2023

Обзоры

© 2023 г. **А.С. МАТВЕЕВ, д-р физ.-мат. наук (almat1712@yahoo.com)**
(Санкт-Петербургский государственный университет),
А.Л. ФРАДКОВ, д-р техн. наук (fradkov@mail.ru)
(Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург;
Санкт-Петербургский государственный университет),
А.И. ШЕПЕЛЯВЫЙ, канд. физ.-мат. наук (aishep@mail.ru)
(Санкт-Петербургский государственный университет)

ОЧЕРК ИСТОРИИ НАУЧНОЙ ШКОЛЫ В.А. ЯКУБОВИЧА[1]

Представлены основные вехи истории научной школы по кибернетике, созданной в 1959 г. выдающимся ученым В.А. Якубовичем в Ленинградском государственном университете (ЛГУ), а также связи этой школы с другими российскими и зарубежными научными школами в смежных областях.

Ключевые слова: история, кибернетика, теория управления, СПбГУ, кафедра теоретической кибернетики.

DOI: 10.31857/S0005231023090015, **EDN:** JRRGQL

В обзоре представлены основные вехи истории научной школы по кибернетике и теории управления, созданной в 1959 г. выдающимся ученым В.А. Якубовичем в Ленинградском государственном университете (ЛГУ), которой в 2024 г. исполняется 65 лет. Очерк частично опирается на материалы публикаций [1–3] по истории кафедры теоретической кибернетики Санкт-Петербургского государственного университета (СПбГУ), ее научных направлений и смежным вопросам. Авторы не ставили целью дать полный библиографический обзор результатов школы, касающихся затронутых в статье аспектов ее деятельности, частично ввиду ограничений объема статьи. Приведены либо ключевые работы, либо иллюстративные и местами субъективно выбранные примеры работ определенного тематического цикла. Авторы приносят извинения коллегам, чьи публикации не упомянуты.

Началом истории кибернетики в Санкт-Петербургском (Ленинградском) университете можно считать 1956-й год, когда на математико-механический факультет пришел 30-летний кандидат физико-математических наук Владимир Андреевич Якубович. Это было время больших перемен в обществе и в науке, начало оттепели. Появляются первые электронно-вычислительные машины (ЭВМ), а также публикации, реабилитирующие кибернетику [4, 5]. Ки-

[1] Работа выполнена при частичной поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-15-2021-573).

бернетика набирает популярность, лекции и дискуссии о ней распространяются повсеместно. При Ленинградском доме ученых возникает первая в стране секция кибернетики, которую возглавил академик и будущий нобелевский лауреат Л.В. Канторович. В Ленинградском университете появляется Вычислительный центр (ВЦ ЛГУ), а вместе с ним — научно-исследовательские лаборатории, нацеленные на освоение и использование новых, фантастических, как тогда казалось, возможностей ЭВМ. Не без влияния основополагающей книги Н. Винера [6] кибернетика воспринимается прежде всего как научная основа применения вычислительной техники и автоматических устройств. Поэтому неудивительно, что когда руководство математико-механического факультета предложило В.А. Якубовичу собрать группу исследователей в области перспективных математических методов автоматики и систем управления, «кибернетический флаг» оказался для этой группы самым подходящим. Так, в 1959 г. в ВЦ ЛГУ появилась лаборатория теоретической кибернетики (ЛТК).

Первые годы в фокусе исследований ЛТК были задачи распознавания образов и машинного обучения. В ее активе — развитие и обобщение популярной в те годы концепции перцептрона Розенблатта, несколько подходов к математической теории распознавания образов [7–9][2]. Была успешно решена целая серия поставленных заказчиками прикладных задач, среди которых распознавание почерков и аэрофотоснимков, выделение полезных сигналов из зашумленного материала, автоматическое описание и анализ сцен [11–14]. Коллективу принадлежит серия оригинальных алгоритмических разработок, касающихся как проблемы в целом, так и ее отдельных аспектов, например, алгоритм Б.Н. Козинца экономного по ресурсам памяти разделения классов [15, § 2.6]; [16, гл. 6], метод алгебраических инвариантов А.А. Шмидта в задачах распознавания изображений [16, гл. 8] и др. Осмысление накопленных на этом этапе идей привело В.А. Якубовича к общей концепции бесконечной априори неизвестной рекуррентной системы неравенств, в которую неравенства добавляются пошагово в режиме реального времени, и конечно-сходящихся алгоритмов решения таких систем в реальном времени [17]. Эта концепция и связанные с ней методы впоследствии неоднократно продемонстрировали свою продуктивность в различных областях. Ключевой подход к решению таких систем, разработанный в ЛТК, был впоследствии назван *методом рекуррентных целевых неравенств* [18].

Появление нового направления — кибернетики — с неизбежностью породило дискуссию о ее взаимоотношениях с традиционной теорией автоматического управления. Плодотворное русло для этой дискуссии проложило, среди прочих, понятие адаптивности, т.е. автономной успешной приспособляемости системы к априори существенно неопределенным условиям функционирования (как внешним, так и внутренним). В те годы в московской школе превалировали статистические подходы к развитию концепций адаптивного управ-

[2] Статья [7] была фактически первой работой на русском языке, посвященной машинному обучению. Она была перепечатана и переведена на английский язык в 2021 г. [10].

ления. В частности, Я.З. Цыпкин строил теорию адаптивных и обучающихся систем на основе методов статистического оценивания и стохастической аппроксимации [19, 20]. Параллельно В.А. Якубович разработал оригинальный альтернативный подход, который не опирается на теорию вероятностей (и в этом смысле детерминистичен) и ключевым элементом которого является метод рекуррентных целевых неравенств. В.А. Якубовичу принадлежит исторически первое общее математическое определение адаптивной системы [21, 22]. Базовый материал по теории рекуррентных целевых неравенств и адаптивного управления изложен в монографиях [15, 23]; обзор последующих работ имеется в [24–26].

Результаты возглавляемого В.А. Якубовичем коллектива в области адаптивных систем получили естественное продолжение в исследованиях по робототехнике. Первоначально во всем мире ученые старательно избегали слова «робот» и его производных, полагая их несерьезными, пригодными максимум для научной фантастики. Есть основания полагать, что пионером в плане конституирования «робота» как ныне общепризнанного научного понятия выступил В.А. Якубович в статье [21], опубликованной в Докладах Академии наук СССР (ДАН СССР). В ней на основе метода рекуррентных целевых неравенств была решена задача о самообучении робота-манипулятора (робот «глаз–рука») и доказан ряд теорем про «разумность роботов» в смысле введенного в этой статье определения.

Практически во всех индустриально развитых странах конец 60-х и начало 70-х годов ознаменовались бурным ростом интереса к автоматизации производства на основе применения роботов-манипуляторов с элементами искусственного интеллекта. На гребне этой волны в 1973 г. в ЛТК была сформирована группа робототехники, которую возглавили ученики В.А. Якубовича — д-р техн. наук А.В. Тимофеев [27–29], а затем канд. физ.-мат. наук С.В. Гусев [30, 31]. Среди основных «робототехнических» достижений ЛТК этого периода — построение математической теории адаптивных роботов и теории их обучения сложному целесообразному поведению [32–34]. Дееспособность этой теории была вначале продемонстрирована яркими примерами решения прототипических задач, например задачи обучения робота езде на двухколесном велосипеде, а также обучения других адаптивных роботов, которые в качестве питомцев в коллективе получили домашние прозвища «кузнечик», «ястреб», «глаз-рука» и др. Значимость решенных задач подчеркивает тот факт, что соответствующие результаты в 1972 г. были отобраны международным оргкомитетом для представления на Всемирном конгрессе по автоматическому управлению в Париже [35] (шутили, что В.А. Якубович в качестве докладчика съездил в Париж на велосипеде). В дальнейшем эффективность развитой в коллективе теории была продемонстрирована экспериментами (одними из первых в стране) с реальными колесными роботами [30], начатыми в 1974 г.; в 1980 г. они были продолжены с использованием разработанного в ЛТК более продвинутого экспериментального робота [36]. В 1980-х гг. группа робототехники ЛТК принимала участие в разработке системы управления манипулятором в рамках проекта «Буран» космического шаттла многоразового использовния. В 1970–80-х гг. коллективом ЛТК была также развита теория адаптивного управления робототехническими системами, описываемыми общими уравнениями Лагранжа [37–40]; эти исследования были во многом пионерскими и лежат у истоков последующего масштабного развития этого направления в мире.

Бурное развитие кибернетики и теории управления в 1960-х гг. привело к появлению большого числа разнообразных алгоритмов управления, адаптации, распознавания, обучения, оценивания, фильтрации. Возникла потребность обобщения полученных результатов и унификации предложенных алгоритмов, выявления их ключевого идейного ядра. По-видимому, первым эту потребность почувствовал Я.З. Цыпкин [19, 20], предложивший рассматривать различные задачи распознавания, оценивания, управления и т.д. как задачи минимизации среднего определенной функции потерь. В результате хаотическую массу существовавших тогда разрозненных алгоритмов удалось представить в виде систематизированных частных случаев единообразных вероятностных градиентных итеративных процедур минимизации или оценивания параметров. Однако относящиеся к случаю непрерывного времени основные алгоритмы адаптации (самонастройки) и управления в эту схему не укладывались. В результате атак с разных направлений постепенно выяснилось, что унификация упомянутых алгоритмов возможна, если в схеме Я.З. Цыпкина перейти от градиента целевой функции к градиенту скорости ее изменения вдоль траекторий объекта управления. По-видимому, наиболее общий и законченный подход к реализации этой идеи был предложен и разработан А.Л. Фрадковым [41] и назван им *методом скоростного градиента*.

Первоначально метод был в основном ориентирован на задачи адаптивного управления и идентификации. В результате последующих исследований, растянувшихся на многие годы, метод получил развитие и применение как универсальный подход к решению различных задач синтеза непрерывных динамических систем в математических, физических, инженерных, биологических и других науках. На его основе, например, было найдено решение задач управления и синхронизации для широкого класса колебательных, в том числе хаотических, систем. Эти результаты открыли новые перспективы в вибрационной технике, лазерных и химических технологиях, системах передачи информации. Простота применения метода, а также доступность строгого математического обоснования полученных алгоритмов обусловили его признание в качестве инструмента исследований как у нас в стране, так и за рубежом. Число публикаций, где метод в том или ином виде применяется, постоянно растет и ныне достигает нескольких сотен. В последнее время возрос интерес к методу скоростного градиента и в качестве инструмента постижения законов эволюции, позволяющего лучше понять динамику физических, биологических и других систем. В такой ипостаси метод известен как *принцип скоростного градиента* [42, 43].

В начале 70-х гг. в ЛТК была создана группа бионики под руководством доктора психологических наук Р.М. Грановской. Задачей группы было изучение и моделирование феноменов восприятия и узнавания, а также механизмов памяти живых организмов, включая человека [44, 45]. Был проведен большой объем экспериментальных и теоретических исследований, а полученные результаты во многом были мотивированы и активно внедрялись заинтересованными организациями.

В 1970 г. на базе ЛТК возникла кафедра теоретической кибернетики (КТК). Ее первый выпуск был уже в 1971 г. и состоял из трех специалистов: Г.С. Аксенова, Б.Д. Любачевского и А.Л. Фрадкова. ЛТК и КТК фактически были единым коллективом, занимавшимся общим делом и с минимальным влиянием формального распределения сотрудников по ЛТК и КТК. Сотрудники ЛТК занимались преподаванием, а члены КТК вели научные исследования на общие с ЛТК темы и очень часто совместно с коллегами из ЛТК. Обсуждение уместных компонентов этих исследований систематически переводилось из стен лаборатории в учебные аудитории, так что еще в процессе освоения профессиональной базы студенты приобщались к переднему краю области. Например, сотрудники ЛТК-КТК часто рассказывали на лекциях новые, еще не опубликованные результаты. Иногда студенты изучали доказательства теорем, которые были получены только накануне. Возникало чувство живого участия в математическом творчестве, ощущение себя на переднем крае науки. Бывало, что студенты находили неточности в доказательствах или предлагали способы усовершенствовать рассуждения. Таким студентам приносились благодарности в публикациях, что вызывало чувство гордости и желание двигаться дальше. Недаром девиз кафедры с давних лет — Docendo discimus, что означает «обучая, учусь».

Помимо чисто кибернетического направления (распознавание, машинное обучение, искусственный интеллект, адаптивные системы, роботы и т.п.), область научных интересов коллектива охватывала и охватывает целый ряд классических разделов математики и теории управления. Они касаются линейных дифференциальных уравнений, динамических систем и параметрического резонанаса (В.А. Якубович, В.Н. Фомин, В.И. Дергузов), устойчивости и колебаний в нелинейных динамических системах, включая системы фазовой синхронизации и автоподстройки частоты, устойчивости и колебаний в импульсных системах (Г.А. Леонов, А.И. Шепелявый, А.Х. Гелиг, А.Н. Чурилов), оптимального управления (А.С. Матвеев, А.Е. Барабанов, В.А. Якубович), теории оценивания и фильтрации (В.Н. Фомин, А.Е. Барабанов), и др.

Еще до создания лаборатории и кафедры В.А. Якубович получил фундаментальные результаты, касающиеся устойчивости линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и параметрического резонанса. Им была доказана гипотеза И.М. Гельфанда о том, что в функциональном пространстве коэффициентов двумерных гамильтоновых систем множество коэффициентов, соответствующее устойчивым системам, распадается на счетное число связных областей, и показано, что популярный в те годы в этой тематике критерий Ляпунова относится только к одной из них. В.А. Якубович получил критерии устойчивости для каждой области, которые, как и упомянутый критерий Ляпунова, неулучшаемы в определенном естественном смысле. Эти результаты были затем перенесены В.Н. Фоминым и В.А. Дергузовым на системы с бесконечномерным фазовым пространством. Фундаментальная монография [46] подвела промежуточные итоги развития этого направления и до сих пор в ранге бестселлера активно цитируется в трудах не только математиков, но физиков и инженеров.

Среди многочисленных научных результатов коллектива, пожалуй, наибольшую известность и влияние приобрели достижения, связанные с так называемой «частотной теоремой», также известной под названиями «Лемма Якубовича–Калмана» и «Лемма Калмана–Якубовича–Попова» (KYP-lemma). Она была доказана В.А. Якубовичем и впервые опубликована в 1962 г. [47]. Эта теорема дает математически красивые, прозрачные и конструктивные условия разрешимости достаточно сложной системы соотношений, которая встречается в самых разных задачах теории устойчивости, автоматического управления, робототехники и других областей и решение которой, в свою очередь, является ключом к решению основной задачи и ее качественному анализу. Значение и авторитет частотной теоремы — производные ее продуктивности применительно к целому спектру разнообразных областей и задач, где она придала второе дыхание методу функций Ляпунова. Например, она позволила получить целую серию новых конструктивных критериев абсолютной устойчивости, неустойчивости, автоколебательности, существования устойчивых в целом периодических и почти периодических режимов в разнообразных нелинейных системах, продвинуть исследования так называемых странных аттракторов таких систем, развить новые методы оптимального и адаптивного управления; часть этих результатов была изложена в 1978 г. в монографии [48]. Эта книга до сих пор актуальна и интересна ученым разных стран, о чем свидетельствует, в частности, издание ее английского перевода в 2004 г. Более того, обсуждаемая лемма позволила получить своего рода исчерпывающие результаты, заведомо охватывающие все условия того или иного поведения системы, которые могут быть получены на основе функций Ляпунова из определенных популярных классов (например, функций вида «квадратичная форма», «квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности» и т.д.).

Частотную теорему неслучайно иногда называют «Великой леммой теории систем»: она «официально» признана международным научным сообществом в качестве одного из краеугольных камней современной теории управления. Этот факт, например, отражен присутствием работы В.А. Якубовича по частотной теореме [47] в специальном сборнике *Twenty Five Seminal Papers in Control* (Wiley—IEEE Press, 2000), где приведены 25 статей, оказавших наибольшее влияние на развитие теории управления в XX в. согласно мнению авторитетной международной комиссии ведущих ученых, созданной Обществом систем управления (Control systems society) международного Института инженеров в области электротехники и электроники (IEEE).

Вначале частотная теорема была доказана для систем управления, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Впоследствии она была распространена в разных направлениях, в частности, перенесена на многие другие классы управляемых систем. Среди них системы с дискретным временем, стохастические системы, адаптивные системы, системы с бесконечномерным фазовым пространством (например, описываемые уравнениями в частных производных, уравнениями с запаздывающим аргументом, дифференциальными уравнениями в бесконечномерном гильбертовом пространстве, интегральными уравнениями и т.п.), системы над упорядоченными полями [49–59]. Эти достижения в подавляющем большинстве были не самоцелью, а дорогой к россыпи новых самодостаточных результатов, раздвигающих границы понимания соответствующих областей, например, к критериям абсолютной устойчивости и неустойчивости для рассматриваемых классов систем. В этом научном развитии школа В.А. Якубовича шла, взаимообогащаясь, рука об руку с другими научными школами, например, с нижегородской (В.А. Брусин, П.В. Пакшин, В.А. Угриновский и др.) [60–64]. История и современное состояние этого направления подробно отражены в обзорах [65, 66] и в коллективной монографии [3].

Отметим, что в [55, 56] были получены необходимые и достаточные условия существования линейной обратной связи по выходу линейной системы, обеспечивающей существование у нее квадратичной функции Ляпунова. Это свойство системы эквивалентно ее пассивности, означающей выполнение некоторого неравенства типа диссипации на траекториях системы. Поэтому результаты [55, 56] можно назвать теоремами о пассификации линейных систем. Эти утверждения легли в основу общего подхода к синтезу систем, названного методом пассификации (passification, passivation). Впоследствии метод пассификации был распространен на широкий класс задач управления и оценивания для нелинейных и адаптивных систем [67–70]. Метод пассификации сейчас применяют исследователи из различных стран [71–73]. В России он активно используется, в частности, в научной школе университета ИТМО (В.О. Никифоров, А.А. Бобцов и др.) [74, 75, 141].

Широта применимости частотной теоремы стимулировала В.А. Якубовича к построению абстрактной теории абсолютной устойчивости, которая, используя аппарат функционального анализа, не только обобщает массу известных результатов, но и создает комфортную базу их распространения на все новые типы уравнений. Отметим также, что исследования по частотной теореме связаны с ныне ультрапопулярным методом линейных матричных неравенств, что позволило авторам книги [77] назвать В.А. Якубовича «отцом» основанного на этом методе научного направления (в почетной компании с А.М. Ляпуновым в качестве «дедушки»). В мире масса адептов этого направления, которые давно и успешно развивают его применительно к удивительно широкому спектру областей.

Частотная теорема родилась в исследованиях по устойчивости положений равновесия нелинейных динамических систем как ответ на вопрос об условиях существования квадратичной функции Ляпунова, общей для целого класса таких систем, описываемого определенным образом с использованием квадратичной формы. Впоследствии ее фундаментальный характер проявился в открытии и эффективном использовании ее связей с целым рядом других областей. Среди исторически первых из них — теория оптимального управления. Здесь частотная теорема оказалась мощным конструктивным средством проверки разрешимости так называемых линейно-квадратичных задач (сочетание линейной системы управления и квадратичного функционала качества) и синтеза их решений в инженерно привлекательной форме оптимального регулятора.

Основы линейно-квадратичной теории оптимального управления были заложены классическими работами Р. Калмана [78], Н.Н. Красовского [79] и А.М. Летова [80] (а в части, касающейся стохастических объектов, исследованиями А.Н. Колмогорова [81], Н. Винера [82], С. Бьюси [83]); значительный вклад в ее развитие внесли Я.К. Виллемс, В.И. Зубов, В.М. Кунцевич, А.Б. Куржанский, Ж.Л. Лионс, А.И. Лурье, В.И. Уткин, В.А. Якубович и многие другие ученые (о истории линейно-квадратичной теории оптимального управление см. обзоры в [84, 85]). Методически эта область имеет важные связи с комплексным анализом, теорией устойчивости и стабилизации нелинейных динамических систем ([77, 86–88] и др.). В первую очередь это касается так называемых неопределенных систем (uncertain systems), где эпитет отражает типичную для приложений ситуацию, когда полная информация о системе отсутствует. Начиная с конца 60-х гг. поток научных публикаций, относящихся к обсуждаемой области, принял лавинообразный характер; заметный интерес к ней сохранился до настоящего времени. Среди причин этого — общепризнанный практический эффект линейно-квадратичной теории оптимального управления. Например, по данным, приведенным в пленарном докладе профессора M. Morari [89] на второй европейской конференции по управлению (the Second European Control Conference, Groningen, the Netherlands,1993), среди различных разделов современной математической теории управления линейно-квадратичная теория занимает почетное второе место по интенсивности применения в промышленных разработках гражданского профиля. (Первое занимает теория ПИД-регулирования.)

В теории линейно-квадратичной оптимизации школа В.А. Якубовича системно развивала подход, основанный на частотной теореме. В работах В.А. Якубовича, А.И. Шепелявого, А.Л. Лихтарникова, А.В. Мегрецкого, С.Г. Семенова, Д.В. Пляко, А.В. Савкина и др. указанный подход был, в частности, распространен на широкий класс разнообразных важных задач и систем, который включает, помимо прочего, системы с непрерывным и дискретным временем, с бесконечномерным фазовым пространством, задачи, возникающие в конфликтной ситуации (дифференциальные игры), и с эффектом сингулярности [85], который может приводить к отсутствию решения в традиционном смысле.

Частотная теорема как критерий существования квадратичной функции Ляпунова традиционно и часто дополняется специальным приемом построения такой функции — так называемой S-процедурой [90]. В [91] последнее понятие было абстрагировано от функций Ляпунова и ему был придан смысл замены (в определенном смысле) системы нескольких неравенств одним неравенством со свободным параметром. Ключевой вопрос — "Эквивалентна ли замена?"; при утвердительном ответе говорят о неущербности S-процедуры, а соответствующее утверждение называют также "S-леммой". Этот вопрос имеет отношение к целому ряду областей математики [77], например к двойственности в экстремальных задачах, теории матриц и операторов. Особо продуктивной для теории управления оказалась ситуация квадратичных неравенств, в которой неущербность S-процедуры смыкается с эффектом скрытой (в смысле неочевидности) выпуклости образов квадратичных отображений [66]. Классические результаты такого рода — теорема Дайнса (две квадратичные формы трансформируют вещественное линейное пространство в выпуклое множество) и теорема Теплица–Хаусдорфа (две непрерывные эрмитовы формы трансформируют сферу комплексного гильбертова пространства в выпуклое множество).

Первые исследования школы по неущербности S-процедуры [92, 93] стартовали на рубеже 1970-х гг. и касались не более трех неравенств. В основном они не покидали идейного поля теорем Дайнса и Теплица–Хаусдорфа, в котором, согласно П. Халмошу [94] "все известные доказательства основаны на вычислениях, хотя хотелось бы иметь идейное доказательство, пусть даже (или особенно?) с использованием менее элементарных понятий". Дальнейшие исследования школы по обсуждаемой тематике можно трактовать как движение в указанном русле, где основной целью было обобщение на произвольное число форм (недостижимое в общем случае). Заметный импульс этим исследованиям был придан работой [95] учеников В.А. Якубовича и Н.К. Никольского, где выпуклость совместного образа была установлена для произвольного числа форм, но в очень специальной ситуации, мотивированной теорией управления. Эта специализация была довольно быстро преодолена В.А. Якубовичем совместно с чуть позже присоединившимся к этой тематике А.С. Матвеевым, которые получили серию общих результатов по неущербности S-процедуры и скрытой выпуклости квадратичных функционалов. В этих работах в качестве менее элементарной общей причины выпуклости фигурировали инвариантность форм относительно операторов сдвига и слабая сходимость к нулю сдвинутых элементов пространства (как, например, в $L_2(0,\infty)$ при сдвиге на $T \to \infty$) [96]. Эти результаты касались важных задач теории управления, но не охватывали классические теоремы Дайнса и Теплица–Хаусдорфа. Впоследствии А.С. Матвеевым были получены еще более общие критерии выпуклости совместного образа произвольного числа форм, которые уже «автоматически» охватывали указанные классические результаты и в качестве «менее элементарной» причины выпуклости предъявляли определенные свойства (заведомо выполненные в классическом случае) периферийной части спектра пучка операторов, порожденного формами [97–99]. В этом цикле работ была также развита теория приближенной выпуклости образов квадратичных отображений с оценками дефекта, открыто и исследовано свойство гипер-овыпукления, а результаты распространены на отображения более общие, чем квадратичные. Ряд результатов в этом направлении был получен также выдающимся ученым Б.Т. Поляком [100, 101]. Черпая мотивацию в стохастической теории управления, Н.Г. Докучаев (при участии В.А. Якубовича) развивал параллельную идеологию, связанную с эффектом А.А. Ляпунова (выпуклость образа безатомной векторной меры).

На рубеже 2000-х гг. было сделано важное открытие, которое представило в совершенно новом свете взаимоотношения и взаимодействие S-процедуры и частотной теоремы. А именно, в [102] было дано новое доказательство частотной теоремы, основанное на теореме о неущербности S-процедуры (S-леммы). В результате можно сказать (цитируя [66]), что “частотная теорема и S-процедура долгое время жили, образно выражаясь, как дружные соседи, и вот, спустя столько лет, все узнали, что они еще и родственники”.

Работа [102] дала толчок исследованиям, связанным с так называемой обобщенной частотной теоремой (обобщенной KYP-леммой), устанавливающей важные для дальнейших приложений свойства, эквивалентные выполнению частотных неравенств в некотором ограниченном частотном диапазоне. Соответствующие результаты дают новые инструменты анализа и синтеза систем, связанные с частотными неравенствами, выполненными в конечном диапазоне частот [102, 103]. Оказалось, что выполнение стандартного частотного неравенства в конечном диапазоне частот эквивалентно справедливости некоторых неклассических линейных матричных неравенств для пары матриц P, Q; эти неравенства в определенном смысле аналогичны и “заменяют” неравенства для единственной матрицы P в классической формулировке KYP-леммы. В [104] было показано, что выполнение частотных неравенства в конечном диапазоне частот, в свою очередь, эквивалентно выполнению определенного неравенства (типа неравенства диссипации) только на части траекторий системы, определяемой дополнительным интегральным матричным неравенством (так называемая, ограниченная диссипативность [104]). Таким образом, было получено полное распространение классических KYP-результатов на “конечно-частотный” случай. В [105] получено дальнейшее обобщение указанных результатов на случай “конической” S-процедуры, позволяющее работать в ситуации бесконечного числа ограничений. Конечно-частотная версия частотной теоремы уже нашла применение при решении целого ряда практических задач [106–108].

Три магистральных научных направления школы — частотная теорема, S-процедура, линейно-квадратичная оптимизация — в 1990-х слились в исследованиях по методам невыпуклой глобальной оптимизации. Точнее, речь идет о разработке общего подхода, позволяющего на базе этих направлений стандартным образом строить эффективные алгоритмы решения специальных задач, относящихся к области невыпуклой глобальной оптимизации. В отличие от большинства методов данной области, которые в основной массе являются вычислительными, часто основаны на эвристических идеях и не всегда сопровождаются гарантией сходимости, упомянутые алгоритмы основаны на математической теории, являются в наиболее существенной части аналитическими и гарантированно приводят к нахождению глобального оптимума. Упомянутый подход был предложен В.А. Якубовичем в 1992 г. [109, 110] , его дальнейшему развитию посвящены работы В.А. Якубовича, А.С. Матвеева, Н.Г. Докучаева. Подход предусматривает обоснование основных соотношений теории выпуклой двойственности для рассматриваемых невыпуклых задач оптимизации и применение основанного на них правила (Якубовича) решения задачи. Оно корректно далеко не всегда. Хотя было установлено, что правило верно всякий раз, когда оно результативно (выдает непустое множество ответов), наибольший интерес представляют критерии, которые позволяют убедиться в применимости правила априори, т.е. до начала его применения, на основе (обычно несложной) проверки определенных свойств исходных данных задачи. Был установлен ряд таких критериев, причем именно они во многом служили основной целью охарактеризованных выше исследований образов квадратичных отображений.

В конце 70-х гг. В.А. Якубович инициировал обширный цикл исследований коллектива по построению теории принципа максимума в задачах оптимального управления в рамках абстрактного подхода. Этот подход подразумевает выбор в качестве основного объекта изучения некоторой абстрактной модели, описываемой языком функционального анализа. Полученные для нее результаты предлагается затем интерпретировать применительно к тем конкретным моделям, с которыми сталкивается исследователь. Таким образом, при работе с разнообразными приложениями этот подход позволяет сократить объем рассуждений, так как их значительная часть уже проделана раз и навсегда в рамках абстрактной теории. Достоинство абстрактного подхода состоит и в единообразии процедуры вывода условий оптимальности. Методически он дает возможность изложить основные идеи более доступно и просто, так как они не заслоняются антуражем конкретной модели.

Подобные абстрактные теории были разработаны многими авторами. В.А. Якубович предложил собственный, оригинальный подход к построению абстрактной теории оптимального управления. Характеристическая черта подхода состоит в разработке аппарата исчисления дифференциалов по пучкам кривых в условиях, когда кривые, вообще говоря, недифференцируемы. На этой основе для абстрактной модели задачи оптимального управления устанавливается абстрактный принцип максимума. Он, в частности, поясняет, почему принципы максимума, аналогичные понтрягинскому, естественно возникают как необходимые условия оптимальности в очень, на первый взгляд, разных задачах, выделяя общие свойства задачи, предопределяющие указанную форму ответа. Обсуждаемый подход также позволил единообразно строить теорию необходимых условий как первого, так и высших порядков в задачах с ограничениями: все они оказываются частями некоторого единого условия [111]. Обсуждаемый подход был развит в разных направлениях в обширном цикле работ В.А. Якубовича и его учеников, на его основе был получен целый ряд самодостаточных новых результатов; некоторые из них (например, касающиеся оптимального управления системами, описываемыми уравнениями в частных производных) существенно опередили аналогичные разработки в мире. Некоторые итоги этого развития систематизированы в книгах А.С. Матвеева и В.А. Якубовича [111, 112]. По замыслу цель учебного пособия [112] состояла в том, чтобы научить читателя самостоятельно применять абстрактную теорию к новым задачам. Книга содержит 75 задач на применение этой теории. Некоторые из них соответствуют уровню научных публикаций недавнего прошлого, вместе с тем с ними успешно справляются студенты четвертого курса математико-механического факультета СПбГУ.

С момента возникновения ЛТК и КТК на их командном мостике было два помощника капитана: А.Х. Гелиг и В.Н. Фомин. В фокусе основных интересов А.Х. Гелига был анализ динамики импульсных систем с различными видами импульсной модуляции. В этой области им был разработан новый подход, основанный на потактовом усреднении импульсного сигнала и теории абсолютной устойчивости непрерывных нелинейных систем. В отличие от классического метода усреднения, усреднение по Гелигу не асимптотично по своему характеру и позволяет получить явную оценку требуемой частоты дискретизации. Классические теоремы теории абсолютной устойчивости нелинейных систем (такие как знаменитый круговой критерий и критерий В.М. Попова, а также критерии устойчивости периодических режимов) при этом получаются как предельные случаи при стремлении величины периода дискретизации к нулю, в связи с чем можно говорить о достижении высокой степени унификации построенной теории. Соответствующий цикл работ был подытожен в совместной монографии А.Х. Гелига и А.Н. Чурилова [113], расширенный вариант которой опубликован на английском языке в издательстве Birkhauser. В круг долговременных интересов А.Х. Гелига также входили вопросы аналитического синтеза регуляторов для управления нелинейными системами. В контакте со своими многолетними соавторами И.Е. Зубер и А.Н. Чуриловым им получено решение разнообразных задач устойчивости и стабилизации для непрерывных, импульсных и дискретных систем как в случае управления по состоянию, так и в случае управления по выходу системы [114]. А.Х. Гелиг был среди пионеров исследования нелинейной динамики нейронных сетей в СССР [115], а совместно с В.А. Якубовичем и

Г.А. Леоновым — исследования вопросов устойчивости систем с неединственным положением равновесия [48].

В.Н. Фомин начал свою научную деятельность с исследования параметрического резонанса в гамильтоновых системах, описываемых уравнениями в частных производных. Здесь ему удалось построить достаточно полный аналог конечномерной теории на базе метода Галеркина и разработанного им варианта метода возмущений. После защиты в 1971 г. по этой теме докторской диссертации научные интересы В.Н. Фомина переключились в область математической теории кибернетических систем. Особое внимание он уделял темам, связанным с машинным обучением и адаптивными системами, демонстрируя энциклопедичный охват тематики. Его монография [116] и когерентный ей курс лекций были одними из первых в стране по этим столь актуальным темам и рисовали широкую картину области, не ограниченную рамками какого-то одного коллектива или подхода. Книга [116] в 1976 г. была удостоена первой премии ЛГУ в области научных работ. Постепенно набрало силу и третье основное направление работ В.Н. Фомина: математическая теория фильтрации и теория управления, прежде всего, в ее вероятностном варианте [117–119] . Здесь им получены многочисленные результаты, касающиеся, помимо прочего, стохастической линейно-квадратичной задачи оптимального управления, спектральной факторизации, оптимального оценивания случайных процессов и полей, разработаны методы синтеза оптимальных фильтров при обработке пакета случайных плоских волн на фоне распределенных шумов. Результаты этого цикла имеют важные приложения в теории радарных и коротковолновых средств связи, в подводной акустике, радиоастрономии, сейсмологии, геофизике и в системах телевизионного слежения. Общая для школы В.А. Якубовича тенденция по использованию мощи функционального анализа в теории управления не обошла стороной и В.Н. Фомина. В последние годы перед безвременным уходом он активно и азартно разрабатывал операторный подход к задачам фильтрации и связанным задачам управления. В результате ему, в частности, удалось построить единую теорию оптимальной фильтрации, непринужденно охватывающую теорию Винера–Колмогорова оптимальной фильтрации стационарных процессов и Калмана–Бьюси рекуррентной фильтрации и к тому же имеющую широкую сферу приложимости. Энергия, харизма и искрометный юмор Владимира Николаевича делали его драйвером практически любого мероприятия (семинара, лекции и т.п.), в котором он участвовал, а основная претензия студентов, которым посчастливилось слушать его лекции, на них никак и никогда не удавалось заснуть.

В 1969 г. в ЛТК появился новый аспирант — Г.А. Леонов. В 1971 г. он защитил кандидатскую диссертацию и продолжил работу в лаборатории и на кафедре. Постепенно в рамках традиционных для ЛТК-КТК подходов под его началом формируется индивидуальное научное направление. За фундаментальными результатами по теории устойчивости и синхронизации нелинейных колебаний в фазовых системах [48, 51, 120, 121] последовали пионерские работы и книги по теории управления и стабилизации линейных управляемых систем [122, 123] и качественному исследованию глобальных аттракторов динамических систем: неустойчивость, бифуркации, синхронизация, оценки размерностей [124, 125]. В 2007 г. Г.А. Леонов возглавил вновь созданную на математико-механическом факультете СПбГУ кафедру прикладной кибернетики и с этого момента стал частью ее истории.

У В.А. Якубовича и старшего поколения его учеников острый интерес к практическим задачам естественно сочетался с (модифицированным авторами) тезисом И. Канта «в каждой... науке столько истины, сколько в ней содержательной математики». Среди следующего поколения ярким адептом этой философии был А.Е. Барабанов, ученик В.Н. Фомина. Коллеги неоднократно восхищались способностью Андрея Евгеньевича к применению глубоко нетривиальных математических ходов в казалось бы вполне рутинных, хотя и важных прикладных задачах. И, что более существенно, это приносило успех, подтверждая приведенный тезис. Спектр интересов А.Е. Барабанова был обширен. В качестве иллюстрации отметим важные работы по оборонной тематике, разработки (совместно с сотрудниками кафедры системного программирования СПбГУ) помехозащищенных dial-up модемов для сильно зашумленных коммутируемых линий, систем обработки радарных сигналов сначала для НПО «Равенство», а затем для одного из крупнейших мировых производителей навигационного программного обеспечения для морского судоходства — компании «Transas» (которая в 1990-х–2010-х гг. по мнению экспертов, например, А.Н. Терехова[3] была монополистом рынка бортового программного обеспечения), систем анализа звуковых сигналов дельфинов, систем анализа и синтеза речи (в творческом контакте с кафедрой фонетики СПбГУ). По последней тематике А.Е. Барабанов разработал и читал передовые курсы лекций. В фокусе его теоретических исследований были вопросы синтеза оптимальных и субоптимальных регуляторов [126, 127], где он получил серию важных и подчас неожиданных результатов. В качестве примера укажем, что в 80-х гг. им была решена задача синтеза оптимального регулятора при равномерно ограниченных возмущениях и на этой основе построена новая теория L_1-оптимального управления. Пионерская работа А.Е. Барабанова и О.Н. Граничина по этой тематике [126] намного опередила аналогичные зарубежные публикации. В дальнейшем О.Н. Граничин (также ученик В.Н. Фомина) систематически развивал подходы, основанные на рандомизации в системах управления, что позволило получить условия работоспособности систем при «почти произвольных» (неизвестных, но ограниченных) помехах [128, 129].

На рубеже тысячелетий в научном сообществе сформировалось понимание, что с одной стороны, непрерывный физический процесс, взаимодействующий с управляющим дискретным (цифровым) вычислительным устройством — неуклонно распространяющееся сочетание, за которым будущее.

[3] `https://www.rbc.ru/spb_sz/22/03/2018/5ab26f809a7947027cb81160`

И что, с другой стороны, имеющиеся инструменты математической теории не готовы, в требуемой мере, к работе с этим сочетанием. Его математической моделью является гибридная динамическая система (ГДС), т.е. система, описываемая как непрерывными, так и дискретными фазовыми переменными, оказывающими двустороннее влияние на эволюцию друг друга. В конце 1990-х интерес к математическому моделированию и построению теории таких систем можно было охарактеризовать как своего рода бум.

Начиная с 1997 г. ученики В.А. Якубовича — А.С. Матвеев и А.В. Савкин — проводили совместные исследования по качественной теории ГДС. Ими были заложены основы такой теории для достаточно общего класса ГДС и получены одни из первых общих доказательных результатов в этой области. Эти результаты опубликованы в ведущих международных журналах, а также в монографии [130], по-видимому, первой в мире по этой тематике. Обсуждаемый цикл работ сфокусирован на общем классе ГДС переключательного типа, т.е. систем, для которых непрерывные фазовые переменные не претерпевают скачков. Получены, помимо прочего, необходимые и достаточные условия сильной детерминированности системы, инвариантности заданной области, критерии существования и глобальной устойчивости предельных циклов, аналоги классической теоремы Пуанкаре–Бендиксона, разработан метод синтеза распределенных алгоритмов переключения процессоров, обеспечивающих возбуждение и глобальную устойчивость заданных (оптимальных) колебательных процессов в крупномасштабных потоковых сетях, и др. Работоспособность разработанной общей теории продемонстрирована продуктивным исследованием целого ряда представляющих самостоятельный интерес моделей информационных, компьютерных, транспортных и других сетей, гибких производственных систем, биотехнологических и других процессов.

Различными аспектами задачи дискретизации непрерывных систем в общем контексте построения теории ГДС активно занимался В.А. Бондарко [131, 132]. Например, для линейных стационарных объектов им было проведено сравнение различных методов дискретизации в плане их адекватности, связи между собой и асимптотики свойств дискретных моделей при увеличении частоты квантования по времени. Занимаясь параллельно развитием теории конечно-сходящихся алгоритмов решения счетных систем неравенств, В.А. Бондарко получил важные результаты в области адаптивного управления, включая управление нелинейными системами и системами с бесконечномерным фазовым пространством.

Начиная с середины 1990-х гг. В.А. Якубович со своим учениками, среди которых особую роль сыграл А.В. Проскурников, вдохнул новую жизнь в традиционную для школы тематику, связанную с линейно-квадратичной оптимизацией и частотной теоремой, опубликовав цикл из примерно 20 работ по оптимальному гашению колебаний, оптимальному отслеживанию сигналов и теории инвариантности [133–138]. В рамках этого цикла во вполне классические для теории управления темы был привнесен ряд пионерских моментов, в том числе разработана концепция «универсального регулятора», обеспечивающего оптимальность при всех заранее неизвестных помехах и отслеживаемых сигналах, а также инвариантность выхода системы относительно внешнего возмущения. Основополагающая работа [133] цикла получила премию Международной академической издательской компании «Наука» за лучшую публикацию 1995 г., а на Европейской конференции по управлению 1995 г. В.А. Якубович выступал на эту тему с пленарным докладом [134]. За обсуждаемый цикл работ А.В. Проскурников был награжден в 2008 г. медалью и премией РАН для молодых ученых.

Начиная примерно с начала 2000-х в мире значительный интерес специалистов в области физики, математики и информатики привлекает феномен формирования, как сейчас принято говорить, роевого интеллекта в сложных сетевых системах. Здесь основная интрига заключается в том, как из локальных взаимодействий малоосведомленных и маловлиятельных элементов рождается целесообразное и осмысленное поведение сети в целом. Мотивация этой тематики разнообразна и включает исследование динамики ансамблей физических частиц, биологических популяций, а также мнений в социальных группах, систем искусственного интеллекта, сетевых систем управления и др. Предметом одного из наиболее математически содержательных (к настоящему времени) разделов этой области служат распределенные алгоритмы достижения консенсуса. Существенные результаты школы В.А. Якубовича в этой области, к сожалению, пока слабо представленной в РФ, принадлежат А.В. Проскурникову (при начальном участии А.С. Матвеева); в 2022 г. он защитил в СПбГУ докторскую диссертацию по этой теме. Она венчает цикл исследований, где, в частности, было сделано заметное продвижение к целостной теории распределенных усредняющих алгоритмов достижения консенсуса, а также предложен и разработан продуктивный оригинальный метод дифференциальных и рекуррентных усредняющих неравенств. Вклад А.В. Проскурникова в связанное с обсуждаемой темой развитие математической социологии был отмечен совместной публикацией в журнале Science [139].

Среди примеров инициативных работ учеников В.А. Якубовича нельзя не упомянуть разработку и продвижение нового и в значительной мере пионерского направления, лежащего на стыке физики и кибернетики. Оно возникло не произвольно; напротив, на рубеже 1990-х гг. в мире произошел взрыв интереса к применению методов кибернетики, теории информации и управления в физике. Среди его триггеров была, например, обнаруженная в те годы интригующая возможность существенно изменить свойства системы, например, подавить или создать хаос в ее поведении, изменить резонансные характеристики и др., с помощью (теоретически сколь угодно) малого воздействия. Опубликованные в 1998–1999 гг. книги [140, 141] были первыми в мире монографиями по обсуждаемому направлению, а сама область наук на границе кибернетики и физики была названа (со-)автором указанных монографий А.Л. Фрадковым кибернетической физикой. К ней, в частности, относят вопросы управления молекулярными и квантовыми системами (А.Л. Фрадков, М.С. Ананьевский), которые играют важную роль в создании перспективных нанотехнологий. Статья [142] с обзором исследований по управлению хаосом получила премию Международной академической издательской компании «Наука» за лучшую публикацию 2003 г.[4] Основные принципы кибернетической физики изложены в книгах [42, 143]. Знаками ее международного признания явилось проведение в 2003–2005 гг. в Санкт-Петербурге первых в мире международных конференций по физике и управлению, а также образование международного Общества по физике и управлению (IPACS) со штаб-квартирой в Санкт-Петербурге. Под эгидой этого общества в Санкт-Петербурге издается индексируемый в Scopus международный журнал «Cybernetics and Physics».

Еще одно важное, а возможно, и решающее для самой кибернетики направление отражает оформившуюся на рубеже тысячелетий тенденцию к конвергенции теорий управления, вычислений и связи в направлении их единства. Все больше задач требуют тесного взаимодействия методов указанных трех теорий; возникла даже афористичная формула Control×Computation××Communication $= C^3$, выражающая стремление к возврату целостного восприятия информационных, вычислительных и управляющих процессов, так много значившего для успехов «романтической» кибернетики 1960-х гг. Часть пионерских результатов в этом направлении была получена в начале 2000-х гг. А.С. Матвеевым совместно с выпускником КТК профессором университета Нового Южного Уэльса (Австралия) А.В. Савкиным. Соответствующий цикл работ посвящен управлению и оцениванию при ограничениях на пропускную способность (емкость) каналов связи [144–147] и частично подытожен в монографии [148]. В частности, было показано, что стабилизировать неустойчивую линейную управляемую систему можно тогда и только тогда, когда битовая скорость поступления информации через канал связи превышает скорость производства информации системой, а также сделано принципиальное продвижение к определению места основных концепций теории информации К. Шеннона (в частности, емкости зашумленного канала связи) в обсуждаемой тематике. Впоследствии исследования переключились на нелинейные системы и проводилсь А.С. Матвеевым в соавторстве с профессором Технического университета Эйндховена А.Ю. Погромским, при этом использовались методы А.М. Ляпунова и Г.А. Леонова анализа нелинейной динамики. В частности, было разработано новое понятие энтропии восстановления нелинейной системы и показано (в соавторстве с сотрудником университета Людвига–Максимилиана C. Kawan), что в определенном смысле и в рассматриваемых вопросах эта энтропия является адекватной характеристикой скорости производства информации системой [149, 150]. Достаточные условия работоспособности нелинейных и адаптивных систем при коммуникационных ограничениях получал также А.Л. Фрадков с соавтора-

[4] Обзор является наиболее цитируемой статьей журнала АиТ, а ее второй соавтор — наиболее цитируемым автором АиТ.

ми [151–156]. Обзор некоторых результатов, полученных коллективом в целом, представлен в [157].

Уже стало своего рода традицией подразделять (при всей условности любой рубрикации) современную робототехнику на индустриальную и мобильную. В фокусе первого и более развитого раздела — оркестр систем промышленного назначения, в котором главную скрипку играют манипуляционные системы (механические руки). В настоящее время подавляющее большинство таких систем следует парадигме жесткого, удерживающего захвата объекта и фиксированной операционной локации. Вместе с тем систематически в повестку дня внедряются практические задачи, где необходим мягкий, неудерживающий захват и/или объект манипулирования податлив, а также оперативная интеракция мобильных и манипуляционных функций. Такие задачи сейчас попадают в практически малоисследованную область, разработка которой требует решения ряда фундаментальных проблем, в том числе в области теории. В этом направлении с 2010-х гг. систематически работает группа выпускников КТК (А.С. Ширяев, С.В. Гусев). В ее активе — разработка во многом пионерских математических методов анализа динамики и синтеза регуляторов для решения соответствующих задач, в частности метод подвижных площадок Пуанкаре и трансверсальной линеаризации, скоростные методы решения специальных матричных дифференциальных уравнений Риккати, общие методы поиска периодических движений, реализуемых в сложных неполноприводных механических системах, и др. [158–160]. Эффективность этих разработок была в частности продемонстрирована в 2015 г. первым в мире решением (доведенным до практического эксперимента) поставленной в 1998 г. К. Линчем сложной прототипической задачи стабилизации кругового движения шарика по вращающейся направляющей, имеющей форму бабочки [160][5].

В фокусе раздела, именуемого мобильной робототехникой, — автономная навигация подвижных роботов и управление их движением в априори неизвестных средах с препятствиями. Это направление с 2010-х гг. системно разрабатывает группа мобильной роботики КТК (А.С. Матвеев, А.А. Семакова, П.А. Коновалов) при участии (до 2017 г.) А.В. Савкина. Здесь был получен целый ряд фундаментальных результатов по алгоритмам навигации роботов, в том числе распределенному управлению их многоагентными ансамблями, в сложных, в том числе подвижных и непредсказуемых средах; частично они систематизированы в двух монографиях [161, 162], выпущенных в 2015 и 2016 гг. ведущими мировыми издателями научной литературы. Специфика работ группы — экономные с точки зрения используемых (вычислительных, энергетических и др.) ресурсов и сенсорных данных о среде алгоритмы, рефлексоподобным образом конвертирующие текущее наблюдение в текущее управление (как следствие, с минималистскими требованиями к бортовым процессорам) и тем не менее снабженные математически строгими гаран-

[5] https://www.youtube.com/watch?v=kyvW5sOcZHU

тиями достижения результата. По данным WoS за 2022 г., из пяти наиболее цитируемых публикаций по робототехнике аффилиированных к РФ, четыре относятся к КТК, в том числе наиболее цитируемая статья [163] (279 цитирований).

Математические методы уже давно применяются для количественного и качественного изучения процессов и систем, в той или иной мере относящихся с сфере биологии и медицины. В этом направлении в начале 2000-х А.С. Матвеевым и А.В. Савкиным был выполнен цикл работ по изучению оптимальных протоколов химиотерапевтического лечения онкологических заболеваний [164]. Начиная с середины 2000-х гг. сотрудниками КТК (А.Н. Чурилов, А.И. Шепелявый) совместно с Упсальским университетом (Швеция) велись систематические исследования по моделированию и анализу биологических ритмов и хаотической динамики в нейрогормональных системах [165, 166]. Начиная с 2010-х гг. научные направления школы включают работы по нейроуправлению и нейрообратной связи, которые опираются на математическое исследование сетей биологических нейронов. Эти разработки лежат на стыке кибернетики и нейронаук, от которого во всем мире ожидают прорывов в медицинской диагностике, а также в управлении роботами и другими устройствами силой мысли (без участия мышц человека). В настоящее время под руководством А.Л.Фрадкова в СПбГУ выполняется грант по этой тематике. Эти работы ведутся совместно с биофаком СПбГУ, Институтом мозга человека РАН, Институтом проблем машиноведения РАН, Балтийским федеральным университетом им И. Канта. В работах активно участвуют молодые представители школы М. Липкович, С.А. Плотников.

Представители научной школы преподавали и преподают в различных вузах страны. Только в Санкт-Петербурге среди них (как ныне действующих, так и ушедших) декан математико-механического факультета СПбГУ, лауреат Государственной премии СССР, член корреспондент Российской академии наук Г.А. Леонов, заведующий кафедрой прикладной кибернетики СПбГУ, член корреспондент Российской академии наук Н.В. Кузнецов, профессор кафедры системного программирования О.Н. Граничин, профессора А.В. Тимофеев (СПбГУАП), А.Н. Чурилов (СПбГМТУ), В.Б. Смирнова (СПбГАСУ), Н.Е. Барабанов (СПбГЭТУ), заведующие лабораториями академических институтов А.В. Тимофеев (СПИИРАН), А.Л. Фрадков (ИПМаш РАН). В 1970-е и в 1990-е гг. ряд талантливых выпускников кафедры уехали из страны, среди них Б.Г. Питтель, М.В. Левит, Б.Д. Любачевский. Некоторые из них стали профессорами в зарубежных университетах: А. Мегрецкий (Массачусетский технологический институт, США), Н. Барабанов (университет Северной Дакоты, США), А. Савкин (университет Нового Южного Уэльса, Австралия), А. Ширяев (университет г. Умеа, Швеция и Норвежский университет наук и технологий г. Трондхейм).

Значительное место в деятельности школы занимает научно-организационная работа. В качестве примеров укажем, что с 1967 г. В.А. Якубович был заместителем председателя (ректора Ленинградского электротехнического университета А.А. Вавилова) и по совместительству председателем секции "Теория адаптивных систем управления" Ленинградской территориальной группы Национального комитета по автоматическому управлению. Заметное место в научно-организационном пейзаже страны занимала серия из шести Ленинградских симпозиумов и одной Всесоюзной конференции по теории адаптивных систем, проводившаяся по инициативе В.А. Якубовича и под его руководством в период с 1972 по 1999 гг. Эта серия явилась знаком признания заслуг научной школы В.А. Якубовича в области адаптивных систем, а ее события были важными вехами в развитии этой области, которая в те годы была одной из главных точек роста математической теории управления и кибернетики и привлекала интерес как талантливой молодежи, так и маститых ученых: количество докладов и участников обычно исчислялись сотнями. На симпозиумах выступали лидеры отечественной, а начиная с 1990-х гг., и зарубежной науки. Среди них — академики Я.З. Цыпкин, А.А. Красовский, Е.П. Попов, Н.Н. Моисеев, доктора наук Д.А. Поспелов, В.Ю. Рутковский, Ю.И. Неймарк, А.А. Первозванский, Р.М. Юсупов, а также Дж. Бартолини (Италия), С. Биттанти (Италия), В. Резван (Румыния), А. Халанай (Румыния), Л. Льюнг (Швеция), Я. Ландо (Франция), А. Линдквист (Швеция), Д. Шильяк (США), К. Фурута (Япония) и др. В 1972 г. с пленарным докладом выступил доктор технических наук, экс-чемпион мира по шахматам М.М. Ботвинник, рассказавший о разработке компьютерного алгоритма шахматной игры. Ученым секретарем мероприятий серии вначале был доцент кафедры систем автоматического управления Ленинградского механического института Д.П. Деревицкий, а впоследствии А.Л. Фрадков. В научно-организационной работе КТК традиционно и тесно сотрудничает с лабораторий управления сложными системами Института проблем машиноведения РАН, созданной в 1990 г. А.Л. Фрадковым и возглавляемой им по настоящее время. Эта лаборатория тесно связана с кафедрой как научными интересами, так и по учебной работе.

Коллектив ведет профориентационную работу с молодежью в области кибернетики. В 1999 г. группа специалистов в области автоматики и систем управления из нескольких вузов города предложила проводить школьные олимпиады по кибернетике. Идея была поддержана заведующим отделом науки и техники Санкт-Петербургского городского Дворца творчества юных (Аничков дворец) В.П. Тарасовым, и дело пошло: в 1999–2013 гг. было проведено 14 олимпиад. В их организации и проведении с самого начала активное участие принимали представители школы М.С. Ананьевский, А.Л. Фрадков, А.С. Матвеев. Материалы олимпиад и некоторые методические выводы были суммированы в серии выпущенных (во многом благодаря труду и энергии М.С. Ананьевского) по их итогам сборников.

В 2008 г. на кафедре теретической кибернетики был организован кружок по кибернетике для студентов младших курсов на базе кибернетического конструктора LEGO Mindstorms NXT. Одновременно с изучением теории управления студенты получили возможность реализовать алгоритмы управления на физических объектах, связать теоретические знания с практикой. На занятиях кружка студенты самостоятельно разрабатывали оригинальные конструкции: робот-велосипедист, сигвей, ползающий робот, робот-хищник и др. Лучшие работы представлялись на Шоу роботов на Неделе математико-механического факультета СПбГУ. Тогда же завязалось творческое содружество с руководимым С.А. Филипповым Центром робототехники Президентского физ.-мат. лицея (ПФМЛ) № 239. Опыт сотрудничества был представлен на нескольких международных конференциях [167, 168]. В организации и руководстве кружком важную роль сыграл энтузиазм сотрудника и преподавателя КТК Р.М. Лучина. Одним из направлений его работы стал футбол роботов. Первые городские соревнования радиоуправляемых роботов были проведены в 2012 г., а через год на поле выходили уже автономные роботы.

Опыт работы с ЛЕГО привел группу энтузиастов (Р.М. Лучин, С.А. Филиппов, А.Н. Терехов) к идее разработать собственный конструктор, более передовой, чем ЛЕГО. Было основано ООО “Кибернетические технологии”, где были разработаны Универсальный кибернетический конструктор ТРИК и необходимое программное обеспечение, позволяющие реализовать массу разнообразных проектов, начиная с базовых образовательных и до современных исследовательских, которые стали использоваться в школах и вузах России. В 2018 г. в ежегодном аналитическом обзоре мирового рынка робототехники, выполненном лабораторией робототехники Сбербанка, указанная компания упомянута в качестве одного из пока немногих безусловных успехов России на этом рынке. К сожалению, Р.М. Лучин безвременно ушел в молодом возрасте вследствие пандемии COVID-19. Его дело продолжает его ученик, сотрудник КТК И.Ю. Широколобов. В 2019 г. созданная совместными усилиями команда роботов-футболистов URoboRus первой из российских команд прошла квалификационный этап на соревнованиях RoboCup SSL — своего рода чемпионате мира. В 2020 г. URoboRus снова прошла квалификационный этап, но соревнования отменили из-за пандемии. В 2021 г. соревнования проводились в онлайн формате и команде URoboRus впервые удалось поучаствовать в основном турнире, заняв в групповом турнире первое место в своей группе. 2022 г. — снова успешная квалификация на чемпионат мира RoboCup SSL, а также первое очное участие: оно произошло в г. Сан-Паоло в университете FEI на открытом чемпионате Бразилии RoboCup Brazil Open.

В значительной степени благодаря усилиям коллектива КТК, а также поддержке ПФМЛ № 239 в 2019 г. в СПбГУ был создан Научно-образовательный Центр (НОЦ) “Математическая робототехника и искусственный интеллект”. Его директором с момента основания является К.С. Амелин (ученик О.Н. Граничина), а научным руководителем — А.Л. Фрадков. Центр призван интегрировать усилия СПбГУ в фундаментальных исследованиях по математической и образовательной робототехнике и интеллектуальному управлению. Среди направлений работы НОЦ — вопросы навигации мобильных роботов и их многоагентных сетевых ансамблей, управления неполноприводными манипуляторами, компьютерного зрения, искусственного интеллекта, машинного обучения и обработки больших данных, нейросетевого управления, методы и средства программирования и отладки роботов, образовательная и практическая робототехника. В 2022 г. экспериментальный парк НОЦ включал квадрокоптеры Геоскан Пионер и комплекты универсального кибернетического конструктора ТРИК. При активном участии студентов СПбГУ и частично с использованием указанного парка в НОЦ уже выполнен целый ряд прикладных проектов, в частности, по инвентаризации лесоматериалов роботизированными квадрокоптерами, поиску человека, заблудившегося в лесу, полуавтоматическому сбросу GPS маячков на ледники для мониторинга их передвижения, автоматическому облету территорий заповедников, контролю опор мостов, увеличению скорости передачи данных в больших беспроводных сетях и др.

Дополнительная информация о кафедре доступна в тематических выпусках российских и международных научных журналов [169–171], посвященных юбилеям сотрудников КТК, и в сборнике статей [3]. Научная продукция школы исчисляется многими сотнями публикаций, среди которых более шести десятков книг. «Птенцы гнезда» В.А. Якубовича плодотворно работают во многих российских и зарубежных научно-педагогических учреждениях, ими защищено свыше сотни диссертаций по физико-математическим и техническим наукам, в том числе 19 докторских.

Влияние достижений кафедры и школы заметно при распределении мест университетов в мировых рейтингах. Например, по данным предметного Шанхайского рейтинга университетов ARWU (Academic Ranking of World Universities) в 2018 г. СПбГУ занял 32-е место по направлению «Автоматизация и управление» (Automation and Control). При этом число публикаций сотрудников КТК в топовых журналах по направлению “Автоматизация и управление”, учитывавшихся при составлении рейтинга ARWU примерно равно 28% (24 из 85) от всех российских публикаций в таких журналах за 2012–2016 гг.

Представителям школы неоднократно присуждались престижные российские и международные премии и звания. В 1998 г. В.А. Якубовичу присвоено почетное звание «Заслуженный деятель науки Российской Федерации», а в 2005 г. он награжден «Орденом Почета». В.А. Якубович был членом-корреспондентом РАН и академиком РАЕН, в 2006 г. был избран почетным профессором СПбГУ. А.Л. Фрадков был удостоен международных почетных званий IFAC Fellow, IEEE Life Fellow, AAIA Fellow. В 2015 г. выпускник КТК 1998 г. Алексей Павлов с коллегами из технического ун-та Эйндховена получил престижную международную премию IEEE Control Systems Technology award, а в 2020 г. выпускник КТК А.В. Проскурников с соавторами — IFAC and Elsevier paper prize award for the best paper published in Annual Reviews in Control in 2017–2020 (AV Proskurnikov, R Tempo, A Tutorial on Modeling and Analysis of Dynamic Social Networks. Part I, Annual Reviews in Control 43, 65–79. Аналогичная награда за лучшую статью 2020–2022 гг. присуждена за обзор [76]. В 2018 г. А.Л. Фрадкову присуждена Премия РАН им. А.А. Андронова за цикл работ «Синхронизация и управление нелинейными колебаниями» (совместно с И.И. Блехманом).

После ухода в 2012 г. основателя и многолетнего руководителя КТК, основателя научной школы кибернетики и искусственного интеллекта в Санкт-Петербурге Владимира Андреевича Якубовича кафедрой последовательно руководили его ближайшие коллеги и ученики — А.Х. Гелиг, А.Л. Фрадков и с 2021 г. А.С. Матвеев. Творческой биографии и научным достижениям В.А. Якубовича посвящено несколько тематических сборников, публикаций и выступлений, а также проводившаяся в Санкт-Петербурге в 2015 г. 1-я международная конференция Международной Федерации Автоматического Управления «Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems"(MICNON 2015) [172–174]. Сотрудниками КТК подготовлен и выпущен CD-ROM, содержащий более трехсот основных трудов В.А. Якубовича.

Авторы статьи выражают признательность К.С. Амелину, В.А. Бондарко, С.В. Гусеву, П.А. Коновалову, А.Н. Чурилову и И.Ю. Широколобову, любезно предоставившими свои материалы и воспоминания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шепелявый А.И.* Кафедра теоретической кибернетики на математико-механическом факультете СПбГУ // Вестник Санкт-Петербургского университета. 2000. Сер. 1. Вып. 1. С. 3–15.

2. *Фрадков А.Л.* Научная школа по теоретической кибернетике В.А. Якубовича в Санкт-Петербургском (Ленинградском) университете / История информатики и кибернетики в Санкт-Петербурге (Ленинграде). Под. ред. Юсупова Р.М. 2008, С. 79–83.

3. Нелинейные системы. Частотные и матричные неравенства. К 80-летию со дня рождения В.А. Якубовича / Под ред. Гелига А.Х., Леонова Г.А., Фрадкова А.Л. М: Физматлит, 2008.

4. *Соболев С.Л., Китов А.И., Ляпунов А.А.* Основные черты кибернетики // Вопросы философии. 1955. № 4. С. 136–148.

5. *Колмогоров А.Н.* Кибернетика // Большая советская энциклопедия, 2-е изд., т. 51. М.: Большая советская энциклопедия. 1958. С. 149–151.

6. *Винер Н.* Кибернетика, или управление и связь в животном и машине. М.: Сов. радио, 1958. (Wiener N. Cybernetics: or Control and Communication in the Animal and the Machine, Cambridge: MIT Press, 1948).

7. *Якубович В.А.* Машины, обучающиеся распознаванию образов // Сб. ВЦ ЛГУ. 1963. Вып. 2. С. 95–131.

8. *Якубович В.А.* Некоторые общие принципы построения обучаемых опознающих систем. I / Вычислительная техника и вопросы программирования. Л.: Изд-во ЛГУ, 1965. С. 3–71.

9. *Якубович В.А.* Три теоретические схемы обучающихся систем / Самообучающиеся автоматические системы. М.: Наука, 1966.

10. *Якубович В.А.* Машины, обучающиеся распознаванию образов // Вестник СПб универ-та. Математика. Механика. Астрономия. (I): 2021. Т. 8(66). Вып. 4. С. 625–638. (II): 2022. 9(1). Вып. 1. С. 94–112.

11. *Козинец Б.Н., Ланцман Р.М., Якубович В.А.* Криминалистическая экспертиза близких почерков при помощи электронно-вычислительных машин // ДАН СССР. 1966. Т. 167. № 8. С. 1008–1011.

12. *Гелиг А.Х., Якубович В.А.* Применение обучаемых опознающих систем для выделения сигнала из шума / Вычислительная техника и вопросы кибернетики. № 5. Л.: Изд-во ЛГУ, 1968. С. 95–100.

13. *Шмидт А.А., Харичев В.В., Якубович В.А.* Об одной новой задаче распознавания образов // АиТ. 1973. № 1. С. 109–122.

14. *Козинец Б.Н., Ланцман Р.М., Якубович В.А.* К задаче распознавания и описания сложных изображений // Тр. Междунар. симпозиума ИФАК. Тбилиси, 1975. С. 207–250.

15. *Фомин В.Н.* Математическая теория обучающихся опознающих систем. Л.: Изд-во ЛГУ, 1976.

16. *Гелиг А.Х., Матвеев А.С.* Введение в математическую теорию обучаемых рспознающих систем и нейронных сетей. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2014.

17. *Якубович В.А.* Рекуррентные конечно-сходящиеся алгоритмы решения систем неравенств // ДАН СССР. 1966. Т. 166. № 6. С. 1308–1312.

18. *Якубович В.А.* Метод рекуррентных целевых неравенств в теории адаптивных систем // Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. М.;Л.: Изд-во АН СССР, Науч. совет по комплексной проблеме «Кибернетика», 1976. С. 32–64.

19. *Цыпкин Я.З.* Адаптация, обучение и самообучение в автоматических системах // АиТ. 1966. № 1. С. 23–61.

20. *Цыпкин Я.З* Адаптация и обучение в автоматических системах. М.: Наука, 1968.

21. *Якубович В.А.* К теории адаптивных систем // ДАН СССР. 1968. № 3. С. 518–522.

22. *Якубович В.А.* Адаптивные системы с многошаговыми целевыми условиями // ДАН СССР. 1968. Т. 183. № 2. С. 303–306.

23. *Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А.* Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981.

24. *Якубович В.А.* Метод рекуррентных целевых неравенств в адаптивном управлении / Гл. 11 в книге “Справочник по теории автоматического управления”. М.: Наука, 1987. С. 501–526.

25. *Bondarko V.A., Yakubovich V.A.* The method of recursive aim inequalities in adaptive control theory // Int. J. Adaptive Control and Signal Proc. 1992. V. 6. P. 141–160.

26. *Бондарко В.А.* Адаптивные субоптимальные системы с переменной размерностью вектора настраиваемых параметров // АиТ. 2006. № 11. С. 38–59.

27. *Тимофеев А.В.* Роботы и искусственный интеллект. М.: Наука, 1978.

28. *Тимофеев А.В.* Адаптивные робототехнические комплексы. М.: Машиностроение. 1988.

29. *Тимофеев А.В.* Управление роботами. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1986.

30. *Gusev S.V., Timofeev A.V., Yakubovich V.A.* On a hierarchical system of integral robot control / In Proc. of the 4th International Joint Conference on Artificial Intelligence (Moscow). 1975. V. 9. P. 53–61.

31. *Гусев С.В., Якубович В.А.* Алгоритм адаптивного управления роботом-манипулятором // АиТ. 1980. № 9. С. 101–111.

32. *Якубович В.А.* Об одной задаче самообучения целесообразному поведению // АиТ. 1969. № 8. С. 119–139.

33. *Любачевский Б.Д., Якубович В.А.* Адаптивное управление устойчивыми динамическими объектами // АиТ. 1974. № 4. С. 116–127.

34. *Якубович В.А.* Об организации «мозга» адаптивных систем с одношаговым целевым условием / Проблемы бионики. М.: Наука, 1973. С. 355–360.

35. *Yakubovich V.A.* On a method of adaptive control under conditions of great uncertainty // Preprints of the 5th World Congress IFAC (Paris). 1972. V. 37. No. 3. P. 1–6.

36. *Grigor'ev G.G., Gusev S.V., Nesterov V.V., Yakubovich V.A.* Mobile robot-manipulator adaptive control / In Proc. of the Soviet Conference "Adaptive Robots", 1982. P. 89–91. Moscow. (In Russian).

37. *Беленков Б.А., Гусев С.В., Зотов Ю.К., Ружанский В.И., Тимофеев А.В., Фролов Р.Б., Якубович В.А.* Адаптивная система управления автономным подвижным роботом // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1978. № 6. С. 52–63.

38. *Тимофеев А.В., Якубович В.А.* Адаптивное управление программным движением робота-манипулятора / Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. М.-Л.: Изд-во АН СССР, Науч. совет по комплексной проблеме «Кибернетика». 1976. С. 170–174.

39. *Гелиг А.Х.* Адаптивная система управления роботом «глаз-рука» / Вопросы кибернетики: Адаптивные системы. М.: Научный совет по комплексн. проблеме «Кибернетика» АН СССР. 1976. С. 162–163.

40. *Аксенов Г.С., Фомин В.Н.* К задаче адаптивного управления манипулятором. Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. М.;Л.: Изд-во АН СССР, Науч. совет по по комплексной проблеме «Кибернетика». 1976. С. 165–168.

41. *Фрадков А.Л.* Схема скоростного градиента и ее применение в задачах адаптивного управления // АиТ. 1979. № 9. С. 90–101.

42. *Фрадков А.Л.* Кибернетическая физика: принципы и примеры. СПб.: Наука, 2003.

43. *Fradkov A.L., Shalymov D.S.* Speed Gradient and MaxEnt Principles for Shannon and Tsallis Entropies // Entropy. 2015. 17(3). P. 1090–1102.

44. *Granovskaya R.M., Bereznaya I.Y.* Experiments on human pattern recognition: a hierarchical sign-system approach // Pattern Recognition. 1980. V. 12. I. 1. P. 17–26.

45. *Granovskaya R.M., Bereznaya I.Y.* Consciousness as the unity of higher psychic processes // Kybernetes. 1988. V. 17. I. 2. P. 35–43.

46. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972.

47. *Якубович В.А.* Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в теории автоматического регулирования // ДАН СССР. 1962. Т. 143. № 6. С. 1304–1307.

48. *Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978.

    Yakubovich V.A., Leonov G.A., Gelig A.Kh. Stability of Stationary Sets in Control Systems with Discontinuous Nonlinearities. World Scientific, Singapore, 2004.

49. *Якубович В.А.* Частотная теорема в теории управления // Сиб. мат. журн. 1973. Т. 14. № 2. С. 384–420.

50. *Лихтарников А.Л., Якубович В.А.* Частотная теорема для уравнений эволюционного типа // Сиб. мат. журн. 1976. Т. 17. № 5. С. 1069–1085.

51. *Леонов Г.А., Буркин И.М., Шепелявый А.И.* Частотные методы в теории колебаний. Часть I. Многомерные аналоги уравнения Ван-дер-Поля и динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. Часть 2. Проблема Айзермана и частотные оценки хаусдорфовой размерности аттракторов. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1992.

    Leonov G.A., Burkin I.M., Shepeljavyi A.I. Frequency Methods in Oscillations Theory. Dortrecht: Kluwer, 1996.

52. *Левит М.В.* Частотный критерий абсолютной стохастической устойчивости нелинейных систем дифференциальных уравнений Ито // Успехи математических наук. 1972. Том XXVII. Вып. 4(166). С. 215–216.

53. *Левит М.В., Якубович В.А.* Алгебраические критерии стохастической устойчивости линейных систем с параметрическим воздействием типа белый шум // ПММ. 1972. Вып. 1. С. 142–148.

54. *Антонов В.Г., Лихтарников А.Л., Якубович В.А.* Дискретная частотная теорема для случая гильбертовых пространств состояний и управлений // Вестник ЛГУ. Сер. мат., мех., астр. 1975. Вып. 1. С. 22–31.

    Antonov V.G., Likhtarnikov A.L., Yakubovich V.A. A discrete frequency theorem for the case of Hilbert spaces of states and controls. I // Vestnik Leningr. Univ. Math. 1980. V. 8. P. 1–11.

55. *Фрадков А.Л.* Синтез адаптивной системы стабилизации линейного динамического объекта // АиТ. 1974. № 12. С. 96–103.

    Fradkov A.L. Synthesis of adaptive system of stabilization for linear dynamic plants // Autom. Remote Control. 1974. P. 1960–1966.

56. *Фрадков А.Л.* Квадратичные функции Ляпунова в задаче адаптивной стабилизации линейного динамического объекта // Сиб. мат. журн. 1976. № 2. С. 436–446.

    Fradkov A.L. Quadratic Lyapunov functions in adaptive stabilization problem of a linear dynamic plant // Sib. Math. J. 1976. № 17 (2). P. 341–348.

57. *Бондарко В.А., Лихтарников А.Л., Фрадков А.Л.* Синтез адаптивной системы стабилизации линейного объекта с распределенными параметрами // АиТ. 1979. № 12. P. 95–103.

Bondarko V.A., Likhtarnikov A.L., Fradkov A.L. Design of an adaptive system for stabilizing a linear object with distributed parameters // Autom. Remote Control. 1979. V. 40. No. 12. P. 1785–1792.

58. *Лихтарников А.Л., Якубович В.А.* Частотная теорема для непрерывных однопараметрических полугрупп // Известия АН СССР. 1977. Сер. мат. Т. 41. № 4. С. 895–911.

Lihtarnikov A.L., Jakubovic V.A. The frequency theorem for continuous one-parameter semigroups // Izvestiya: Mathematics, 1977. V. 11. No. 4. P. 849–864.

59. *Гусев С.В.* Лемма Калмана–Попова–Якубовича для упорядоченных полей // АиТ. 2014. № 1. С. 23–41.

Gusev S.V. Kalman–Popov–Yakubovich lemma for ordered fields // Autom. Remote Control. 2014. 75 (1). P. 18–33.

60. *Пакшин П.В.* Устойчивость одного класса нелинейных стохастических систем // АиТ. 1977. № 4. С. 27–36.

61. *Брусин В.А.* Глобальная устойчивость и дихотомия класса нелинейных систем со случайными параметрами // Сиб. мат. журн. 1981. Т. 22. № 2. С. 57–73.

62. *Брусин В.А., Угриновский В.А.* Исследование стохастической устойчивости некоторого класса нелинейных дифференциальных уравнений типа Ито // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 28. № 3. С. 35–50.

63. *Угриновский В.А.* Стохастический аналог частотной теоремы // Изв. ВУЗов. Математика. 1987. № 10. С. 37–43.

64. *Brusin V.A., Ugrinovskii V.A.* Absolute stability approach to stochastic stability of infinite-dimensional nonlinear systems // Automatica. 1995. V. 31. № 10. P. 1453–1458.

65. *Барабанов А.Е., Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Лихтарников А.Л., Матвеев А.С., Смирнова В.Б., Фрадков А.Л.* Частотная теорема (лемма Якубовича–Калмана) в теории управления // АиТ. 1996. № 10. С. 3–40.

66. *Гусев С.В., Лихтарников А.Л.* Очерк истории леммы Калмана–Попова–Якубовича и S-процедуры // АиТ. 2006. № 11. С. 77–121.

67. *Seron M.M., Hill D.J., Fradkov A.L.* Adaptive passification of nonlinear systems Proc. 33rd IEEE Conf. Dec. Contr., 1994. P. 190–195.

68. *Jiang Z.P., Hill D.J., Fradkov A.L.* A passification approach to adaptive nonlinear stabilization // Syst. Control. Lett. 1996. V. 28. P. 73–84.

69. *Fradkov A.L.* Passification of nonsquare linear systems and feedback Yakubovich–Kalman–Popov Lemma // Europ. J. Contr. 2003. № 6. P. 573–582.

70. *Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л.* Метод пассификации в задачах адаптивного управления, оценивания и синхронизации // АиТ. 2006. № 11. С. 3–37.

Andrievskii B.R., Fradkov A.L. Method of Passification in Adaptive Control, Estimation, and Synchronization. // Autom. Remote Control. 2006. Vol. 67. No. 11. P. 1699–1731.

71. *Xie L.H., Fu M.Y., Li H.Z.* Passivity analysis and passification for uncertain signal processing systems // IEEE Transactions On Signal Processing. 1998. V. 46. Is. 9. P. 2394–2403.

72. *Mahmoud M.S., Ismail A.* Passivity and passification of time-delay systems // Journal Of Mathematical Analysis And Applications. 2004. V. 292. Is. 1. P. 247–258.

73. *Xia M., Rahnama A., Wang A., Antsaklis P.J.* Control Design Using Passivation for Stability and Performance // IEEE Transactions on Automatic Control. 2018. V. 63. No. 9. P. 2987–2993.

74. *Пыркин А.А., Арановский С.В., Бобцов А.А., Колюбин С.А., Николаев Н.А.* Управление многоканальными нелинейными системами вида Лурье на основе теоремы Фрадкова // АиТ. 2018. № 6. Р. 140–154.

Pyrkin A.A., Aranovskiy S.V., Bobtsov A.A., Kolyubin S.A., Nikolaev N.A. Fradkov theorem-based control of MIMO nonlinear Lurie systems // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 6. P. 1074–1085.

75. *Tomashevich S., Belyavskyi A.* Passification based simple adaptive control of quadrotor // IFAC-PapersOnLine. 2016. V. 49. No. 13. P. 281–286.

76. *Annaswamy Anuradha M., Fradkov Alexander L.* A Historical Perspective of Adaptive Control and Learning // Annual Reviews in Control. 2021. No. 52. P. 18–41.

77. *Boyd S., Ghaoui L.E., Feron E., Balakrishnan A.V.* Linear matrix inequalities in systems and control theory /Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA. 1994.

78. *Kalman R.E.* Contributions to the theory of optimal control // Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana. 1960. Vol. 2. Is. 2. P. 102–119.

79. *Красовский Н.Н.* Задача стабилизации управляемого движения, Добавление 4 в кн. “Теория устойчивости движения Малкин И.” М: Наука, 1976.

80. *Летов А.М.* Аналитический синтез регуляторов // АиТ. 1960. Т. 4. С. 436–446; Т. 5. С. 561–571.

81. *Колмогоров А.Н.* Интерполирование и экстраполирование случайных последовательностей // Изв. АН ССС, Матем. 1941. Т. 5. С. 3–14.

82. *Wiener N.* Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series. Cambridge, 1949.

83. *Busy R.S., Joseph P.D.* Filtering of stohastic proesses with application to guidance. N.Y., London, 1968.

84. *Trentelman H.* Linear Quadratic Optimal Control. In: Baillieul, J., Samad, T. (eds) Encyclopedia of Systems and Control. 2013, Springer, London.

85. *Megretski A.V., Yakubovich V.A.* Singular stationary nonhomogeneous linear-quadratic optimal control // Transactions of the American Mathematical Society. 1993. Vol. 155. P. 129–167.

86. *Якубович В.А.* Минимизация квадратичных функционалов при квадратичных ограничениях и необходимость частотного условия абсолютной устойчивости нелинейных систем управления // ДАН СССР. 1973. Т. 209. С. 1039–1042.

87. *Megretsky A.* Neessary and suffient conditions of stability: A multiloop generalization of the circle criterion // IEEE Transactions on Automatic Control AC-38. 1993. Vol. 5. P. 753–756.

88. *Savkin A.V., Petersen I.R.* Minimax optimal control of uncertain systems with structured uncertainty // Int. J. of Robust and Nonlinear Control. 1995. Vol. 5. P. 119–138.

89. *Morari M.* Some control problems in the process industries, in Essays on Control: Perspectives in Theory and Applications, ed. H.L. Trentelman and J.C. and Willems / Progress in System and Control Theory. 1993. Vol. 14. P. 55–77.

90. *Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р.* Абсолютная устойчивость регулируемых систем. М.: Изд-во АН СССР, 1963.

91. *Гантмахер Ф.Р., Якубович В.А.* Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем Тр. II Всесоюз. съезда по теоретической и прикладной механике. М.: Наука, 1965.

92. *Якубович В.А.* S-процедура в нелинейной теории регулирования // Вестник ЛГУ. Серия Математика, механика, астрономия. 1971. № 1. С. 62–77.

93. *Фрадков А.Л., Якубович В.А.* S-процедура и соотношение двойственности в невыпуклых задачах квадратичного программирования // Вестн. Ленингр. ун-та. 1973. № 1. С. 71–76.

94. *Halmos P.R.* A Hilbert Space Problem Book, D. Van Nostrand Company In., Princeton, New Jersey, Toronto, London, 1982.

95. *Megretsky A., Treil S., Fradkov A.L.* Power distribution inequalities in optimization and robustness of uncertain systems // J. Math. Systems, Estimation, Control. 1993. Vol. 3. No. 3. P. 301–319.

96. *Матвеев А.С., Якубович В.А.* Невыпуклые задачи глобальной оптимизации // Алгебра и Анализ. 1992. Т. 4. С. 189–219.

97. *Матвеев А.С.* Лагранжева двойственность в теории невыпуклой оптимизации и модификации теоремы Теплица–Хаусдорфа // Алгебра и Анализ. 1995. Т. 7. Вып. 5. С. 126–159.

98. *Матвеев А.С.* О выпуклости образов квадратичных отображений // Алгебра и анализ. 1998. Т. 10. № 2. С. 159–196.

99. *Matveev A.S.* Spectral approach to duality in nonconvex global optimization // SIAM J. Control and Optim. 1998. V. 36. No. 1. P. 336–378.

100. *Polyak B.T.*, Convexity of quadratic transformations and its use in control and optimization // J. Optimizat. Theor. and Appl. 1998. 99:3. P. 553–583.

101. *Поляк Б.Т.* Локальное программирование // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. 41:9. С. 1324–1331.

102. *Iwasaki T., Meinsma G., Fu M.* Generalized S-procedure and finite frequency KYP lemma // Mathematical Problems in Engineering. 2000. No. 6. P. 305–320.

103. *Iwasaki T., Hara S.* Generalized KYP lemma: unified frequency domain inequalities with design applications // IEEE Transactions on Automatic Control. 2005. No. 50(1). P. 41–59.

104. *Iwasaki T., Hara S., Fradkov A.* Time domain interpretations of frequency domain inequalities on (semi)finite ranges // Systems & Control Letters. 2005. No. 54(7). P. 681–691.

105. *Fradkov A.L.* Conic S-procedure and constrained dissipativity for linear systems // Intern. J. of Robust and Nonlinear Control. 2007. Volume 17. Issue 5–6. P. 405–413.

106. *Sun W., Gao H., Kaynak O.* Finite Frequency H_∞ Control for Vehicle Active Suspension Systems // IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2011. vol. 19. No. 2. P. 416–422.

107. *Tan Y.Z., Pang C.K., Hong F., et al.* Integrated servo-mechanical design of high-performance mechatronics using generalized KYP Lemma // Microsyst Technol. 2013. 19. P. 1549–1557.

108. *Paszke W., Rogers E., Galkowski K.* Experimentally verified generalized KYP lemma based iterative learning control design // Control Engineering Practice. 2016. No. 53. P. 57–67.

109. *Yakubovich V.A.* Nonconvex optimization problem // Systems & Control Letters. 1992. V. 19. P. 13–22.

110. *Якубович В.А.* Об одном методе решения специальных задач глобальной оптимизации // Вест. СПбУ, сер. 1. 1992. С. 58–68.

111. *Матвеев А.С., Якубович В.А.* Абстрактная теория оптимального управления. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1994.

112. *Матвеев А.С., Якубович В.А.* Оптимальные системы управления: Обыкновенные дифференциальные уравнения. Специальные задачи Учеб. пособие. Изд-во СПбГУ, 2003.

113. *Гелиг А.Х., Чурилов А.Н.* Колебания и устойчивость нелинейных импульсных систем. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1993.

Gelig A.Kh., Churilov A.N. Stability and Oscillations of Nonlinear Pulse-Modulated Systems. Boston/Basel/Berlin: Birkhauser, 1998.

114. *Гелиг А.Х., Зубер И.Е., Чурилов А.Н.* Чурилов А.Н. Устойчивость и стабилизация нелинейных систем. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2006.

115. *Гелиг А.Х.* Динамика импульсных систем и нейронных сетей. Л.: Издо-во ЛГУ, 1982.

116. *Фомин В.Н.* Математическая теория обучаемых опознающих систем. Л.: Изд-во ЛГУ, 1976.

117. *Фомин В.Н.* Методы управления линейными дискретными объектами. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1984.

Fomin V.N. Discrete Linear Control Systems. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 1991.

118. *Fomin V.* Optimal Filtering. V.1: Filtering of Stochastic Processes. Kluwer Acad. Publ., V. 481, 1998, V. 2: Spatio-Temporal Fields. Kluwer Acad. Publ., V. 481, 1999.

119. *Фомин В.Н.* Оптимальная и адаптивная фильтрация. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2001.

120. *Леонов Г.А., Смирнова В.Б.* Математические проблемы теории фазовой синхронизации, СПб.: Наука, 2000.

121. *Leonov G.A., Ponomarenko D.V., Smirnova V.B.* Frequency-Domain Methods for Nonlinear Analysis. Theory and Application. World Scientific Series on Nonlinear Science. Series A. Vol. 9, 1996.

122. *Леонов Г.А., Шумафов М.М.* Методы стабилизации линейных управляемых систем. СП.:, Изд-во СПбГУ, 2005.

123. *Leonov G.A.* Mathematical problems of control theory, World Scientific, 2002.

124. *Леонов Г.А.* Теория управления, СПб.: Изд-во СПбГУ, 2006.

125. *Леонов Г.А.* Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения. Москва–Ижевск, 2006.

126. *Барабанов А.Е., Граничин О.Н.* Оптимальное управление линейным объектом с ограниченной помехой // АиТ. 1984. № 5. С. 39–46.

127. *Барабанов А.Е.* Синтез оптимальных регуляторов. СПб.: Изд-во СПбГУ. 1996.

128. *Граничин О.Н., Поляк Б.Т.* Рандомизированные алгоритмы оценивания и оптимизации при почти произвольных помехах. М.: Наука, 2003.

129. *Granichin O., Amelina N.* Simultaneous perturbation stochastic approximation for tracking under unknown but bounded disturbances // IEEE Transactions on Automatic Control. 2015. 60 (6). P. 1653–1658.

130. *Matveev A.S., Savkin A.V.* Qualitative Theory of Hybrid Dynamical Systems, Birkhauser, Boston, 2000.

131. *Bondarko V.A.* Discretization of continuous linear dynamic systems. Analysis of the methods // Systems & Control Letters. November 1984. V. 5, Issue 2. P. 97–101.

132. *Бондарко В.А.* Асимптотика нулей дискретной модели линейной непрерывной системы с запаздыванием // АиТ. 2015. № 8. С. 3–26.
Bondarko V.A. Asymptotic behavior of the zeros of a discrete model of a linear continuous system with delay // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 8. P. 1327–1346.

133. *Якубович В.А.* Универсальные регуляторы в задачах инвариантности и отслеживания // Докл. РАН. 1995. Т. 343. № 2. С. 172–175.

134. *Yakubovich V.A.* Universal Regulators in Linear-Quadratic Optimization Problem // Trends in Control: European Perspective. Alberto Isidori (Ed.). 1995. P. 53–67.

135. *Проскурников А.В., Якубович В.А.* Задача об инвариантности системы управления // Доклады РАН. 2003. Т. 389. № 6. С. 742–746.

136. *Проскурников А.В., Якубович В.А.* Задача об абсолютной инвариантности для систем управления с запаздыванием // Доклады РАН. 2004. Т. 397. № 5. С. 610–614.

137. *Проскурников А.В., Якубович В.А.* Универсальные регуляторы для оптимального отслеживания полигармонических сигналов в системах с запаздыванием // Доклады РАН. 2006. Т. 406. № 2. С. 109–174.

138. *Проскурников А.В., Якубович В.А.* Универсальный регулятор для отслеживания стохастических сигналов с неизвестной спектральной плотностью // Доклады РАН. 2006. Т. 409. № 4. С. 461–466.

139. *Proskurnikov A., Tempo R., Parsegov S.* Network science on belief system dynamics under logic constraints // Science. 2016. Vol. 354. No. 6310. P. 321–326.

140. *Fradkov A.L., Pogromsky A.Yu.* Introduction to control of oscillations and chaos. World Scientific Publishers, Singapore, 1998.

141. *Fradkov A.L., Miroshnik I.V., Nikiforov V.O.* Nonlinear and Adaptive Control of Complex Systems. Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 1999.

142. *Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л.* Управление хаосом: Методы и приложения. I. Методы // АиТ. 2003. № 5. С. 3–45.

143. *Fradkov A.L.* Cybernetical physics: from control of chaos to quantum control. Springer-Verlag, 2007.

144. *Matveev A.S., Savkin A.V.* The problem of state estimation via asynchronous communication channels with irregular transmission times // IEEE Transactions on Automatic Control. 2003. 48(4). P. 670–676.

145. *Matveev A.S., Savkin A.V.* An analogue of Shannon information theory for networked control systems. Stabilization via a noisy discrete channel / In Proc. 43th IEEE Conference on Decision and Control. December 2004. Atlantis, Paradise Island, Bahamas. P. 4491–4496.

146. *Matveev A.S., Savkin A.V.* Optimal control via asynchronous communication channels // Journal of Optimization Theory and Applications. 2004. 122(3). P. 539–572.

147. *Matveev A.S., Savkin A.V.* An analogue of Shannon information theory for detection and stabilization via noisy discrete communication channels // SIAM Journal on Control and Optimization. 2007. 46(4). P. 1323–1361, 2007.

148. *Matveev A.S., Savkin A.V.* Estimation and Control over Communication Networks. Springer-Verlag, 2008.

149. *Matveev A.S., Pogromskii A.Y.* Observation of nonlinear systems via finite capacity channels, Part II: Restoration entropy and its estimates // Automatica. 2019. Vol. 103 (2019). P. 189–199.
https://doi.org/10.1016/j.automatica.2019.01.019

150. *Kawan C., Matveev A.S., Pogromsky A.Y.* Remote state estimation problem: Towards the data-rate limit along the avenue of the second Lyapunov method // Automatica. 2021. Volume 125. paper number 109467.
https://doi.org/10.1016/j.automatica.2020.109467

151. *Fradkov A.L., Andrievsky B., Evans R.J.* Chaotic observer-based synchronization under information constraints // Phys Rev. E. 2006. V. 73. 066209.

152. *Fradkov A.L., Andrievsky B., Evans R.J.* Synchronization of nonlinear systems under information constraints // Chaos. 2008. Vol. 18. Is. 3, 037109, 1–6.
https://doi.org/10.1063/1.2977459

153. *Fradkov A.L., Andrievsky B., Evans R.J.* Adaptive Observer-Based Synchronization of Chaotic Systems With First-Order Coder in the Presence of Information Constraints // IEEE Trans. Circuits and Systems I. July 2008. V. 55 (6). P. 1685–1694.

154. *Fradkov A.L., Andrievsky B., Ananyevskiy M.S.* Passification based synchronization of nonlinear systems under communication constraints and bounded disturbances // Automatica. 2015. V. 55 (5). P. 287–293.

155. *Andrievsky B., Fradkov A.L., Liberzon D.* Robustness of Pecora-Carroll synchronization under communication constraints // Systems & Control Letters. 2018. 111. P. 27–33.

156. *Andrievsky B., Orlov Y., Fradkov A.L.* Output Feedback Control of Sine-Gordon Chain over the Limited Capacity Digital Communication Channel // Electronics. 2023. 12. P. 2269.

157. *Андриевский Б.Р., Матвеев А.С., Фрадков А.Л.* Управление и оценивание при информационных ограничениях: к единой теории управления, вычислений и связи // АиТ. 2010. вып. 4. С. 34–99.

158. *Shiriaev A.S., Freidovich L.B., Spong M.W.* Controlled invariants and trajectory planning for underactuated mechanical systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2014. 59(9). P. 2555–2561.

159. *Shiriaev A.S., Perram J.W., Canudas de Wit C.* Constructive tool for orbital stabilization of underactuated nonlinear systems: Virtual constraints approach // IEEE Transactions on Automatic Control. 2005. 50(8). P. 1164–1176.

160. *Surov M.O., Shiriaev A.S., Freidovich L.B., Gusev S.V., Paramonov L.* Case study in non-prehensile manipulation: Planning and orbital stabilization of one-directional rollings for the «Butterfly» robot / In Proceedings of the International Conference on Robotics and Automation. May 2015. P. 1484–1489, Washington, DC.

161. *Savkin A.V., Cheng T.M., Xi Z., Javed F., Matveev A.S., Hguyen H.* Decentralized Coverage Control Problems for Mobile Robotic Sensor and Actuator Networks. IEEE Press and John Wiley and Sons, 2015, Hoboken, NJ.

162. *Matveev A.S., Savkin A.V., Hoy M.C., Wang C.* Safe Robot Navigation among Moving and Steady Obstacles, Elsevier and Butterworth Heinemann, 2016, Oxford, UK.

163. *Hoy M., Matveev A.S., Savkin A.V.* Algorithms for collision-free navigation of mobile robots in complex cluttered environments: a survey // Robotica. 2015. Vol. 33. Is. 03. P. 463–497.

164. *Matveev A.S., Savkin A.V.* Optimal Chemotherapy Regimens: Influence of Tumors on Normal Cells and Several Toxicity Constraints // IMA Journal of Mathematics Applied in Medicine and Biology. 2001. Vol. 18. P. 25–40.

165. *Churilov A., Medvedev A., Shepeljavyi A.* Mathematical model of non-basal testosterone regulation in the male by pulse modulated feedback // Automatica. 2009. V. 45. № 1. P. 78–85.

166. *Churilov A., Medvedev A., Shepeljavyi A.* A state observer for continuous oscillating systems under intrinsic pulse-modulated feedback // Automatica. 2012. V. 48. P. 1117–1122.

167. *Filippov S.A., Fradkov A.L.* Control Engineering at School: Learning by Examples / IFAC Proceedings Volumes. 2012. Vol. 45. Is. 11. P. 118–123.

168. *Filippov Sergey, Ten Natalia, Shirokolobov Ilya, Fradkov Alexander.* Teaching Robotics in Secondary School // IFAC-PapersOnLine. July 2017. Vol. 50. Is. 1. P. 12155–12160.

169. Автоматика и Телемеханика. 2006. № 10. 2006. № 11. Тематические выпуски: Владимир Андреевич Якубович (к 80-летию со дня рождения).

170. Вестник С.-Петербург. ун-та. Математика, механика, астрономия. 2006, Вып. 4 Специальный выпуск: Владимир Андреевич Якубович (к 80-летию со дня рождения).

171. International Journal of Robust and Nonlinear Control. Special Issue: Frequency-domain and Matrix Inequalities in Systems and Control Theory. Dedicated to the 80th Birthday of V.A. Yakubovich. 2007. V. 17. Is. 5–6.

172. *Фрадков А.Л.* Научная биография В.А. Якубовича и его школа в Санкт-Петербургском (Ленинградском) университете. Специальная сессия “Владимир Андреевич Якубович и его научная школа”. XII Всероссийское совещание по проблемам управления (ВСПУ-2014). М.: 16–19 июня 2014 г.

173. *Fradkov A., Gelig A., Leonov G.* Vladimir Andreevich Yakubovich. Obituary // IEEE Control Systems Magazine. 2013. Vol. 33. Is. 2. P. 89–91.

174. *Fradkov A.L.* Scientific School of Vladimir Yakubovich in the 20th century // IFAC-PapersOnLine. July 2017. Vol. 50. Is. 1. P. 5231–5237.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 15.06.2023

После доработки 16.07.2023

Принята к публикации 20.07.2023