Автоматика и телемеханика, № 9, 2023

Линейные системы

© 2023 г. **В.А. МОЗЖЕЧКОВ, д-р техн. наук (v.a.moz@yandex.ru)**
(Тульский государственный университет)

СИНТЕЗ СТАТИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ В ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ ОБУЧАЮЩИХ ПРИМЕРОВ

Рассматривается задача синтеза статической обратной связи в линейных стационарных системах управления с дискретным временем. Желаемое поведение системы определено набором законов изменения во времени выхода системы, выступающих в качестве обучающих примеров, а также требованием к степени ее устойчивости. Учитываются ограничения на структуру регулятора. Получены соотношения и предложен основанный на их применении итерационный метод, позволяющий находить хорошее начальное приближение искомой матрицы обратной связи и осуществлять его последовательное уточнение. В общем случае решается задача поиска матриц обратной связи, имеющих простую структуру, т.е. таких матриц, в которых отличны от нуля только те компоненты, выбор значений которых, отличных от нуля, необходим и достаточен для придания системе желаемых свойств. Приведены примеры реализации предложенного метода.

Ключевые слова: линейные дискретные системы управления, обратная связь, синтез.

DOI: 10.31857/S0005231023090039, **EDN:** JRWIYV

1. Введение

Синтезу статической обратной связи в линейных системах управления посвящено значительное число работ. В них желаемое поведение системы определяется, как правило, требованием принадлежности корней ее характеристического полинома к некоторому множеству значений либо требованием минимизации интегрального квадратичного функционала, оценивающего качество переходных процессов. Соответственно рассматриваются задача размещения полюсов передаточной функции замкнутой системы (модального управления) и задача синтеза линейно-квадратичного регулятора (LQR). Для них существуют [1] эффективные методы, обеспечивающие их точное решение, при условии, что в регуляторе могут использоваться все компоненты вектора состояния и на выбор значений коэффициентов обратных связей не наложены явные ограничения. Однако эти задачи оказываются трудноразрешимыми, если в них учитываются ограничения на структуру регулятора [2, 3], в частности состоящие в запрете использовать некоторые переменные состояния, что имеет место, например, при синтезе обратной связи по выходу. Было показано, что в таком случае задача размещения полюсов является

NP-трудной [2, 4] и сводится, как правило, к негладкой и невыпуклой задаче оптимизации в пространстве параметров регулятора [2, 5]. Для нее были найдены необходимые и достаточные условия существования решения [6–9], но не удалось разработать методы получения точного решения [2, 3], вместе с тем были предложены алгоритмы, позволяющие вычислить искомое решение приближенно. Значительная их часть основана на использовании для синтеза стабилизирующих регуляторов функций Ляпунова и сведении исходной задачи к поиску решения нелинейных матричных неравенств путем многократного решения линейных матричных неравенств (LMI) в ходе итерационного уточнения искомого решения [9–13]. В [14–16] исследована возможность использования техники LMI для учета требований синтеза разреженной матрицы обратной связи, ограничивающих свободу выбора структуры регулятора. Наряду с указанными предложены [2, 3] алгоритмы синтеза стабилизирующих регуляторов по выходу, основанные на минимизации спектральной абсциссы замкнутой системы путем ее непосредственного вычисления и решения соответствующей задачи нелинейного программирования на основе методов, учитывающих специфику рассматриваемой задачи синтеза. В [8, 17, 18] представлены алгоритмы, основанные на методах внешней алгебры, позволяющие находить начальное приближение искомой матрицы обратной связи по выходу для задачи модального управления, которое затем итерационно уточняется. Применительно к задаче LQR с обратной связью по выходу получены [19, 20] необходимые условия существования решения в виде системы нелинейных матричных уравнений и предложены использующие их итерационные алгоритмы поиска приближенного решения данной задачи [20–24]. Численные методы решения задачи LQR с разреженной матрицей обратной связи, основанные на технике LMI, рассмотрены в [14–16, 25], впервые такая задача была решена в [26] путем ее сведения к задаче нелинейного дискретного программирования. Указанные выше алгоритмы не гарантируют нахождение точного решения и носят эвристический характер, поскольку отсутствуют строгие доказательства их сходимости.

Существенным отличием задачи, рассматриваемой в данной статье, от классических задач синтеза статической обратной связи является то, что желаемое поведение системы определено набором законов изменения во времени выхода системы, выступающих в качестве обучающих примеров. Ими могут быть траектории, соответствующие, например, закону управления с обратной связью, который необходимо упростить, используя в синтезируемой системе более простой регулятор (в частности, система с обратной связью по состоянию может быть источником обучающих примеров для синтеза обратной связи по выходу), либо закону программного управления или управлению, выполненному человеком, которые необходимо реализовать в синтезируемой системе на основе закона управления с обратной связью. Совместно с условием близости траекторий движения системы к траекториям, заданным в качестве обучающих примеров, учитывается требование обеспечения заданной степени устойчивости системы. Кроме того, учитываются ограничения, накладываемые на структуру обратной связи. Они могут быть выражены в форме требования использования обратной связи по выходу, требования равенства нулю некоторых коэффициентов матрицы обратной связи, а также в форме требования исключения избыточности ее структуры, эквивалентного требованию получения матрицы обратной связи с простой структурой [27–31], т.е. матрицы, в которой отличны от нуля только те компоненты, выбор значений которых, отличных от нуля, необходим и достаточен для придания системе желаемых свойств. Целью синтеза является приближение поведения системы к желаемому в результате выбора значений коэффициентов и структуры матрицы обратной связи. Предлагаемая постановка задачи синтеза обратной связи обладает новизной и не рассматривалась в работах, посвященных синтезу регуляторов, включая работы, предполагающие использование методов машинного обучения [32–35].

В статье получены соотношения и предложен основанный на их применении итерационный метод, позволяющий находить хорошее начальное приближение искомой матрицы обратной связи и осуществлять его последовательное уточнение. С использованием предлагаемого метода представляется возможность синтезировать все возможные варианты матриц обратной связи с простой структурой.

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему управления, описываемую уравнениями

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \tag{1}$$

$$y_k = Cx_k, \tag{2}$$

$$u_k = Ky_k, \tag{3}$$

где k – дискретное время, принимающее значения из множества натуральных чисел; x_k, y_k, u_k – соответственно вектор состояния, выхода и управления; значения компонент векторов x_k, y_k, u_k и элементов постоянных матриц A, B, C, K – действительные числа; матрица регулятора K подлежит определению, остальные матрицы считаем заданными.

Учтем ограничения, накладываемые на структуру регулятора (3). Они обычно сводятся [2, 14, 15, 26] к требованию равенства нулю некоторых коэффициентов в матрице регулятора $K = (k_{i,j})$, поэтому будем учитывать условие

$$k_{i,j} = 0, \ \forall (i,j) \notin \check{S}, \tag{4}$$

где $\check{S}$ – набор пар индексов (i,j) коэффициентов матрицы K, не стесненных требованием их равенства нулю.

Желаемое поведение системы (1)–(4) определим, задав для некоторого набора начальных условий x_0^γ, $\gamma \in \{\overline{1,q}\}$ соответствующие желаемые траектории $Y_\gamma = (y_k^\gamma)$, $k \in \{\overline{1,N}\}$ изменения во времени выхода (2) системы (1)–(4), т.е. зададим набор

$$Q = \{(x_0^\gamma, Y_\gamma)\}, \quad \gamma \in \{\overline{1,q}\}, \tag{5}$$

в котором пары (x_0^γ, Y_γ) являются обучающими примерами.

В системе (1)–(4), идеально соответствующей желаемому поведению, для начальных условий $x(0) = x_0^\gamma$ в каждый момент времени $k \in \{\overline{1,N}\}$ выполняется равенство $y(x_0^\gamma, K)_k = y_k^\gamma$. Потребуем выполнение этого условия для каждой пары $(x_0^\gamma, Y_\gamma) \in Q$, т.е. считаем необходимым выполнение равенств

$$y(x_0^\gamma, K)_k = y_k^\gamma,\ \forall k \in \{\overline{1,N}\},\ \forall \gamma \in \{\overline{1,q}\}. \tag{6}$$

Возможность приближенного выполнения требования (6) опишем условием

$$\varepsilon_k^{\gamma -} \le y(x_0^\gamma, K)_k - y_k^\gamma \le \varepsilon_k^{\gamma +},\ \forall k \in \{\overline{1,N}\},\ \forall \gamma \in \{\overline{1,q}\}, \tag{7}$$

где $\varepsilon_k^{\gamma -}$, $\varepsilon_k^{\gamma +}$ – заданные постоянные векторы.

Выполнение условий (7) в общем случае не гарантирует устойчивость системы (1)–(4). Поэтому совместно с (7) потребуем обеспечить необходимую степень устойчивости по Шуру матрицы $A_c = A + BKC$ замкнутой системы (1)–(4), т.е. требуется выполнить условие

$$\rho(A_c(K)) \le 1 - \sigma, \tag{8}$$

где $\rho(A_c(K))$ – спектральный радиус матрицы $A_c(K)$, σ – заданная степень устойчивости.

Выбор матрицы K осуществим из условия наилучшего приближения поведения системы (1)–(4) к желаемому в смысле минимизации евклидовой нормы вектора $\Delta y(K)$, составленного из невязок $y(x_0^\gamma, K)_k - y_k^\gamma$ всех уравнений (6), т.е. из условия

$$|\Delta y(K)| \to \min_K . \tag{9}$$

Рассматриваемая задача в случае, когда структура регулятора задана (указан фиксированный набор $\check{S}$, определяющий структуру регулятора), состоит в нахождении матрицы K в системе (1)–(4), соответствующей требованиям (7)–(9).

В общем случае будем решать задачу структурного синтеза, состоящую в определении всех наборов $\check{S}$ и соответствующих им матриц K, для которых выполняются условия (7)–(9) и структура регулятора (3), (4) является простой, что означает [27–31] отличие от нуля в матрице K только тех ее компонент, выбор значений которых, отличных от нуля, необходим и достаточен для придания системе (1)–(4) желаемых свойств. Формально задача поиска множества Ω простых структур регулятора (3), (4) состоит в нахождении таких приемлемых структур $\check{S} \in \zeta$, для которых нельзя указать менее сложную приемлемую структуру $\check{S}' \in \zeta$ (структуру $\check{S}'$ считаем проще, чем $\check{S}$, если $\check{S}' \subset \check{S}$), т.е. требуется найти

$$\Omega = \left\{ \check{S} \in \zeta \mid \{ \check{S}' \in \zeta \mid \check{S}' \subset \check{S} \} = \varnothing \right\}, \tag{10}$$

где ζ – множество приемлемых структур, т.е. структур, для которых существует матрица K, удовлетворяющая условиям (1)–(4), (7)–(9), формула $\{\check{S}' \in \zeta \mid \check{S}' \subset \check{S}\} = \varnothing$ указывает на отсутствие приемлемой структуры $\check{S}'$, которая проще, чем структура $\check{S} \in \Omega$.

3. Анализ задачи

Решение системы (1)–(3) для заданных x_0^γ, K можно записать [1, с. 20] в следующем виде:

$$y(x_0^\gamma, K)_k = CA^k x_0^\gamma + C \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} BKy(x_0^\gamma, K)_i, \ \forall k \in \{\overline{1, N}\}. \tag{11}$$

Условие (6) с учетом (11) эквивалентно системе уравнений

$$CA^k x_0^\gamma + C \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} BKy(x_0^\gamma, K)_i = y_k^\gamma, \ \forall k \in \{\overline{1, N}\}, \ \forall \gamma \in \{\overline{1, q}\}, \tag{12}$$

из которой в результате тождественных преобразований получаем систему

$$\begin{gathered} CA^k x_0^\gamma + C \sum_{i=0}^{k-1} \left(y(x_0^\gamma, K)_i^{\mathrm{T}} \otimes A^{k-i-1} B \right) \mathrm{vec}(K) = y_k^\gamma, \\ \forall k \in \{\overline{1, N}\}, \ \forall \gamma \in \{\overline{1, q}\}, \end{gathered} \tag{13}$$

где $\otimes$ – произведение Кронекера [36, с. 83], $\mathrm{vec}(\cdot)$ – функция векторизации [36], ее результатом является столбец, полученный последовательным соединением всех столбцов матрицы, указанной в качестве аргумента. Систему (13) запишем в виде

$$Y_{0\gamma} + G_\gamma(K)\mathrm{vec}(K) = Y_\gamma, \ \forall \gamma \in \{\overline{1, q}\}, \tag{14}$$

где $Y_{0\gamma}$, Y_γ, $G_\gamma(K)$ – столбцы, составленные соответственно из блоков $CA^k x_0^\gamma$, y_k^γ, $G_{k\gamma}(K) = C \sum_{i=0}^{k-1} \left(y(x_0^\gamma, K)_i^{\mathrm{T}} \otimes A^{k-i-1} B \right)$, $k \in \{\overline{1, N}\}$.

Из (14) с учетом (4) получаем:

$$G_\gamma(K)_S \mathrm{vec}(K)_S = \hat{Y}_\gamma, \ \forall \gamma \in \{\overline{1, q}\}, \tag{15}$$

где матрица $G_\gamma(K)_S$ и вектор $\mathrm{vec}(K)_S$ составлены соответственно из столбцов матрицы $G_\gamma(K)$ и координат вектора $\mathrm{vec}(K)$, номера которых указаны в наборе S, определяющем согласно заданному в (4) набору $\check{S}$ номера координат вектора $\mathrm{vec}(K)$, не стесненных требованием равенства их значений нулю, $\hat{Y}_\gamma = Y_\gamma - Y_{0\gamma}$.

Пусть все желаемые траектории $Y_\gamma = (y_k^\gamma)$, $k \in \{\overline{1,N}\}$, $\gamma \in \{\overline{1,q}\}$ принадлежат множеству решений системы (1)–(4), тогда в выражениях (12), (13) можно заменить $y(x_0^\gamma, K)_i$ на y_i^γ, при этом матрица $G_\gamma(K)$ в (15) оказывается постоянной, не зависящей от искомой неизвестной матрицы K. В таком случае систему (15) можно представить в виде

$$\bar{G}_{\gamma S}\mathrm{vec}(K)_S = \hat{Y}_\gamma,\ \forall\gamma \in \{\overline{1,q}\}, \tag{16}$$

где $\bar{G}_\gamma$ – столбец блоков $\bar{G}_{k\gamma} = C\sum_{i=0}^{k-1}\left(y^{\gamma_i\,\mathrm{T}} \otimes A^{k-i-1}B\right)$, $k \in \{\overline{1,N}\}$.

Утверждение 1. *Требование* (6) *точного соответствия системы* (1)–(4) *желаемому поведению, заданному набором обучающих примеров* (5), *выполняется тогда и только тогда, когда все желаемые траектории* Y_γ, $\gamma \in \{\overline{1,q}\}$ *принадлежат множеству решений системы* (1)–(4) *и матрица* K *с учетом* (4) *является решением системы линейных уравнений* (16).

Доказательство утверждения 1 представлено в Приложении.

Из утверждения 1 следует, что совместность системы (16) является необходимым и достаточным условием выполнения равенств (6), т.е. условием точного воспроизведения всех обучающих примеров синтезируемой системой.

Из показанной выше эквивалентности уравнений (6) и (15) следует эквивалентность условий (9), (7) соответственно требованиям

$$\sum_{\gamma=1}^{q} \mid G_\gamma(K)_S\mathrm{vec}(K)_S - \hat{Y}_\gamma \mid^2 \to \min_K, \tag{17}$$

$$\hat{Y}_\gamma + \varepsilon_\gamma^- \le G_\gamma(K)_S\mathrm{vec}(K)_S \le \hat{Y}_\gamma + \varepsilon_\gamma^+, \quad \gamma \in \{\overline{1,q}\}. \tag{18}$$

Утверждение 2. *Для выполнения требований* (7)–(9) *наилучшего приближения поведения системы* (1)–(4) *к желаемому, заданному набором обучающих примеров* (5), *необходимо и достаточно, чтобы матрица* K *с учетом равенств* (4) *являлась решением нелинейной задачи о наименьших квадратах* (17) *с ограничениями* (18) *и* (8).

Доказательство утверждения 2 представлено в Приложении.

4. Метод решения

4.1. Решение задачи с заданной структурой регулятора

Пусть структура регулятора задана, т.е. указан набор $\check{S}$. Искомую матрицу K, соответствующую условиям (4), (7)–(9), можно определить, решив согласно утверждению 2 задачу (4), (17), (18), (8), которую далее будем называть задачей обучения статического регулятора (задачей ОСР). Успешность ее решения в значительной степени будет зависеть от того, насколько начальные значения искомых неизвестных близки к значениям, соответствующим решению, т.е. от выбора начального приближения.

Хорошим начальным приближением решения задачи ОСР может служить решение системы (16) или, в общем случае, ее приближенное решение – матрица $\underline{K}$, для которой вектор $\mathrm{vec}(\underline{K})_S$ минимизирует евклидову норму разности левой и правой частей системы (16), т.е. является ее нормальным псевдорешением

$$\mathrm{vec}(\underline{K})_S = \bar{G}_S^{+}\hat{Y}, \tag{19}$$

где $\bar{G}_S^{+}$ – матрица, псевдообратная к матрице системы (16), $\hat{Y}$ – правая часть системы (16).

Близость матрицы $\underline{K}$ к искомому решению обусловлена следующим. Пусть условия (7)–(8) совместны и $\check{K}$ – решение задачи ОСР. Если желаемые траектории принадлежат множеству траекторий, возможных в системе (1)–(4), то согласно утверждению 1 матрица $\check{K}$ совпадает с решением системы (16), т.е. $\check{K} = \underline{K}$. Небольшое расхождение желаемых и возможных траекторий приводит к небольшому расхождению между матрицами $\check{K}$ и $\underline{K}$, так как малым изменениям параметров системы (1)–(4) соответствуют малые изменения ее решений и наоборот. Совместность условий (7)–(8) означает близость желаемых и возможных в системе (1)–(4) траекторий, поэтому, если искомое решение задачи ОСР существует, оно близко к $\underline{K}$ (здесь и далее имеется в виду близость матриц, оцениваемая нормой Фробениуса).

Матрица $\underline{K}$ в общем случае отличается от искомого решения, так как при ее определении не в полной мере учитываются условия (7)–(9), поэтому, используя ее как отправную точку, будем искать решение, соответствующее всей совокупности предъявляемых требований.

Эффективность поиска решения задачи ОСР можно повысить, если учесть ее специфические особенности. Заметим, что задача ОСР превращается в линейную задачу о наименьших квадратах с линейными ограничениями [37, с. 225] (далее – задача НКЛ), если в (17), (18) заменить $G_\gamma(K)_S$ на неизменную матрицу $G_\gamma(K^*)_S$, соответствующую фиксированной матрице K^*, и в (8) заменить функцию $\rho(A_c(K))$ ее линейной аппроксимацией вблизи K^*. Указанная линеаризация приемлема при поиске решения в малой окрестности матрицы K^*. Поэтому на ее основе можно на каждом очередном шаге поиска, решая задачу НКЛ с матрицей K^*, являющейся матрицей, найденной на предшествующем шаге, последовательно приближаться к решению задачи ОСР.

Предлагаемый алгоритм решения задачи ОСР сводится к следующим действиям.

1. Выбираем в качестве начального приближения искомого вектора $\mathrm{vec}(K)_S$ нормальное псевдорешение системы (16).

2. Выполняем итерационный поиск решения. На нулевой итерации принимаем $\mathrm{vec}(K^{(0)})_S = \mathrm{vec}(\underline{K})_S$ (номер итерации будем указывать в верхнем

индексе в скобках). Далее на каждой j-й итерации решаем следующую задачу НКЛ:

$$\sum_{\gamma=1}^{q} \mid G_\gamma^{(j-1)}\alpha^{(j)} - \hat{Y}_\gamma \mid^2 \to \min_K, \tag{20}$$

$$\hat{Y}_\gamma + \varepsilon_\gamma^- \le G_\gamma^{(j-1)}\alpha^{(j)} \le \hat{Y}_\gamma + \varepsilon_\gamma^+, \quad \gamma \in \{\overline{1,q}\}, \tag{21}$$

$$r_0^{(j-1)} + r_1^{(j-1)}\alpha^{(j)} \le 1 - \sigma, \tag{22}$$

где $\alpha^{(j)} \equiv \mathrm{vec}(K^{(j)})_S$ – вектор неизвестных, $G_\gamma^{(j-1)}$ – столбец, составленный из блоков $G_{k\gamma}(K^{(j-1)}) = C\sum_{i=0}^{k-1}\Big(y\left(x_0^\gamma, K^{(j-1)}\right)_i^{\mathrm{T}} \otimes A^{k-i-1}B\Big)$, $k \in \{\overline{1,N}\}$, $r_0^{(j-1)} + r_1^{(j-1)}\alpha^{(j)}$ – линейное приближение функции $\rho(A_c(K))$ вблизи $K^{(j-1)}$. Если при решении задачи НКЛ (20)–(22) не удается выполнить условия (21), (22), то поиск решения прекращается и констатируется, что решение задачи ОСР не удалось найти (либо потому что оно не существует, либо по причине недостаточной эффективности рассматриваемого алгоритма).

3. Поиск решения успешно завершается, когда найден вектор неизвестных $\alpha^* = \alpha^{(j)}$, для которого выполняются условия (21), (22) и либо становится достаточно малым значение $|\alpha^{(j)} - \alpha^{(j-1)}|$ или значение целевой функции, представленной в (20), либо исчерпано заданное число итераций. В качестве решения принимаем матрицу $K = \mathrm{vec}_S^{-1}(\alpha^*)$, где $\mathrm{vec}_S^{-1}(\cdot)$ – функция, обратная функции векторизации, осуществляющая восстановление с учетом (4) матрицы K по вектору, указанному в качестве аргумента.

Представленный метод в значительной мере аналогичен итерационному алгоритму Гаусса–Ньютона, используемому для решения безусловной нелинейной задачи о наименьших квадратах, в котором на каждой итерации, применяя теорему Тейлора, линеаризуют целевую функцию и решают полученную таким образом линейную задачу о наименьших квадратах. Предлагаемый метод отличается тем, что он существенно использует специфику задачи (17), (18), (8), благодаря чему для линеаризации целевой функции не требуется дифференцирование; для этого, как указано выше, достаточно в пределах очередной итерации фиксировать матрицу K. Кроме того, предложенный метод является методом условной оптимизации, т.е. позволяет учитывать ограничения (условия (18), (8)) при решении нелинейной задачи о наименьших квадратах. На каждой итерации предлагаемого метода решается задача НКЛ, относящаяся к классу задач выпуклого программирования [38, 39], для которого разработаны эффективные оптимизационные процедуры, гарантирующие получение решения либо констатацию его отсутствия (в системе Matlab для решения задач НКЛ предназначена функция lsqlin).

4.2. Решение задачи структурного синтеза

Пусть структура регулятора не задана, т.е. набор $\check{S}$ в исходных данных задачи не указан и подлежит определению. В таком случае решаемая задача является задачей структурного синтеза. Она с учетом принятой формализации (10) состоит в определении таких наборов $\check{S}$ и соответствующих им матриц K, для которых выполняются условия (7)–(9) и структура регулятора (3), (4) является простой [27–31]. Ее можно решить, воспользовавшись алгоритмом, предназначенным для задач синтеза простых структур общего вида [31]. В качестве применяемой в нем процедуры оценки приемлемости структуры регулятора и расчета соответствующих ей параметров может выступать процедура, предложенная в 4.1.

5. Примеры

Пример 1. Рассмотрим модель двухмассовой системы [1, с. 52, с. 125]. Будем считать, что вектор выхода составляют все компоненты вектора состояния, кроме второй. Для шага дискретизации по времени 0,01, единичных значений масс и жесткости связывающей их пружины получаем следующие матрицы системы (1), (2) :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0{,}01 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}01 \\ -0{,}01 & 0{,}01 & 1 & 0 \\ 0{,}01 & -0{,}01 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}01 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В (3) искомая матрица K имеет размер 1×3, допускается возможность отличия от нуля всех ее компонент, поэтому в (4) $\check{S} = \{(1,1)\ (1,2)\ (1,3)\}$.

Желаемое поведение системы (1)–(4) определим, задав в качестве желаемых траектории движения, соответствующие оптимальному по критерию минимальной энергии управлению, переводящему систему из начальных состояний $x_0^1 = (-1; 1; 1; -1)$ и $x_0^2 = (-10; 10; -1; -1)$ в начало координат за время $k = 250$. Указанные траектории $Y_1 = (y_k^1)$, $Y_2 = (y_k^2)$, $k \in \{\overline{1{,}500}\}$ в паре с соответствующими начальными условиями составляют набор обучающих примеров (5) $Q = \{(x_0^1, Y_1), (x_0^2, Y_2)\}$. Их можно рассчитать, используя известные зависимости [1, с. 128].

Вначале решим задачу синтеза, не используя ограничений (7), (8), т.е. решим задачу безусловной оптимизации целевой функции (9). Воспользовавшись методом, изложенным в разделе 4.1, после трех итераций находим матрицу регулятора $K = (-10{,}671\ \ -4{,}124\ \ -13{,}745)$, ей соответствует $\sigma = 0{,}964 \cdot 10^{-2}$, значение целевой функции составило 37,25.

Пример 2. С целью повышения степени устойчивости потребуем увеличить значение σ до $1{,}2 \cdot 10^{-2}$ и уменьшить амплитуду колебаний на заключительном интервале движения (для $k \in \{300, \ldots, 500\}$), ограничив допустимое отклонение координат вектора выхода от желаемых траекторий значением $\pm 0{,}5$ и $\pm 1{,}5$ соответственно для x_0^1 и x_0^2 (в примере 1 эти отклонения были 0,68 и 2,23), т.е. с учетом указанных требований решим задачу условной оптимизации (9), (7), (8). Методом раздела 4.1 в результате трех итераций находим $K = (-13{,}012 \ \ -5{,}310 \ \ -16{,}821)$, при этом $\sigma = 1{,}2 \cdot 10^{-2}$, условия (7), (8) выполняются, значение целевой функции составило 120,32.

Пример 3. Рассмотрим модель бокового движения самолета, представленную в [26, с. 182]. Из нее для шага дискретизации по времени 0,001 получаем матрицы системы (1)

$$A = \begin{pmatrix} 1000 & 0 & 1 & 0{,}044 & 0 \\ -1{,}215 & 999 & 0{,}131 & 0 & 0 \\ 0{,}430 & 0{,}021 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1000 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0{,}040 & 1{,}587 \\ 0{,}381 & -0{,}067 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3}.$$

В уравнении (2) C – единичная матрица размером 5×5.

Решив для системы (1)–(3) задачу об оптимальном линейно-квадратичном регуляторе (LQR), минимизирующем критерий $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^{\mathrm{T}} x_k$, находим матрицу регулятора (3)

$$K_{\mathrm{LQR}} = -\begin{pmatrix} 2{,}049 & 0{,}098 & 3{,}937 & 0{,}096 & 0{,}766 \\ -0{,}110 & 1{,}100 & -0{,}168 & 1{,}031 & -0{,}642 \end{pmatrix}.$$

Пусть с целью упрощения регулятора необходимо исключить из набора используемых в нем переменных первую компоненту вектора состояния. Это можно сделать, записав при постановке задачи синтеза условие (4) в виде $k_{1,1} = 0$, $k_{2,1} = 0$, что эквивалентно синтезу обратной связи по выходу, содержащему все компоненты вектора состояния, кроме первой. Соответственно считаем, что в (4) задан набор $\check{S}$, содержащий все пары индексов коэффициентов матрицы K, кроме пар (1,1) и (2,1).

Набор обучающих примеров Q составим из траекторий движения $Y_\gamma = (y_k^\gamma)$, $\gamma \in \{\overline{1,5}\}$, $k \in \{\overline{1,10^4}\}$ системы (1)–(3) с LQR регулятором (с матрицей регулятора $K = K_{\mathrm{LQR}}$), соответствующих начальным условиям x_0^γ, в которых в каждом векторе x_0^γ компонента с номером γ равна единице, а остальные – нулю. Назначим компоненты векторов $\varepsilon_k^{\gamma\,-}$, $\varepsilon_k^{\gamma\,+}$ в (7) из условия, что допустимое отклонение траекторий движения системы (1)–(3) от желаемых составляет в каждый момент времени k для всех компонент y_k^γ не более $\pm 1\%$ от их максимальных абсолютных значений. Потребуем обеспечить степень устойчивости синтезируемой системы не менее степени устойчивости системы (1)–(3) с LQR, для этого назначаем в (8) $\sigma = 4 \cdot 10^{-5}$.

Воспользовавшись методом, изложенным в разделе 4.1, находим матрицу регулятора

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 6{,}622 & -13{,}519 & 8{,}180 & -8{,}181 \\ 0 & -1{,}420 & 0{,}621 & -1{,}414 & 1{,}001 \end{pmatrix}.$$

Решение получено в результате четырех итераций с остановкой по факту выполнения назначенных ограничений и отсутствия прогресса в уменьшении целевой функции.

Пример 4. Изменим постановку задачи примера 3: учтем отсутствие первой компоненты вектора состояния в векторе выхода, определив соответствующим образом матрицу C в уравнении (2) как матрицу 4×5, полученную удалением первой строки из матрицы C примера 3. Искомая матрица K в таком случае имеет размер 2×4. Решим задачу структурного синтеза рассматриваемой системы в формулировке, представленной в разделе 4.2. Воспользовавшись предложенным в 4.2 методом, находим наборы $\check{S}$ и соответствующие им матрицы K, представленные в таблице, для которых выполняются условия (21), (22) и структура регулятора (3), (4) является простой [27–31].

Таблица

№	Матрица регулятора	№	Матрица регулятора
1	$\begin{pmatrix} 4{,}819 & -10{,}920 & 5{,}898 & -6{,}696 \\ 0 & -1{,}444 & 0{,}403 & -0{,}184 \end{pmatrix}$	3	$\begin{pmatrix} 5{,}230 & -11{,}510 & 6{,}413 & -7{,}030 \\ -0{,}318 & -0{,}984 & 0 & 0{,}0786 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 6{,}084 & -12{,}742 & 7{,}500 & -7{,}736 \\ -0{,}994 & 0 & -0{,}867 & 0{,}644 \end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix} 5{,}112 & -11{,}344 & 6{,}268 & -6{,}936 \\ -0{,}225 & -1{,}120 & 0{,}120 & 0 \end{pmatrix}$

6. Заключение

В статье предложен новый подход к синтезу статической обратной связи в линейных стационарных системах управления с дискретным временем, отличающийся тем, что желаемое поведение системы определено набором законов изменения во времени выхода системы, выступающих в качестве обучающих примеров. Рассмотренная постановка задачи и метод ее решения допускают обобщение на случай синтеза динамических регуляторов на основе известной [3] процедуры сведения задачи синтеза системы с динамическим регулятором к эквивалентной задаче синтеза статической обратной связи.

Представленный в разделе 4.1 алгоритм решения задачи обучения статического регулятора носит эвристический характер, поскольку его сходимость подтверждена вычислительными экспериментами, но строго не доказана.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. Пусть матрица K является решением системы (16). При соблюдении указанного в утверждении условия принадлежности всех желаемых траекторий Y_γ, $\gamma \in \{\overline{1,q}\}$ множеству решений системы (1)–(4) уравнения (16) и (6), как было показано выше, эквивалентны. Следовательно, выбор матрицы K, обеспечивающий выполнение равенств (16), при соблюдении всех прочих условий утверждения гарантирует выполнение требований (6). Это доказывает достаточность условий утверждения. Если матрица K не является решением системы (16), тогда из нарушения уравнений (16) следует нарушение условий (6). Если некоторые из желаемых траекторий Y_γ, $\gamma \in \{\overline{1,q}\}$ не принадлежат множеству решений системы (1)–(4), то для них невозможно в каждый момент времени $k \in \{\overline{1,N}\}$ выполнение равенства $y_k = y_k^\gamma$ и, следовательно, невозможно выполнение условий (6). Это доказывает необходимость условий утверждения.

Доказательство утверждения 2. Справедливость утверждения 2 следует из показанной выше эквивалентности условий (1)–(4), (7)–(9) условиям (4), (8), (17), (18).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б.* Математическая теория автоматического управления. М.: Ленанд, 2019.
2. *Sadabadi M.S., Peaucelle D.* From static output feedback to structured robust static output feedback: A survey // Ann. Rev. Control. 2016. V. 42. P. 11–26.
3. *Syrmos V.L., Abdallah C.T., Dorato P., Grigoriadis K.* Static output feedback — a survey // Automatica. 1997. V. 33. No. 2. P. 125–137.
4. *Toker O., Ozbay H.* On the NP-hardness of solving bilinear matrix inequalities and simultaneous stabilization with static output feedback // IEEE American Control Conference. Seattle, Washington, USA. 1995. P. 2525–2526.
5. *Toscano R.* Structured controllers for uncertain systems: A stochastic optimization approach. N.Y.: Springer-Verlag, 2013.
6. *Rosinova D., Vesely V., Kucera V.* A necessary and sufficient condition for static output feedback stabilizability of linear discrete-time systems // Kybernetika. 2003. V. 39. P. 447–459.
7. *Cao Y.Y., Lam J., Sun Y.X.* Static output stabilization: an ILMI approach // Automatica. 1998. V. 34. No. 12. P. 1641–1645.
8. *Wang X.* Pole placement by static output feedback // J. Math. Syst. Estim. Control. 1992. V. 2. No. 2. P. 205–218.
9. *Пакшин П.В., Рябов А.В.* Синтез управления со статической обратной связью по выходу для линейных систем // АиТ. 2004. № 4. С. 61–69.

   Pakshin P.V., Ryabov A.V. A static output feedback control for linear systems // Autom. Remote Control. 2004. V. 65. No. 4. P. 559–566.
10. *Agulhari C.M., Oliveira R.C., Peres P.L.* LMI relaxations for reduced-order robust H^∞-control of continuous-time uncertain linear systems // IEEE Trans. Autom. Control. 2012. V. 57. No. 6. P. 1532–1537.
11. *Ebihara Y., Tokuyama K., Hagiwara T.* Structured controller synthesis using LMI and alternating projection method // Int. J. Control. 2004. V. 77. No. 12. P. 1137–1147.

12. *Grigoriadis K.M., Beran E.B.* Alternating projection algorithms for linear matrix inequalities problems with rank constraints // Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control. SIAM. Philadelphia, USA. 2000. P. 251–267.

13. *Leibfritz F.* An LMI-based algorithm for designing suboptimal static H^2/H^∞ output feedback controllers // SIAM J. Control Optim. 2001. V. 39. No. 6. P. 1711–1735.

14. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Разреженная обратная связь в линейных системах управления // АиТ. 2014. № 12. С. 13–27.

    Polyak B.T., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S. Sparse feedback in linear control systems // Autom. Remote Control. 2014. V. 75. No. 12. P. 2099–2111.

15. *Быков А.В., Щербаков П.С.* Синтез разреженной обратной связи в линейных дискретных системах // АиТ. 2018. № 7. С. 3–21.

    Bykov A.V., Shcherbakov P.S. Sparse feedback design in discrete-time linear systems // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 7. P. 1175–1190.

16. *Lin F., Fardad M., Jovanovi'c M.R.* Design of Optimal Sparse Feedback Gains via the Alternating Direction Method // IEEE Trans. Autom. Control. 2013. V. 58. No. 9. P. 2426–2431.

17. *Belozyorov V.Y.* New solution method of linear static output feedback design problem for linear control systems // Linear Algebra Appl. 2016. V. 504. P. 204–227.

18. *Blumthaler I., Oberst U.* Design, parametrization, and pole placement of stabilizing output feedback compensators via injective cogenerator quotient signal modules // Linear Algebra Appl. 2012. V. 436. P. 963–1000.

19. *Johnson T., Athans M.* On the design of optimal constrained dynamic compensators for linear constant systems // IEEE Trans. Autom. Control. 1970. V. 15 P. 658–660.

20. *Moerder D., Calise A.* Convergence of a numerical algorithm for calculating optimal output feedback gains // IEEE Trans. Autom. Control. 1985. V. 30 P. 900–903.

21. *Choi S., Sirisena H.* Computation of optimal output feedback gains for linear multivariable systems // IEEE Trans. Autom. Control. 1974. V. 19. P. 254–258.

22. *Kreisselmeier G.* Stabilization of linear systems by constant output feedback using the riccati equation // IEEE Trans. Autom. Control. 1975. V. 20. P. 556–557.

23. *Toivonen H.T.* A globally convergent algorithm for the optimal constant output feedback problem // Int. J. Control. 1985. V. 41. No. 6. P. 1589–1599.

24. *Geromel J., Peres P., Souza S.* Convex analysis of output feedback structural constraints // Proc. IEEE Conf. on Decision and Control. San Antonio, TX, USA. 1993. P. 1363–1364.

25. *Iwasaki T., Skelton R.* All controllers for the general H^∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas // Automatica. 1994. V. 30. P. 1307–1317.

26. *Параев Ю.И., Смагина В.И.* Задачи упрощения структуры оптимальных регуляторов // АиТ. 1975. № 6. С. 180–183.

27. *Мозжечков В.А.* Простые структуры в теории управления. Тула: ТулГУ, 2000.

28. *Мозжечков В.А.* Синтез линейных регуляторов с простой структурой // АиТ. 2003. № 1. С. 27–41.

    Mozzhechkov V.A. Design of Simple-Structure Linear Controllers // Autom. Remote Control. 2003. V. 64. No. 1. P. 23–36.

29. *Мозжечков В.А.* Синтез простых робастных регуляторов линейных стационарных динамических систем // Известия РАН. Теория и системы управления. 2021. № 3. С. 11–22.

30. *Мозжечков В.А.* Синтез простых релейных регуляторов автоколебательных систем управления // АиТ. 2022. № 9. С. 81–93.

    Mozzhechkov V.A. Synthesis of simple relay controllers in self-oscillating control systems // Autom. Remote Control. 2022. V. 83. No. 9. P. 1393–1403.

31. *Мозжечков В.А.* Простые структуры в задачах теории управления: формализация и синтез // Известия РАН. Теория и системы управления. 2022. № 3. С. 3–20.

32. *Vapnik V.N.* An overview of statistical learning theory // Transactions on Neural Networks. 1999. V. 10. № 5. P. 988–999.

33. *Воронцов К.В.* Комбинаторные оценки качества обучения по прецендентам // Доклады Академии наук. 2004. Т. 394. № 2. С. 175–178.

34. *Mohri M., Rostamizadeh A., Talwalkar A.* Foundations of Machine Learning. Massachusetts: MIT Press, 2012.

35. *Schmidhuber J.* Deep learning in neural networks // Neural Networks. 2015. V. 61. P. 85–117.

36. *Икрамов Х.Д.* Численное решение матричных уравнений. М.: Наука, 1984.

37. *Гилл Ф., Мюррей У., Райт М.* Практическая оптимизация. М.: Мир, 1977.

38. *Bertsekas D.P.* Convex Optimization Algorithms. Belmont, MA.: Athena Scientific, 2015.

39. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.В. Пакшиным.

Поступила в редакцию 14.11.2022

После доработки 21.06.2023

Принята к публикации 20.07.2023