

## Управление в технических системах

© 2023 г. Ю.Г. БУЛЫЧЕВ, д-р техн. наук (profbulychhev@yandex.ru)  
(АО «Концерн Радиоэлектронные технологии», Москва)

### КОСВЕННЫЙ МЕТОД ОДНОПОЗИЦИОННОЙ КООРДИНАТОМЕТРИИ С УЧЕТОМ ИНВАРИАНТОВ ДВИЖЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ СИНГУЛЯРНЫХ ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЙ

С учетом инвариантов движения и сингулярных ошибок измерений (представимых в заданном конечномерном функциональном пространстве соответствующей линейной комбинацией с неизвестными спектральными коэффициентами) решена задача однопозиционной косвенной координатометрии по сглаженным измерениям пеленга и радиальной скорости объекта. Рассмотрена возможность применения развиваемого метода к различным моделям движения и наблюдения. Приводятся аналитические соотношения для оценки точностных характеристик и методических ошибок. Дана сравнительная оценка вычислительных затрат.

*Ключевые слова:* однопозиционная координатометрия, косвенный метод, пеленг, радиальная скорость, инвариант, первый интеграл, условие несмещенности, условие инвариантности, критерий оптимальности, метод множителей Лагранжа, апостериорная дисперсия ошибки оценивания.

DOI: 10.31857/S0005231023090076, EDN: JTGGNE

#### 1. Введение

Вопросы, связанные с однопозиционной (активной и пассивной) координатометрией при решении широкого круга задач локации и навигации, остаются актуальными и по настоящее время. Как правило, эти методы реализуются с учетом прямых и косвенных измерений пеленгов, разностей фаз, доплеровских частот, относительных мощностей сигналов и их различных производных. При этом используется дополнительная информация от различных источников подсвета, отражателей (естественного и искусственного происхождения), внешних управляющих систем, а также априорные данные о структуре и некоторых параметрах излучаемого сигнала, скорости объекта, начальной или конечной точке его маршрута, наличии участков барражирования, маневра и др. (вот лишь некоторые источники [1–33]).

Решение задач, связанных с однопозиционной координатометрией в условиях помех различного типа, вполне укладывается в схему оптимального калмановского оценивания в стохастической постановке (как правило, с расширением пространства состояний) с использованием прямых и псевдоизмерений

[9, 10, 17–26, 30, 36]. Однако для широкого класса задач (например, связанных с экспресс- и постобработкой траекторных и телеметрических данных в полигонных и командно-измерительных комплексах, слежением за маневрирующими объектами в реальном времени и др. [2, 7, 8, 11]) на практике зачастую используются достаточно простые неоптимальные косвенные методы координатометрии, реализуемые на сглаженных измерениях. Они основаны на использовании простых детерминированных моделей движения (линейных, кусочно-линейных, полиномиальных, кусочно-полиномиальных, дифференциальных, кусочно-дифференциальных, групповых, кусочно-групповых и многих других), известных аналитических зависимостей, связывающих оцениваемые и измеряемые параметры, а также простых процедур сглаживания наблюдений на базе метода наименьших квадратов (МНК) и его различных модификаций. Такие методы уступают оптимальным методам фильтрации (линейной и нелинейной) в плане потенциальной точности, однако легко реализуемы на практике в реальном времени в условиях качественных сглаженных измерений и при их численной реализации не возникает проблем, связанных с переходными процессами, сходимостью и жесткими требованиями к объему и качеству исходной априорной информации (что зачастую характерно для оптимальных методов, например, при учете эффектов «размазывания точности» или «жесткости» [9, 32]). Так, для указанных выше комплексов, в которых традиционно реализуется многоэтапная обработка информации, применение косвенных методов используется на этапе экспресс-обработки, а оптимальные методы, как правило, реализуются на этапе постобработки.

Известны косвенные методы однопозиционной координатометрии, не использующие пеленги, но оперирующие с периодическими импульсными радиосигналами и ориентированные на возможность измерения непрерывного смещения частоты принимаемого сигнала в точке наблюдения, обусловленного движением либо источника излучения, либо наблюдателя [3, 7]. Принципиальным недостатком этих методов является необходимость учета априорной информации о величине скорости объекта (либо источника, либо наблюдателя), что для практики зачастую является неприемлемым. Кроме того, задача координатометрии ограничивается нахождением дальности и курсового угла для модели прямолинейного равномерного движения, что не позволяет оценить все параметры местоположения объекта для произвольного момента времени. Попытка снять ограничение, связанное со скоростью, предпринята в [27], однако в этом случае возникает необходимость отслеживания эволюции доплеровской частоты с учетом непрерывного накопления (подсчета) импульсов принимаемого сигнала в точке наблюдения. Очевидно, что речь идет только о высокоскоростных объектах и жестких ограничениях на условия наблюдения, при этом также используется модель прямолинейного равномерного движения. Общим недостатком косвенных методов, рассмотренных в [3, 7, 27], также является техническая сложность их практической реализации.

Известны угломерно-доплеровские методы однопозиционного определения параметров движения (см., например, [3, 4, 7, 9, 29]), использующие не только прямые измерения (радиальную скорость и пеленг), но и косвенные (производные различного порядка), а также не привлекающие указанную выше априорную информацию. Данные методы ориентированы на простейшие модели движения (например, орбитальную), не учитывают возможность построения нескольких независимых каналов координатометрии и появление сингулярных ошибок первичных измерений, обесценивающих информацию, содержащуюся в косвенных измерениях (производных от радиальной скорости и пеленга).

Заслуживает внимания метод [29], который оперирует с производными до второго порядка включительно и позволяющий формировать адаптивные алгоритмы координатометрии на базе нескольких параллельных алгоритмов, соответствующих инвариантам движения объекта. Однако анализ показал, что полученные в [29] аналитические соотношения и соответствующие им алгоритмы являются зависимыми и избыточными, при этом они ориентированы также только на модель прямолинейного равномерного движения.

В настоящей работе развивается косвенный метод однопозиционной координатометрии, инвариантный к сингулярным ошибкам заданного класса (представимых в заданном конечномерном функциональном пространстве соответствующей линейной комбинацией с неизвестными спектральными коэффициентами), позволяющий на базе полного набора инвариантов (для широкого класса моделей движения) формировать семейство независимых квазиоптимальных решений и с их помощью формировать результирующую оценку параметров движения объекта. Показан сравнительный вычислительный эффект.

Эффективность применения инвариантов для решения целого класса прикладных целевых задач однопозиционной и многопозиционной локации и навигации на основе косвенных методов наглядно продемонстрирована в [8, 11, 33, 37]. Здесь показана возможность децентрализации, распараллеливания и сокращения вычислительных затрат при обработке измерений в системах различного типа на основе инвариантов непрерывных групп Ли преобразований (НЛГЛП) и первых интегралов, применяемых для описания движения различных объектов.

## 2. Постановка задачи

Пусть в декартовой прямоугольной системе координат на отдельном участке наблюдения движение объекта описывается некоторым операторным уравнением (например, в векторно-алгебраической или векторно-дифференциальной форме)

$$(2.1) \quad \mathbf{G}(t, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) = 0 \quad \forall t \in [0, T],$$

где  $\boldsymbol{\rho} = [x, y, z]^T$  – вектор координат объекта ( $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ ),  $\boldsymbol{\eta}$  – вектор неизвестных вещественных параметров.

Полагаем, что координаты  $x, y, z$  являются гладкими и требуемое число раз дифференцируемыми функциями, а вектору  $\boldsymbol{\rho}$  ставится в соответствие вектор сферических координат  $\boldsymbol{\varsigma} = [r, \lambda, \varphi]^T$ , где  $r$  – наклонная дальность,  $\lambda$  – долгота,  $\varphi$  – широта. В качестве  $\mathbf{X} = [r^{(1)}, \lambda, \varphi]^T$  примем вектор прямых измерений (где  $r^{(1)} = dr/dt$ ), а в качестве  $\mathbf{Y}$  – вектор косвенных измерений, координатами которого являются производные от  $r^{(1)}, \lambda, \varphi$  различных порядков, необходимые для реализации одного из вариантов развиваемого метода. Выберем сетку («скользящее окно», далее называемое просто «окном»)  $\{t_{n+i}, i = \overline{-m, m}\}$ , где  $n \geq m$ ,  $m \in \{1, 2, \dots\}$ ,  $t_{n+i} \in [0, T]$ ,  $2m + 1$  – объем «окна». Вводя обозначение  $\boldsymbol{\mu} \in \{r^{(1)}, \lambda, \varphi\}$ , воспользуемся следующим аддитивным уравнением наблюдения

$$(2.2) \quad \mathbf{H}_\mu = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{s}_\mu + \boldsymbol{\xi}_\mu,$$

где

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu} &= [\mu_{n+i}, i = \overline{-m, m}]^T, \quad \mathbf{s}_\mu = [s_{\mu, n+i}, i = \overline{-m, m}]^T, \\ \boldsymbol{\xi}_\mu &= [\xi_{\mu, n+i}, i = \overline{-m, m}]^T, \quad \mu_{n+i} = \mu(t_{n+i}), \\ s_{\mu, n+i} &= s_\mu(t_{n+i}), \quad \xi_{\mu, n+i} = \xi_\mu(t_{n+i}). \end{aligned}$$

В (2.2) под  $s_\mu(t)$  понимается сингулярная ошибка

$$(2.3) \quad s_\mu(t) = \mathbf{D}_\mu^T \boldsymbol{\Theta}_\mu(t),$$

где

$\mathbf{D}_\mu = [d_{\mu k}, k = \overline{0, K}]^T$  – вектор неизвестных спектральных коэффициентов,  $\boldsymbol{\Theta}_\mu(t) = [\theta_{\mu k}(t), k = \overline{0, K}]^T$  – вектор заданных базисных функций.

Для представления  $\mu = \mu(t)$  также воспользуемся спектральной моделью

$$(2.4) \quad \mu(t) = \mathbf{A}_\mu^T \boldsymbol{\Psi}_\mu(t),$$

где

$\mathbf{A}_\mu = [a_{\mu b}, b = \overline{0, B}]^T$  – вектор неизвестных коэффициентов,

$\boldsymbol{\Psi}_\mu(t) = [\psi_{\mu b}(t), b = \overline{0, B}]^T$  – вектор заданных базисных функций.

Под  $\boldsymbol{\xi}_\mu$  понимается вектор случайных погрешностей с нулевым математическим ожиданием и корреляционной матрицей  $\mathbf{K}_\mu = [k_{\mu, n+i, n+j}, i, j = \overline{-m, m}]$ .

Модели (2.1)–(2.4) находят широкое применение при решении различных локационных и навигационных задач. Применяя для каждого участка наблюдения свою модель (2.1), можно описать сложные траектории, например,

характерные для маневрирующих объектов. В частности, весьма перспективен подход, основанный на описании таких траекторий простейшими группами Ли преобразований (например, сдвига, вращения и растяжения [8, 11, 31, 33–37]).

Требуется на основе набора инвариантов уравнения (2.1) (в частности, первых интегралов движения или инвариантов НЛГЛП) с учетом (2.2)–(2.4) и принятых ограничений развить косвенный метод координатометрии, не требующий расширения пространства состояний, устойчивый к сингулярной ошибке и обеспечивающий построение результирующей оценки параметров движения объекта по расширенному вектору прямых и косвенных измерений  $\mathbf{Z} = [\mathbf{X}^T, \mathbf{Y}^T]^T$ , координаты которого оцениваются с минимальными апостериорными дисперсиями.

### 3. Принцип определения параметров движения на основе инвариантов

Поставим в соответствие уравнению (2.1) скалярный инвариант  $I = I(t, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\gamma}_I)$  (где  $\boldsymbol{\gamma}_I$  – вектор, состоящий из некоторых производных от координат вектора  $\boldsymbol{\rho}$ ), который на решениях  $\boldsymbol{\rho}(t)$  и  $\boldsymbol{\gamma}_I(t)$  уравнения (2.1) удовлетворяет условию

$$(3.1) \quad I(t, \boldsymbol{\rho}(t), \boldsymbol{\gamma}_I(t)) = C = \text{const} \quad \forall t \in [0, T].$$

При переходе в (3.1) к сферическим координатам получаем

$$(3.2) \quad Q(t, \boldsymbol{\varsigma}(t), \boldsymbol{\gamma}_Q(t)) = C = \text{const} \quad \forall t \in [0, T],$$

где  $\boldsymbol{\gamma}_Q$  – вектор, состоящий из некоторых производных от координат вектора  $\boldsymbol{\varsigma}$ .

Способ нахождения инвариантов целиком определяется видом уравнения (2.1).

Найдем полную производную по  $t$  левой и правой частей уравнения (3.2):

$$(3.3) \quad \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\varsigma}} \left( \frac{d\boldsymbol{\varsigma}}{dt} \right)^T + \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\gamma}_Q} \left( \frac{d\boldsymbol{\gamma}_Q}{dt} \right)^T = 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

Раскрывая в (3.3) все производные, приходим к уравнению

$$(3.4) \quad W(t, \boldsymbol{\varsigma}, \boldsymbol{\gamma}_W) = 0 \quad \forall t \in [0, T],$$

где  $\boldsymbol{\gamma}_W$  – вектор, содержащий всевозможные производные от  $r, \lambda, \varphi$ .

Разрешая это уравнение относительно  $r$ , получаем искомую формулу для определения дальности до объекта

$$(3.5) \quad r = W^{-1}(t, \mathbf{Z}).$$

Если уравнению (2.1) поставить в соответствие набор независимых инвариантов  $I_l = I_l(t, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\gamma}_I)$  (где  $l = \overline{1, \overline{L}}$ ), то по аналогии с (3.1)–(3.5) получим набор формул

$$(3.6) \quad r[l] = W_{[l]}^{-1}(t, \mathbf{Z}_{[l]}), \quad l = \overline{1, \overline{L}}.$$

Данный набор может быть использован для адаптивного варианта оценивания с целью повышения точности оценивания дальности с учетом ошибок измерений. Так, если для фиксированного  $t$  вектор  $\mathbf{Z}_{[l]}$  оценивается с ошибкой, характеризуемой нулевым математическим ожиданием и соответствующей корреляционной матрицей  $\mathbf{K}_{\mathbf{Z}}$ , то дисперсию оценивания дальности можно найти по формуле

$$(3.7) \quad \sigma_{r[l]}^2 = \mathbf{H}_{[l]}^T \mathbf{K}_{\mathbf{Z}[l]} \mathbf{H}_{[l]}, \quad l = \overline{1, \overline{L}},$$

где  $\mathbf{H}_{[l]}$  – вектор-столбец частных производных от (3.6) по элементам вектора  $\mathbf{Z}_{[l]}$ , вычисленных на математических ожиданиях этих элементов.

В качестве оптимального варианта оценивания дальности выбирается тот, для которого

$$(3.8) \quad l^* = \arg \min_l \sigma_{r[l]}^2, \quad l^* \in \{1, 2, \dots, L\}.$$

Для определения декартовых координат объекта достаточно воспользоваться зависимостями

$$(3.9) \quad x[l^*] = r[l^*] \cos \varphi \cos \lambda, \quad y[l^*] = r[l^*] \cos \varphi \sin \lambda, \quad z[l^*] = r[l^*] \sin \varphi,$$

где вместо угловых координат  $\lambda$  и  $\varphi$  подставляются либо прямые измерения, либо их сглаженные значения.

Вместо (2.1) можно воспользоваться более общим случаем, если полагать, что на заданном участке наблюдения используется набор вероятных моделей  $\mathbf{G}_k(t, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) = 0$ , где  $k = \overline{0, \overline{K}}$ . В этом случае алгоритм (3.7)–(3.9) принимает вид

$$(3.10) \quad \begin{cases} \sigma_{r[k,l]}^2 = \mathbf{H}_{[k,l]}^T \mathbf{K}_{\mathbf{Z}[k,l]} \mathbf{H}_{[k,l]}, & k = \overline{1, \overline{K}}, \quad l = \overline{1, \overline{L}_k}, \\ [k^*, l^*] = \arg \min_{[k,l]} \sigma_{r[k,l]}^2, & k^* \in \{1, 2, \dots, K\}, \quad l^* \in \{1, 2, \dots, L_k\}, \\ x[k^*, l^*] = r[k^*, l^*] \cos \varphi \cos \lambda, \\ y[k^*, l^*] = r[k^*, l^*] \cos \varphi \sin \lambda, \\ z[k^*, l^*] = r[k^*, l^*] \sin \varphi. \end{cases}$$

Алгоритм (3.10) позволяет распараллелить вычислительный процесс с учетом числа используемых инвариантов и обеспечить адаптацию процедуры оценивания параметров движения объекта к условиям наблюдения.

#### 4. Примеры построения и использования инвариантов

Пусть на отдельно взятом участке наблюдения уравнению (2.1) соответствует НЛГЛП общего вида [32–34]:

$$(4.1) \quad T_a : \quad \boldsymbol{\rho}' = \mathbf{f}(a, \boldsymbol{\rho}_0, \boldsymbol{\eta}_0) \quad \forall a \in \Delta_a \subset R^1,$$

где  $\boldsymbol{\rho}' = [x', y', z']^T$ ,  $\mathbf{f}(a, \boldsymbol{\rho}_0, \boldsymbol{\eta}_0) = [f_x, f_y, f_z]^T$ ,  $\boldsymbol{\eta}_0$  – вектор числовых параметров группы,  $a$  – вещественный групповой параметр, такой, что при  $a = a_0$  (где  $a_0 \in \Delta_a$ ) выполняется условие  $\mathbf{f}(a_0, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}_0) = \boldsymbol{\rho}$ .

Модель (4.1) позволяет описать траекторию движения объекта, а если групповой параметр рассматривать как функцию времени  $a = a(t, \boldsymbol{\chi}_0)$  (где  $\boldsymbol{\chi}_0$  – вектор в общем случае неизвестных числовых параметров), то можно описать временной закон движения по этой траектории. Если провести замену координат  $\boldsymbol{\rho}' = \boldsymbol{\rho}$ ,  $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_0$ , то с учетом (2.1) получаем:  $\boldsymbol{\rho} - \mathbf{f}(a, \boldsymbol{\rho}_0, \boldsymbol{\eta}_0) = \mathbf{G}(t, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})$ ,  $\boldsymbol{\eta} = [\boldsymbol{\rho}_0, \boldsymbol{\eta}_0, \boldsymbol{\chi}_0]^T$ .

Инварианты  $I = I(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}_0)$  модели (4.1), не зависящие от параметров  $t$ ,  $\boldsymbol{\rho}_0$  и  $\boldsymbol{\chi}_0$ , находятся путем решения следующего линейного уравнения в частных производных

$$(4.2) \quad XI(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}_0) = \phi_x \frac{\partial I}{\partial x} + \phi_y \frac{\partial I}{\partial y} + \phi_z \frac{\partial I}{\partial z} = 0,$$

где  $X = \phi_x \partial/\partial x + \phi_y \partial/\partial y + \phi_z \partial/\partial z$  – инфинитезимальный оператор НЛГЛП, координаты которого находятся по формулам  $\phi_x = \partial f_x / \partial a$ ,  $\phi_y = \partial f_y / \partial a$ ,  $\phi_z = \partial f_z / \partial a$  в точке  $a = a_0$ .

С учетом (4.2) для нахождения инвариантов, учитывающих временной характер движения по траектории (4.1) и различные производные от вектора  $\boldsymbol{\rho}$ , строится расширенный оператор и соответствующее ему уравнение в частных производных [8, 11, 31–34].

Покажем реализацию развиваемого метода на примере группы сдвига. Пусть

$$T_{a=t} : \boldsymbol{\rho}' = \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\eta}_0 t \quad \forall a = t \in \Delta_a = [0, T] \subset R^1,$$

где  $\boldsymbol{\eta}_0 = \mathbf{V}_0 = [V_{x0}, V_{y0}, V_{z0}]^T$  – вектор скорости объекта, движущегося прямолинейно и равномерно. В этом случае имеем  $\phi_x = V_{x0}$ ,  $\phi_y = V_{y0}$ ,  $\phi_z = V_{z0}$  и два независимых инварианта  $I_{[1]} = xV_{y0} - yV_{x0} = xy^{(1)} - yx^{(1)}$  и  $I_{[2]} = xV_{z0} - zV_{x0} = xz^{(1)} - zx^{(1)}$ , при этом с учетом (3.1) получаем  $\gamma_{I_{[1]}}(t) = \gamma_{I_{[1]}} = [x^{(1)}, y^{(1)}]^T$  и  $\gamma_{I_{[2]}}(t) = \gamma_{I_{[2]}} = [x^{(1)}, z^{(1)}]^T$ . Принимая во внимание (3.2) путем несложных, но громоздких преобразований, находим

$$Q_{[1]}(t, \boldsymbol{\varsigma}(t), \boldsymbol{\gamma}_{Q_{[1]}}(t)) = r^2 \lambda^{(1)} \cos^2 \varphi,$$

$$Q_{[2]}(t, \boldsymbol{\varsigma}(t), \boldsymbol{\gamma}_{Q_{[2]}}(t)) = r^2 \left( \varphi^{(1)} \cos \lambda + \lambda^{(1)} \sin \lambda \sin \varphi \cos \varphi \right),$$

где

$$\Upsilon_{Q[1]} = \left[ \varphi^{(1)} \right] \text{ и } \Upsilon_{Q[2]} = \left[ \lambda^{(1)}, \varphi^{(1)} \right]^T.$$

Соответственно с учетом (3.3) и (3.4) имеем

$$W_{[1]} = 2r^{(1)}\lambda^{(1)} + r \left( \lambda^{(2)} - 2\lambda^{(1)}\varphi^{(1)} \operatorname{tg} \varphi \right),$$

$$W_{[2]} = 2r^{(1)}\varphi^{(1)} + r \left( \varphi^{(2)} + \left( \lambda^{(1)} \right)^2 \sin \varphi \cos \varphi \right),$$

где

$$\Upsilon_{W[1]} = \left[ r^{(1)}, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \varphi^{(1)} \right]^T \text{ и } \Upsilon_{W[2]} = \left[ r^{(1)}, \lambda^{(1)}, \varphi^{(1)}, \varphi^{(2)} \right]^T.$$

В конечном итоге, конкретизируя (3.5) и (3.6), находим две независимые формулы для определения наклонной дальности

$$(4.3) \quad r [1] = \frac{2r^{(1)}\lambda^{(1)} \cos \varphi}{2\lambda^{(1)}\varphi^{(1)} \sin \varphi - \lambda^{(2)} \cos \varphi},$$

$$(4.4) \quad r [2] = -\frac{2r^{(1)}\varphi^{(1)}}{\varphi^{(2)} + \left( \lambda^{(1)} \right)^2 \sin \varphi \cos \varphi}.$$

В частных случаях  $\varphi = \varphi^{(1)} = \varphi^{(2)} = 0$  и  $\lambda = \lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = 0$  непосредственно из (4.3) и (4.4) вытекают известные формулы дальнометрии (см., например, дифференциально-геометрический метод [4]):

$$r [1] = -2r^{(1)}\lambda^{(1)}/\lambda^{(2)}, \quad r [2] = -2r^{(1)}\varphi^{(1)}/\varphi^{(2)}.$$

Для получения других формул дальнометрии можно использовать три новых инварианта  $I_{[3]} = x^{(1)} = V_{x0}$ ,  $I_{[4]} = y^{(1)} = V_{y0}$  и  $I_{[5]} = z^{(1)} = V_{z0}$ . Им соответствуют следующие независимые формулы определения дальности

$$(4.5) \quad r [3] = \frac{r^{(2)} \cos \varphi - 2r^{(1)}\varphi^{(1)} \sin \varphi}{\varphi^{(2)} \sin \varphi + \left[ \left( \lambda^{(1)} \right)^2 + \left( \varphi^{(1)} \right)^2 \right] \cos \varphi},$$

$$(4.6) \quad r [4] = \frac{r^{(2)} \sin \varphi + 2r^{(1)}\varphi^{(1)} \cos \varphi}{\left( \varphi^{(1)} \right)^2 \sin \varphi - \varphi^{(2)} \cos \varphi},$$

$$(4.7) \quad r [5] = \frac{r^{(2)}}{\left( \varphi^{(1)} \right)^2 + \left( \lambda^{(1)} \right)^2 \cos^2 \varphi}.$$

В отличие от [29] набор формул (4.3)–(4.7) является необходимым и достаточным для построения параллельного алгоритма независимой адаптивной дальнометрии, при этом полученные соотношения записаны в компактной (неизбыточной) форме.



*Замечание 1.* Поскольку для всех формул (4.3)–(4.7) нет полного совпадения наборов измеряемых параметров, то с учетом (3.7)–(3.10) появляется возможность организации пяти независимых каналов вычисления дальности и адаптации к изменяющимся условиям наблюдения.

*Замечание 2.* Долгота  $\lambda$  не входит в явном виде ни в одну из формул, что позволяет эффективно бороться с постоянными систематическими ошибками, присутствующими в измерениях координаты  $\lambda$ . Широта  $\varphi$  присутствует в явном виде во всех формулах.

*Замечание 3.* Для более сложных моделей движения, использующих НЛГЛП общего вида, аналогично группе сдвига находятся всевозможные инварианты, соответствующие как траектории, так и временному закону движения объекта по данной траектории, а также независимые выражения для определения дальности.

*Замечание 4.* Для маневрирующего объекта необходимо использовать составную модель на основе допустимого набора НЛГЛП частного вида (например, сдвига, вращения и растяжения), при этом выбор той или иной частной НЛГЛП на некотором участке наблюдения соответствует решению задачи идентификации с минимизацией выбранной решающей функции (например, невязки метода наименьших квадратов). Такой подход с использованием группы вращения рассмотрен в [31], где предлагается аппроксимировать траекторию объекта кусками окружностей разного радиуса.

Если модель (2.1) представляет собой некоторое дифференциальное уравнение, то отыскание всех возможных инвариантов для динамического случая осуществляется в рамках известной теории группового анализа [34–36]. Однако на практике зачастую достаточно ограничиться частными инвариантами движения, а именно так называемыми первыми интегралами дифференциального уравнения. Продемонстрируем это на примере кругового орбитального движения:  $\mathbf{G}(t, \mathbf{p}, \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{p}^{(2)} + \eta_0 R_0^{-3} \mathbf{p} = 0$ , где  $\boldsymbol{\eta} = [R_0, \eta_0]^T$ ,  $R_0$  и  $\eta_0$  – радиус и гравитационный параметр Земли соответственно. Известно, что инвариантами (первыми интегралами) данного движения являются выражения  $I_{[1]} = xy^{(1)} - yx^{(1)}$  и  $I_{[2]} = xz^{(1)} - zx^{(1)}$ , которые по внешнему виду совпадают с рассмотренными выше инвариантами группы сдвига, однако теперь производные  $x^{(1)}$ ,  $y^{(1)}$  и  $z^{(1)}$  не являются константами и ранее использованные инварианты  $I_{[3]} = x^{(1)} = V_{x0}$ ,  $I_{[4]} = y^{(1)} = V_{y0}$ ,  $I_{[5]} = z^{(1)} = V_{z0}$  теперь не применимы. С учетом этого в качестве формул определения дальности для динамического случая можно принять только выражения (4.3) и (4.4).

*Замечание 5.* Развиваемый однопозиционный косвенный метод можно обобщить и на класс стохастических моделей, для которых применение классических инвариантов зачастую весьма ограничено, но есть возможность использовать так называемые  $\epsilon$ -инварианты (эпсилон-инварианты [37]). Для них условие инвариантности выполняется приближенно (с точностью до  $\epsilon$ ), и, следовательно, в этом случае решение задачи координатометрии может быть выполнено приближенно.

## 5. Учет флуктуационных ошибок измерений

Покажем на примере группы сдвига и условия  $\varphi = \varphi^{(1)} = \varphi^{(2)} = 0$  реализацию алгоритма (3.7) и (3.8). Несложно убедиться, что в данном частном случае из всего набора формул (4.3)–(4.7) информативными являются только две:

$$r[1] = -2r^{(1)}\lambda^{(1)}/\lambda^{(2)}, \quad r[2] = -r^{(2)}/\left(\lambda^{(1)}\right)^2.$$

Соответственно имеем два вектора измеряемых параметров  $\mathbf{Z}_{[1]} = [r^{(1)}, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}]^T$  и  $\mathbf{Z}_{[2]} = [r^{(2)}, \lambda^{(1)}]^T$ . С целью уменьшения громоздкости последующих записей примем матрицы  $\mathbf{K}_{\mathbf{Z}_{[1]}}$  и  $\mathbf{K}_{\mathbf{Z}_{[2]}}$  диагональными, т.е.

$$\mathbf{K}_{\mathbf{Z}_{[1]}} = \text{diag} [\sigma_{r^{(1)}}^2, \sigma_{\lambda^{(1)}}^2, \sigma_{\lambda^{(2)}}^2] \quad \text{и} \quad \mathbf{K}_{\mathbf{Z}_{[2]}} = \text{diag} [\sigma_{r^{(2)}}^2, \sigma_{\lambda^{(1)}}^2].$$

Учитывая, что  $x = r \cos \lambda$  и  $y = r \sin \lambda$ , в соответствии с (3.7) находим

$$(5.1) \quad \sigma_{r[1]}^2 = 4 \left(\lambda^{(2)}\right)^{-2} \left\{ \left(\lambda^{(1)}\right)^2 \sigma_{r^{(1)}}^2 + \left(r^{(1)}\right)^2 \left[ \sigma_{\lambda^{(1)}}^2 + \left(\lambda^{(1)}/\lambda^{(2)}\right)^2 \sigma_{\lambda^{(2)}}^2 \right] \right\},$$

$$(5.2) \quad \sigma_{r[2]}^2 = \left(\lambda^{(1)}\right)^{-4} \left[ \sigma_{r^{(2)}}^2 + 4 \left(r^{(2)}\right)^2 \left(\lambda^{(1)}\right)^{-4} \sigma_{\lambda^{(1)}}^2 \right],$$

при этом в качестве приоритетной выбирается та формула определения дальности, для которой

$$(5.3) \quad l^* = \arg \min_l \sigma_{r[l]}^2, \quad l^* \in \{1, 2\}.$$

Непосредственно из (5.1)–(5.3) следует, что разрабатываемый метод, оперирующий с производными до второго порядка включительно, можно эффективно применять только на сглаженных измерениях, при этом рассматривается класс высокоскоростных объектов, для которых обеспечивается необходимое приращение угловых координат и радиальной скорости на заданном интервале наблюдения [29].

## 6. Автокомпенсационный алгоритм сглаживания первичных измерений

Рассмотрим с учетом (2.1)–(2.4) алгоритм автокомпенсационного несмещенного сглаживания применительно к параметру  $\mu \in \{r^{(1)}, \lambda, \varphi\}$  и его производным  $\mu^{(q)}$  (где  $q \in \{0, 1, 2\}$ ) в точке  $t_n$  с использованием «окна»  $\{t_{n+i}, i = \overline{-m, m}\}$ . Будем опираться на общий подход оценивания значений линейных функционалов, изложенный в [38, 39].

Оценку  $\mu^{(q)*}$  для  $\mu^{(q)}$  ищем в виде

$$(6.1) \quad \mu^{(q)*} = \mathbf{P}_{\mu q}^T \mathbf{H}_{\mu},$$

где  $\mathbf{P}_{\mu q} = [p_{\mu q, n+i}, i = \overline{-m, m}]^T$  – вектор неизвестных весовых коэффициентов, которые выбираются из условия минимизации дисперсии  $\sigma_{\mu q}^2$  оценки  $\mu^{(q)*}$ .

Поскольку эта оценка относится к классу линейных, то

$$(6.2) \quad \sigma_{\mu q}^2 = \mathbf{P}_{\mu q}^T \mathbf{K}_{\mu} \mathbf{P}_{\mu q}.$$

Кроме того, потребуем выполнения условий несмещенности оценки ( $\mu^{(q)} - \mathbf{P}_{\mu q}^T \mathbf{\mu} = 0$ ) и ее инвариантности к сингулярной ошибке ( $\mathbf{P}_{\mu q}^T \mathbf{s}_{\mu} = 0$ ). Для решения сформулированной задачи условной оптимизации используется метод множителей Лагранжа с решающей функцией

$$(6.3) \quad J(\mathbf{P}_{\mu q}, \boldsymbol{\zeta}_{\mu q}, \boldsymbol{\omega}_{\mu q}) = \mathbf{P}_{\mu q}^T \mathbf{K}_{\mu} \mathbf{P}_{\mu q} + \boldsymbol{\zeta}_{\mu q}^T \Theta_{\mu}^T \mathbf{P}_{\mu q} + \left[ (\boldsymbol{\Psi}_{\mu}^T)^{(q)} - \mathbf{P}_{\mu q}^T \boldsymbol{\Psi}_{\mu} \right] \boldsymbol{\omega}_{\mu q},$$

где  $\boldsymbol{\zeta}_{\mu q}$  и  $\boldsymbol{\omega}_{\mu q}$  – вектор-столбцы множителей Лагранжа,  $\Theta_{\mu} = [\theta_{\mu k}(t_{n+i}), i = \overline{-m, m}, k = \overline{0, K}]$  – базисная матрица сингулярной ошибки,  $\boldsymbol{\Psi}_{\mu} = [\psi_{\mu b}(t_{n+i}), i = \overline{-m, m}, b = \overline{0, B}]$  – базисная матрица параметра  $\mu = \mu(t)$ .

Вектор  $\mathbf{P}_{\mu q}$ , минимизирующий  $\sigma_{\mu q}^2$  и обеспечивающий выполнение условий несмещенности и инвариантности, имеет вид

$$(6.4) \quad \mathbf{P}_{\mu q} = \Lambda_{\mu} \mathbf{K}_{\mu}^{-1} \boldsymbol{\Psi}_{\mu} (\boldsymbol{\Psi}_{\mu}^T \Lambda_{\mu} \mathbf{K}_{\mu}^{-1} \boldsymbol{\Psi}_{\mu})^{-1} \boldsymbol{\Psi}_{\mu}^{(q)},$$

где  $\Lambda_{\mu} = E_{2m+1} - \mathbf{K}_{\mu}^{-1} \Theta_{\mu} (\Theta_{\mu}^T \mathbf{K}_{\mu}^{-1} \Theta_{\mu})^{-1} \Theta_{\mu}^T$ ,  $E_{2m+1}$  – единичная матрица размером  $(2m+1) \times (2m+1)$ ,  $\boldsymbol{\Psi}_{\mu}^{(q)} = d^q \boldsymbol{\Psi}_{\mu}(t) / dt^q |_{t=t_n}$ .

Дисперсия оценки  $\mu^{(q)*}$  находится по правилу

$$(6.5) \quad \sigma_{\mu q}^2 = \left( \boldsymbol{\Psi}_{\mu}^{(q)} \right)^T \left[ (\mathbf{K}_{\mu}^{-1} \boldsymbol{\Psi}_{\mu})^T (\Lambda_{\mu})^T \boldsymbol{\Psi}_{\mu} \right]^{-1} \mathbf{H}_{\mu} (\boldsymbol{\Psi}_{\mu}^T \Lambda_{\mu} \mathbf{K}_{\mu}^{-1} \boldsymbol{\Psi}_{\mu})^{-1} \boldsymbol{\Psi}_{\mu}^{(q)},$$

где

$$\mathbf{H}_{\mu} = (\mathbf{K}_{\mu}^{-1} \boldsymbol{\Psi}_{\mu})^T (\Lambda_{\mu})^T \mathbf{K}_{\mu} \Lambda_{\mu} \mathbf{K}_{\mu}^{-1} \boldsymbol{\Psi}_{\mu}.$$

Несложно показать, что математическое ожидание методической ошибки, обусловленной не учетом «хвоста» ряда (2.4), равно

$$(6.6) \quad \varepsilon_{\mu q} = \Delta_{\mu n}^{(q)} - \mathbf{P}_{\mu q}^T \boldsymbol{\Delta}_{\mu n},$$

где  $\Delta_{\mu} = \Delta_{\mu}(t)$  – «хвост» ряда, а  $\Delta_{\mu n}^{(q)}$  – его  $q$ -я производная в точке  $t = t_n$ ,  $\boldsymbol{\Delta}_{\mu n} = [\Delta_{\mu}(t_{n+i}), i = \overline{-m, m}]^T$ .

В [38, с. 62] показано, что с ростом числа спектральных коэффициентов в модели сингулярной ошибки (2.3) алгоритм (6.1)–(6.6) обеспечивает сокращение вычислительных затрат до 47% по сравнению с традиционным расширенным методом наименьших квадратов. Это позволяет повысить оперативность решения задачи сглаживания.

С учетом (6.1)–(6.6) можно строить искомые оценки параметров движения объекта, инвариантные к сингулярным ошибкам измерений. Так, если воспользоваться формулами (4.3) и (4.4), то можно найти устойчивые оценки наклонной дальности для двух вариантов

$$(6.7) \quad r [1] = \frac{2 (\mathbf{P}_{r1}^T \mathbf{H}_r) (\mathbf{P}_{\lambda 1}^T \mathbf{H}_\lambda) \cos (\mathbf{P}_{\varphi 0}^T \mathbf{H}_\varphi)}{2 (\mathbf{P}_{\lambda 1}^T \mathbf{H}_\lambda) (\mathbf{P}_{\varphi 1}^T \mathbf{H}_\varphi) \sin (\mathbf{P}_{\varphi 0}^T \mathbf{H}_\varphi) - (\mathbf{P}_{\lambda 2}^T \mathbf{H}_\lambda) \cos (\mathbf{P}_{\varphi 0}^T \mathbf{H}_\varphi)},$$

$$(6.8) \quad r [2] = - \frac{2 (\mathbf{P}_{r1}^T \mathbf{H}_r) (\mathbf{P}_{\varphi 1}^T \mathbf{H}_\varphi)}{(\mathbf{P}_{\varphi 2}^T \mathbf{H}_\varphi) + (\mathbf{P}_{\lambda 1}^T \mathbf{H}_\lambda)^2 \sin (\mathbf{P}_{\varphi 0}^T \mathbf{H}_\varphi) \cos (\mathbf{P}_{\varphi 0}^T \mathbf{H}_\varphi)}.$$

По аналогии с (6.7) и (6.8) определяются дальности для вариантов (4.5)–(4.7) и декартовы координаты (3.9) объекта наблюдения.

Результаты вычислительных экспериментов, представленные в [38, 39], показывают высокую эффективность автокомпенсационного алгоритма сглаживания в аномальных условиях измерений, что позволяет формировать устойчивые оценки производных от радиальной скорости и угловых координат, необходимые для успешного применения развитого однопозиционного косвенного метода координатометрии. Результаты моделирования адаптивного алгоритма (3.7) и (3.8) для случая прямолинейного равномерного движения объекта представлены в [29]. Они показывают, что метод применим к высокоточным измерениям, при этом достоверность результатов координатометрии существенно зависит от динамики объекта и условий его наблюдения.

## 7. Заключение

Развитый метод существенно расширяет сферу применения квазиоптимальных косвенных методов оперативного оценивания применительно к решению задачи однопозиционной координатометрии, устойчивых к сингулярным ошибкам измерений и условиям наблюдения высокоскоростных объектов. Данный метод как самостоятельно, так и в совокупности с традиционными статистическими методами (например, наименьших квадратов, максимального правдоподобия, максимума апостериорной плотности вероятности и различных методов динамической фильтрации) может быть эффективно использован как инструмент интеллектуально-аналитического совершенствования существующих и разработки перспективных однопозиционных систем активной и пассивной локации и навигации нового поколения.

У метода есть ограничения на классы используемых однопозиционных систем в плане точности измерений, условий наблюдения, а также на типы сопровождаемых объектов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Основы маневрирования кораблей / Под ред. М.И. Скворцова. М.: Воениздат, 1966.

2. *Брандин В.Н., Разоренов Г.Н.* Определение траекторий космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1978.
3. *Шебшаевич В.С.* Введение в теорию космической навигации. М.: Сов. радио, 1971.
4. *Громов Г.Н.* Дифференциально-геометрический метод навигации. М.: Радио и связь, 1986.
5. *Хвоц В.А.* Тактика подводных лодок. М.: Воениздат, 1989.
6. *Соловьев Ю.А.* Спутниковая навигация и ее приложения. М.: ЭкоТрендз, 2003.
7. *Мельников Ю.П., Попов С.В.* Радиотехническая разведка. М.: Радиотехника, 2008.
8. *Булъчев Ю.Г., Манин А.П.* Математические аспекты определения движения летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 2000.
9. *Ярлыков М.С.* Статистическая теория радионавигации. М.: Радио и связь, 1985.
10. *Сосулин Ю.Г., Костров В.В., Паршин Ю.Н.* Оценочно-корреляционная обработка сигналов и компенсация помех. М.: Радиотехника, 2014.
11. *Булъчев Ю.Г., Васильев В.В., Джуган Р.В. и др.* Информационно-измерительное обеспечение натуральных испытаний сложных технических комплексов. М.: Машиностроение – Полет, 2016.
12. *Гельцер А.А.* Однопозиционный метод определения местоположения источника радиоизлучения с использованием отражений сигналов от множества элементов рельефа и местных предметов // Автореф. дис. Том. гос. универ. систем управления и радиоэлектроники. 2012.
13. *Сиренко И.Л., Донец И.В., Рейзенкинд Я.А.* Однопозиционное определение координат и вектора скорости радиоизлучающих объектов // Радиотехника. 2019. № 10 (16). С. 28–32.
14. *Булъчев Ю.Г., Булъчев В.Ю., Ивакина С.С., Николас П.И.* Оценка наклонной дальности до цели с полиномиальным законом движения // Вестн. Казан. гос. универ-та. 2013. № 1. С. 67–74.
15. *Булъчев Ю.Г., Булъчев В.Ю., Ивакина С.С., Мозоль А.А.* Оценивание параметров движения объекта на базе стационарного квазиавтономного пеленгатора // ТиСУ. 2013. № 5. С. 92–99.
16. *Булъчев Ю.Г., Булъчев В.Ю., Ивакина С.С., Насенков И.Г.* Пассивная локация группы движущихся целей одним стационарным пеленгатором с учетом априорной информации // АиТ. 2017. № 1. С. 152–166.  
*Bulychev Y.G., Bulychev V.Y., Ivakina S.S., Nasenkov I.G.* Passiv of Location of moving Tar gets with prior Information // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 1. P. 125–137.
17. *Lin X., Kirubarajan T., Bar-Shalom Y., Maskell S.* Comparison of EKF, Pseudo-measurement and Particle Filters for a Bearing-only Target Tracking Problem // Proc. SPIE-Int. Soc. Optic. Eng. 2002. V. 4728. P. 240–250.
18. *Miller B.M., Stepanyan K.V., Miller A.B., Andreev K.V., Khoroshenkikh S.N.* Optimal filter selection for UAV trajectory control problems // Proc. 37 Conference on Inform. Techn. Syst. – 2013. Conf. Young Sci. Engin. ИТП RAS, 1–6 September 2013, place City Kaliningrad, country-region Russia. 2013. P. 327–333.
19. *Miller B.M., Miller A.B.* Tracking of the UAV trajectory on the basis of of bearing-only observations // Sensors 2015 [Special Issue]. No. 15 (12). P. 29802–29820. <https://doi.org/10.3390/s151229768>

20. *Amelin K.S., Miller A.B.* An Algorithm for Refinement of the Position of a Light UAV on the Basis of Kalman Filtering of Bearing Measurements // Commun. Technol. Electron. 2014. V. 59. No. 6. P. 622–631.
21. *Karpenko S., Konovalenko I., Miller A., Miller B., Nikolaev D.* UAV Control on the Basis of 3D Landmark Bearing-Only Observations // Sensors 2015 [Special Issue]. No. 15 (12). P. 29802–29820. <https://doi.org/10.3390/s151229768>
22. *Karpenko S., Konovalenko I., Miller A., Miller B., Nikolaev D.* Visual navigation of the UAVs on the basis of 3D natural landmarks // Proc. SPIE. Eight Int. Conf. Machine Vision (ICMV 2015). 2015. V. 9875. P. 1–10. <https://doi.org/10.1117/12.2228793>
23. *Bar-Shalom Ya., Willet P.K., Tian X.* Tracking and Data Fusion: A Handbook of Algorithms, YBS Publishing, 2011. ISBN-13: 978-0964831278.
24. *Ried D.* An Algorithm for Tracking Multiple Targets // IEEE transact. Autom. Control. 1979. V. 24 (6). P. 843–854.
25. *Nardone S.C., Aidala V.J.* Observability Criteria for Bearings-Only Target Motion Analysis // IEEE Transact. Aerospac. Electron. Syst. 1981. V. AES-17. 1981. P. 162–166.
26. *Katta G. Murty.* An algorithm for ranking all the assignments in order of increasing cost // Oper. Res. 1968. No. 16 (3). P. 682–687.
27. *Бульчев Ю.Г., Мозоль А.А.* Однопозиционная пассивная локация и навигация с учетом эволюции периода радиосигнала в точке приема // РЭ. 2021. Т. 66. № 5. С. 468–475.
28. *Дятлов А.П., Дятлов П.А.* Доплеровские обнаружители подвижных объектов с использованием «постороннего» источника излучения // Специальная техника. 2010. № 5. С. 16–22.
29. *Бульчев Ю.Г., Коротун А.А., Манин А.П.* Фильтрация параметров траекторий в угломерно-доплеровских системах локации // Радиотехника. 1990. № 12. С. 22–26.
30. *Жданюк Б.Ф.* Основы статистической обработки траекторных измерений. М.: Сов. радио, 1978.
31. *Шлома А.М., Фролов С.М., Преображенский Л.А.* Адаптивная фильтрация параметров криволинейных траекторий // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1986. № 12. С. 56–60.
32. *Бульчев Ю.Г., Елисеев А.В.* Проблема жесткости уравнений приближенной нелинейной фильтрации // АИТ. 1999. № 1. С. 35–45.  
*Bulychev Yu.G., Eliseev A.V.* Rigidity problems of equations of approximate nonlinear filtering // Autom. Remote Control. 1999. No. 1. P. 35–45.
33. *Бульчев Ю.Г., Бульчев В.Ю., Ивакина С.С., Насенков И.Г.* Классификация инвариантов пассивной локации и их применение // ТиСУ. 2015. № 6. С. 71–81.
34. *Миллер У.* Симметрия и разделение переменных. М.: Мир, 1981.
35. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
36. *Павловский Ю.Н.* Агрегирование, декомпозиция, групповые свойства, декомпозиционные структуры динамических систем // Кибернетика и вычислительная техника. 1978. № 39. С. 53–62.

37. Булычев Ю.Г., Бурлай И.В. Системный подход к моделированию стохастических объектов с использованием инвариантов // АиТ. 2001. № 12. С. 11–20.  
*Bulychev Y.G., Burlaj I.V. A system approach to modeling stochastic objects with invariants // Autom. Remote Control. 2001. V. 62. No. 12. P. 1939–1946.*
38. Булычев Ю.Г., Елисеев А.В. Вычислительная схема инвариантно несмещенного оценивания значений линейных операторов заданного класса // ЖВМиМФ. 2008. Т. 48. № 4. С. 580–592.
39. Булычев Ю.Г. Применение методов опорных интегральных кривых и обобщенного инвариантно-несмещенного оценивания для исследования многомерной динамической системы // ЖВМиМФ. 2020. Т. 60. № 7. С. 1151–1169.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии О.А. Степановым.*

Поступила в редакцию 18.05.2022

После доработки 22.03.2023

Принята к публикации 09.06.2023