

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2023 г. А.Н. ИГНАТОВ, канд. физ.-мат. наук (alexei.ignatov1@gmail.com)
(Московский авиационный институт)

ОБ АЛГОРИТМЕ ФОРМИРОВАНИЯ РАСПИСАНИЯ ГРУЗОПЕРЕВОЗОК В ТРАНСПОРТНОЙ СЕТИ¹

Рассматривается задача формирования расписания грузоперевозок в транспортной сети, представляемой неориентированным мультиграфом. Перевозки между вершинами могут осуществляться только в заранее определенные промежутки времени. Предлагается итеративный алгоритм поиска решения, приближенного к оптимальному по значению критерия, в исследуемой задаче. Алгоритм конструируется на основе решения задач смешанного целочисленного линейного программирования. Применимость алгоритма проверяется на примере с более чем 90 миллионами бинарных переменных.

Ключевые слова: транспортная сеть, мультиграф, грузоперевозки, расписание, смешанное целочисленное линейное программирование.

DOI: 10.31857/S0005231023090088, EDN: JUZQER

1. Введение

Задача составления расписания движения (грузов, поездов, локомотивов) — широко исследуемая как в теории, так и на практике задача. Публикации, посвященные этой тематике, можно разделить на несколько групп: по наличию времени движения в задаче, по фиксированности времени движения между вершинами, по возможности/фиксированности маршрута движения при оптимизации, по структуре мультиграфа транспортной сети. Например, в [1] использовалась только длительность следования через дуги графа транспортной сети общего вида, а в [2, 3] рассматривается однопутная железная дорога. В [4, 5] рассматривается задача построения расписания для железнодорожных сетей общего вида при фиксированном наборе маршрутов для поездов. В [6, 7] задача поиска маршрута движения поездов и времени их движения по железнодорожной сети решалась одновременно. Время в [6, 7] полагалось дискретным, что может приводить к очень большой размерности поставленной задачи. В [8–11] была рассмотрена задача одновременного формирования расписания и маршрутов движения составов по железнодорожной

¹ Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00293).

сети общего вида, а транспортировки между вершинами осуществлялись в заранее заданные промежутки времени.

Отличие постановок с фиксированным временем движения между вершинами от постановок с произвольным весьма принципиально. В постановках с произвольным временем предполагается готовность транспортного средства для перевозки в любой момент времени, что не всегда физически реализуемо. Принципиальным же отличием [11] от других работ является то, что в этой работе допустимым являлось окончание движения и по окончании промежутка времени, на которое строится расписание (далее — горизонт планирования). Такая возможность актуальна, например, когда необходимость перевезти груз появляется перед окончанием горизонта планирования. Однако такая возможность не только усложняет математическую модель перевозок, но и увеличивает время счета [11]. В этой связи актуальным является разработка более быстрого алгоритма, нежели алгоритм из [11]. Данный алгоритм и разрабатывается в настоящей статье.

В рамках рассматриваемой модели перевозок времена готовности грузов к отправлению, времена начала и конца движения любого транспортного средства, осуществляющего перевозку между вершинами, — фиксированные. При этом данные характеристики являются вещественными числами. Оптимизация в дальнейшем будет проводиться по использованию того или иного транспортного средства для того или иного груза. Также будут рассмотрены и другие оптимизационные переменные, которые характеризуют время стоянки грузов в различных вершинах, ожидаемое количество времени до доставки по окончании горизонта планирования, доставку груза до вершины назначения.

Для разработки алгоритма формирования грузоперевозок строится система из линейных ограничений и неравенств, содержащих целочисленные и непрерывные переменные, которая задает математическую модель движения грузов по транспортной сети общего вида. Транспортная сеть представляется неориентированным мультиграфом. Для снижения времени счета в алгоритме проводится декомпозиция множества грузов, а также декомпозиция горизонта планирования. Для дополнительного ускорения времени счета предусмотрена возможность удаления транспортировок, которые вряд ли могут быть использованы грузами ввиду того, что время начала движения по этим транспортировкам раньше ожидаемого времени прибытия груза в соответствующие этим транспортировкам вершины. Тестирование разработанного алгоритма проводится на содержательном примере с миллионами целочисленных переменных.

2. Основные обозначения и предположения

Рассмотрим транспортную систему, представляемую неориентированным мультиграфом $G = \langle V, E \rangle$, где V — множество вершин (городов, железнодорожных станций, заводов, аэропортов, морских портов) и E — множество

ребер (шоссе, железнодорожных путей, воздушных трасс, морских путей), соединяющих эти вершины. Пусть $|V| = M \geq 2$. Перенумеровав вершины мультиграфа G от 1 до M , составим множество индексов $V' = \{1, 2, \dots, M\}$. Каждый элемент этого множества единственным образом определяет вершину мультиграфа G . Отметим, что необходимость в моделировании транспортных систем с использованием мультиграфов следует из предметной области. Так, встречное движение между двумя железнодорожными станциями в один и тот же промежуток времени в целях безопасности должно быть разнесено по разным железнодорожным путям. Поэтому при моделировании движения приходится отдельно рассматривать все железнодорожные пути (ребра) из одной вершины (станции) в другую (станцию).

Будем отсчитывать время в минутах относительно некоторого момента отсчета. Под горизонтом планирования будем понимать промежуток времени $[0, T_{\max})$, на который строится план перевозок. Если план перевозок строится на день (1440 мин), то $T_{\max} = 1440$.

Разделим горизонт планирования на P непересекающихся промежутков (полуинтервалов) $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_P$, т.е. $[0, T_{\max}) = \bigcup_{p=1}^P \mathcal{T}_p$, где $\forall p_1, p_2 \in \{1, \dots, P\} : p_1 \neq p_2 \quad \mathcal{T}_{p_1} \cap \mathcal{T}_{p_2} = \emptyset$. Эти промежутки в дальнейшем будем называть *промежутками разбиения*. Введем вспомогательные переменные $\underline{\mathcal{T}}_p \stackrel{\text{def}}{=} \inf \mathcal{T}_p$, $\overline{\mathcal{T}}_p \stackrel{\text{def}}{=} \sup \mathcal{T}_p$, $p = \overline{1, P}$. Будем строить множества $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_P$ так, что

$$\underline{\mathcal{T}}_1 = 0, \quad \overline{\mathcal{T}}_P = T_{\max}, \quad \underline{\mathcal{T}}_{p+1} = \overline{\mathcal{T}}_p, \quad p = \overline{1, P-1}.$$

Пусть имеется I грузов (посылок, контейнеров, поездов). Для i -го груза заданы:

- индекс вершины отправления $v_i^{\text{отпр}} \in V'$;
- индекс вершины прибытия (назначения) $v_i^{\text{приб}} \in V'$;
- время готовности к отправлению $t_i^{\text{отпр}} \in [0, T_{\max})$;
- максимальное время d_i , в течение которого грузу позволено находиться в пункте отправления с момента готовности;
- время груза в пути T_i , т.е. максимальное время, в течение которого грузу позволено находиться в транспортной системе (исключая время в вершине отправления), вычисляемое в минутах;
- масса груза $w_i \in \mathbb{R}_+$,

$i = \overline{1, I}$. Груз предполагается неделимым в том смысле, что его нельзя отправить по частям.

Движение между вершинами может выполняться только в определенные промежутки времени. Пусть доступно ровно K перемещений/транспортных перевозок (самолетами, морскими судами, поездами, грузовиками) между вершинами. Параметры транспортировки математически можно представить в виде семиэлементного вектора-строки $z_k \stackrel{\text{def}}{=} (v_k^{\text{нач}}, v_k^{\text{кон}}, n_k, t_k^{\text{нач}}, t_k^{\text{кон}}, W_k, C_k)$, где $v_k^{\text{нач}} \in V'$ – индекс вершины начала движения, $v_k^{\text{кон}} \in V'$ – индекс вершины конца движения, причем $v_k^{\text{нач}}$ и $v_k^{\text{кон}}$ – индексы смежных вершин в

графе G , n_k – номер ребра, соединяющего вершины с индексами $v_k^{\text{нач}}$ и $v_k^{\text{кон}}$, $t_k^{\text{нач}} \in [0, T_{\text{макс}})$ – время начала движения, $t_k^{\text{кон}}$ – время конца движения, W_k – максимальная перевозимая масса при транспортировке, C_k – стоимость транспортировки единицы массы, $k = \overline{1, K}$. Обозначим через \mathcal{Z} множество всех векторов z_k , $k = \overline{1, K}$. Перенумеруем элементы множества \mathcal{Z} от 1 до K . Таким образом, число от 1 до K однозначно определяет конкретную транспортировку и ее параметры.

В дальнейшем под *расписанием движения* груза будем понимать набор номеров транспортировок, которые им используются. Зная номера транспортировок, можно легко определить вершины, посещаемые грузом, время посещения вершин, используемые для движения ребра мультиграфа, а также прочие характеристики движения.

В соответствии с введенными промежутками разбиения $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_P$ разделим множество транспортировок на несколько частей, а именно $\{1, \dots, K\} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \dots \cup \mathcal{K}_P$, где $\mathcal{K}_p \stackrel{\text{def}}{=} \{k \in \mathbb{N} : k \leq K, t_k^{\text{нач}} \in \mathcal{T}_p\}$, $p = \overline{1, P}$.

При выполнении перевозок склады, в которых хранятся грузы, могут быть заполнены. Кроме того, с грузом могут производиться некоторые операции, например переупаковка. В этой связи введем минимально и максимально возможные длительности стоянки в вершине с индексом $v_k^{\text{кон}}$ после выполнения транспортировки с номером k груза с номером i : $t_{i,k}^{\text{ст мин}}$ и $t_{i,k}^{\text{ст макс}}$, $i = \overline{1, I}$, $k = \overline{1, K}$. Очевидно, $\forall i = \overline{1, I}, k = \overline{1, K} \ 0 \leq t_{i,k}^{\text{ст мин}} \leq t_{i,k}^{\text{ст макс}}$.

Зададим величину τ_{m_1, m_2} – ожидаемое время (начиная с момента готовности к отправлению) перевозки груза из вершины с индексом m_1 в вершину с индексом m_2 , $m_1, m_2 = \overline{1, M}$. Очевидно, что $\tau_{m_1, m_1} = 0$, $m_1 = \overline{1, M}$. Если доступны исторические наблюдения по перевозке из вершины с индексом m_1 в вершину с индексом m_2 , то в качестве τ_{m_1, m_2} можно выбрать реализацию выборочного среднего по имеющимся наблюдениям, $m_1, m_2 = \overline{1, M}$. Если эти данные отсутствуют, то указанную величину можно оценить экспертным путем. Также введем величину η_{m_1, m_2} – ожидаемое время с момента готовности до отправления груза из вершины с индексом m_1 в вершину с индексом m_2 , которая вычисляется по аналогичному принципу, что и τ_{m_1, m_2} , $m_1, m_2 = \overline{1, M}$.

Под маршрутом груза с номером i будем понимать набор номеров транспортировок, последовательно используемых этим грузом, $i = \overline{1, I}$. Как следствие, по маршруту можно определить набор вершин, последовательно пересекаемых этим грузом. Ограничим максимальное число транспортировок в маршруте в рамках горизонта планирования некоторым заранее заданным числом J . Под j -м этапом маршрута груза с номером i будем понимать движение этого груза, когда используется j -я по порядку использования транспортировка, $i = \overline{1, I}$, $j = \overline{1, J + 1}$. Этап $J + 1$ – технический, движение на нем не производится, он нужен для корректного задания математической модели. Будем называть вершину промежуточной для i -го груза, если она не является для него ни вершиной отправления, ни вершиной назначения, $i = \overline{1, I}$.

Введем также величину \mathcal{D}_i , характеризующую отказ в транспортировке i -му грузу: 0 — грузу отказано в транспортировке, 1 — иначе, $i = \overline{1, I}$. Отказ в транспортировке может быть связан с тем, что для груза не хватает транспортных средств, чтобы добраться до вершины назначения с учетом ограничения на время в пути и других физических ограничений. В идеальном случае все величины \mathcal{D}_i равны единице, $i = \overline{1, I}$, однако такое не всегда физически реализуемо или не удается найти расписание движения, приводящее к такому результату.

3. Вспомогательные результаты для формирования алгоритма

3.1. Математическая модель движения по транспортной сети

Разделим множество номеров грузов \mathcal{I} на S непересекающихся подмножеств \mathcal{I}_s , т.е. $\mathcal{I} \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \dots, I\} = \bigcup_{s=1}^S \mathcal{I}_s$, причем $\forall s_1, s_2 \in \{1, \dots, S\} : s_1 \neq s_2 \implies \mathcal{I}_{s_1} \cap \mathcal{I}_{s_2} = \emptyset$. В [10–12] было предложено разбиение множества \mathcal{I} по принципу нахождения в подмножествах номеров грузов с одинаковыми вершинами отправления и назначения. Кроме того, можно составить ровно столько подмножеств, сколько имеется грузов. При этом в подмножестве с индексом 1 будет номер груза с наиболее ранним/поздним временем готовности к отправлению, с индексом 2 — вторым/предпоследним временем и т.д.

Предположим, что для всех грузов с номерами из множеств $\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_{\bar{s}-1}$ имеется отказ в транспортировке или расписание движения. Если грузу с номером $\hat{i} \in \bigcup_{s=1}^{\bar{s}-1} \mathcal{I}_s$ отказано в транспортировке, то полагается $\hat{\delta}_{i,j,k} = 0$, $j = \overline{1, J+1}$, $k = \overline{1, K}$, а $\mathcal{D}_{\hat{i}} = 0$. Если груз с номером $\hat{i} \in \bigcup_{s=1}^{\bar{s}-1} \mathcal{I}_s$ допущен к транспортировке, то $\hat{\delta}_{i,j,k}$ полагается равной единице, если этот груз на этапе с номером j использует транспортировку с номером k , и равной нулю в противоположном случае, $j = \overline{1, J+1}$, $k = \overline{1, K}$. При этом полагается $\mathcal{D}_{\hat{i}} = 1$.

Для снижения размерности решаемых в дальнейшем задач оптимизации расписание движения будет вначале строиться для промежутка времени $[0, \overline{\mathcal{T}}_1)$. При построении расписания на промежуток времени $[0, \overline{\mathcal{T}}_2) = [0, \overline{\mathcal{T}}_1) \cup \mathcal{T}_2$ будет учитываться (фиксироваться) расписание на промежуток $[0, \overline{\mathcal{T}}_1)$, при построении расписания на промежуток времени $[0, \overline{\mathcal{T}}_3) = [0, \overline{\mathcal{T}}_2) \cup \mathcal{T}_3$ будет учтено (зафиксировано) расписание на промежуток времени $[0, \overline{\mathcal{T}}_2)$ и т.д.

В этой связи рассмотрим только транспортировки от начала горизонта планирования до конца промежутка $\overline{\mathcal{T}}_{\tilde{p}}$, где \tilde{p} — произвольное число из множества $\{1, \dots, P\}$. Сформулируем множество ограничений, задающих движение мультиграфу для грузов с номерами из множества $\mathcal{I}_{\tilde{s}}$ в это время, т.е. в субгоризонт планирования $[0, \overline{\mathcal{T}}_{\tilde{p}})$. Предположим вначале, что расписания движения для грузов с номерами из множества $\mathcal{I}_{\tilde{s}}$ на субгоризонт $[0, \overline{\mathcal{T}}_{\tilde{p}-1})$ ($\tilde{p} > 1$) в наличии не имеется.

Под $\mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}$ будем понимать некоторое непустое подмножество транспортировок $\bigcup_{p=1}^{\tilde{p}} \mathcal{K}_p$, выбираемое для грузов из множества $\mathcal{I}_{\tilde{s}}$.

Для этого введем вспомогательные переменные $\delta_{i,j,k}^{\bar{p}}$, характеризующие использование грузом с номером i транспортировки с номером k на j -м этапе при формировании расписания для субгоризонта планирования $[0, \overline{T_{\bar{p}}})$, $i \in \mathcal{I}_{\bar{s}}$, $j = \overline{1, J+1}$, $k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}$. Переменная $\delta_{i,j,k}^{\bar{p}}$ равна единице, если транспортировка с номером k используется i -м грузом на j -м этапе, и нулю — в противоположном случае.

Используя определение переменных $\delta_{i,j,k}^{\bar{p}}$, имеем

$$(1) \quad \delta_{i,j,k}^{\bar{p}} \in \{0, 1\}, \quad i \in \mathcal{I}_{\bar{s}}, \quad j = \overline{1, J+1}, \quad k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}.$$

Движение исключительно по смежным вершинам мультиграфа G задается согласно ограничениям

$$(2) \quad \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,j,k}^{\bar{p}} v_k^{\text{кон}} \leq \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,j+1,k}^{\bar{p}} v_k^{\text{нач}} + \left(1 - \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,j+1,k}^{\bar{p}} \right) M^3, \quad i \in \mathcal{I}_{\bar{s}}, \\ j = \overline{1, J-1},$$

$$(3) \quad \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,j,k}^{\bar{p}} v_k^{\text{кон}} \geq \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,j+1,k}^{\bar{p}} v_k^{\text{нач}} - \left(1 - \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,j+1,k}^{\bar{p}} \right) M, \quad i \in \mathcal{I}_{\bar{s}}, \\ j = \overline{1, J-1}.$$

Напомним, что M — количество вершин в мультиграфе G . Ограничения (2), (3) приводят [10] к тому, что если для некоторого $\tilde{i} \in \mathcal{I}_{\bar{s}}$ и некоторого $\tilde{j} \in \{1, \dots, J\}$ справедливо $\sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{\tilde{i}, \tilde{j}, k}^{\bar{p}} = 0$, то $\sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{\tilde{i}, j+1, k}^{\bar{p}} = 0$, $j = \overline{\tilde{j}, J}$. Если же $\sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{\tilde{i}, \tilde{j}, k}^{\bar{p}} = 1$, то $\sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{\tilde{i}, \tilde{j}+1, k}^{\bar{p}} = 0$ или $\sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{\tilde{i}, \tilde{j}+1, k}^{\bar{p}} = 1$. Ограничения (2), (3) идентичны [10, 11] с учетом построения математической модели движения для субгоризонта планирования. Отметим, что выбор третьей степени у M в (2) обеспечивает корректное задание математической модели движения по мультиграфу [10].

Поскольку этапов для движения может быть не более J , введем ограничение

$$(4) \quad \sum_{i \in \mathcal{I}_{\bar{s}}} \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i, J+1, k}^{\bar{p}} = 0.$$

Так как груз неделим, то на любом этапе (в том числе первом) можно использовать максимум одну транспортировку

$$(5) \quad \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i, 1, k}^{\bar{p}} \leq 1, \quad i \in \mathcal{I}_{\bar{s}}.$$

Если перевозка груза начинается, то она должна быть осуществлена из соответствующей вершины отправления

$$(6) \quad \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i, 1, k}^{\bar{p}} v_k^{\text{нач}} = v_i^{\text{отпр}} \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i, 1, k}^{\bar{p}}, \quad i \in \mathcal{I}_{\bar{s}}.$$

Если готовность груза к отправлению происходит после верхней границы промежутка времени $\overline{\mathcal{T}}_{\tilde{p}}$, то вплоть до окончания $\overline{\mathcal{T}}_{\tilde{p}}$ никакие транспортировки грузу использовать не разрешено, т.е.

$$(7) \quad \sum_{j=1}^J \sum_{k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}} \delta_{i,j,k}^{\tilde{p}} = 0, \forall i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}} : t_i^{\text{отпр}} \geq \overline{\mathcal{T}}_{\tilde{p}}.$$

Груз должен быть отправлен не раньше момента готовности к отправлению с учетом максимального времени в вершине отправления. При этом можно не отправить груз в период $[0, \overline{\mathcal{T}}_{\tilde{p}})$, если это допустимо с учетом максимального времени в вершине отправления. В этой связи имеем ограничения

$$(8) \quad t_i^{\text{отпр}} \leq \sum_{k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}} \delta_{i,1,k}^{\tilde{p}} t_k^{\text{нач}} + \left(1 - \sum_{k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}} \delta_{i,1,k}^{\tilde{p}} \right) \overline{\mathcal{T}}_{\tilde{p}} \leq t_i^{\text{отпр}} + d_i, \\ \forall i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}} : t_i^{\text{отпр}} < \overline{\mathcal{T}}_{\tilde{p}}.$$

Прокомментируем ограничения (8). Для этого рассмотрим груз с номером $\tilde{i} \in \mathcal{I}_{\tilde{s}} : t_{\tilde{i}}^{\text{отпр}} < \overline{\mathcal{T}}_{\tilde{p}}$. Ввиду ограничений (1) и (5) возможны только два варианта: $\sum_{k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}} \delta_{\tilde{i},1,k}^{\tilde{p}}$ равна нулю или единице. При этом равенство нулю этой суммы (т.е. неотправка груза с номером \tilde{i}) приводит к тому, что должно быть выполнено условие $\overline{\mathcal{T}}_{\tilde{p}} \leq t_{\tilde{i}}^{\text{отпр}} + d_{\tilde{i}}$. Если эта сумма равна единице, то в соответствии с (5) может быть использована только одна транспортировка и время ее начала будет располагаться в промежутке $[t_{\tilde{i}}^{\text{отпр}}, t_{\tilde{i}}^{\text{отпр}} + d_{\tilde{i}}]$. Это соответствует введенному выше смыслу ограничений (8).

Из одной и той же вершины можно выйти лишь единожды²

$$(9) \quad \sum_{j=1}^{J+1} \sum_{k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}} : v_k^{\text{нач}} = m} \delta_{i,j,k}^{\tilde{p}} \leq 1, \quad i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}, \quad m = \overline{1, M}.$$

В одну и ту же вершину можно попасть лишь единожды

$$(10) \quad \sum_{j=1}^{J+1} \sum_{k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}} : v_k^{\text{кон}} = m} \delta_{i,j,k}^{\tilde{p}} \leq 1, \quad i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}, \quad m = \overline{1, M}.$$

Отправление в промежуточных вершинах маршрута не должно происходить раньше прибытия в эти вершины. Поэтому с учетом ограничений на минимальное и максимальное время стоянки имеем

$$(11) \quad \sum_{k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}} \delta_{i,j,k}^{\tilde{p}} (t_k^{\text{кон}} + t_{i,k}^{\text{ст мин}}) \leq \sum_{k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}} \delta_{i,j+1,k}^{\tilde{p}} t_k^{\text{нач}} + \\ + \left(1 - \sum_{k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}} \delta_{i,j+1,k}^{\tilde{p}} \right) \underline{\mathcal{T}}, \quad i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}, \quad j = \overline{1, J-1},$$

² Здесь и далее полагается, что сумма любых переменных по пустому множеству равна нулю.

где

$$(12) \quad \underline{T} = \max_{i \in \{1, \dots, I\}, k \in \{1, \dots, K\}} t_k^{\text{кон}} + t_{i,k}^{\text{ст. мин}},$$

$$\sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,j,k}^{\bar{p}} (t_k^{\text{кон}} + t_{i,k}^{\text{ст. макс}}) \geq \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,j+1,k}^{\bar{p}} t_k^{\text{нач}}, \quad i \in \mathcal{I}_{\bar{s}}, \quad j = \overline{1, J-1}.$$

Ограничения (11) и (12) идентичны соответствующим ограничениям из [11].

Чтобы гарантировать допустимость стоянки груза по окончании субгоризонта $[0, \overline{\mathcal{T}}_{\bar{p}})$ (если таковая имеет место), введем ограничение

$$(13) \quad \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}: v_k^{\text{кон}} \neq v_i^{\text{приб}}} \delta_{i,j,k}^{\bar{p}} (t_k^{\text{кон}} + t_{i,k}^{\text{ст. макс}} - \overline{\mathcal{T}}_{\bar{p}}) + \overline{\mathcal{T}}_{\bar{p}} \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,j+1,k}^{\bar{p}} \geq 0,$$

$$i \in \mathcal{I}_{\bar{s}}, \quad j = \overline{1, J}.$$

Для запрета движения груза после прибытия в пункт назначения введем ограничения

$$(14) \quad \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}: v_k^{\text{кон}} = v_i^{\text{приб}}} \delta_{i,j,k}^{\bar{p}} \leq 2 \left(1 - \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,j+1,k}^{\bar{p}} \right), \quad i \in \mathcal{I}_{\bar{s}}, \quad j = \overline{1, J}.$$

Прокомментируем ограничения (14). Для этого рассмотрим груз с номером $\tilde{i} \in \mathcal{I}_{\bar{s}}$. Если этот груз по окончании некоторого этапа прибыл в вершину назначения, то левая часть (14) окажется равной единице, поэтому для совместности (14) необходимо, чтобы правая часть была равна нулю. А это означает ввиду ограничений (1) и (5), что последующий после прибытия этап будет не задействован, как и все оставшиеся этапы. Если же груз не прибыл в вершину назначения, то левая часть (14) будет равна нулю. В этом случае ограничение будет выполняться, так как на любом этапе можно задействовать не более одной транспортировки, а значит, правая часть будет равна либо нулю, либо двум.

Введем величину $\hat{T}_{i,j}^{\bar{p}}$ — количество времени, проводимого грузом с номером i в j -й (по порядку следования) промежуточной вершине своего маршрута в рамках субгоризонта планирования:

$$(15) \quad \hat{T}_{i,j}^{\bar{p}} = \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,j+1,k}^{\bar{p}} (t_k^{\text{нач}} - \overline{\mathcal{T}}_{\bar{p}}) + \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}: v_k^{\text{кон}} \neq v_i^{\text{приб}}, t_k^{\text{кон}} < \overline{\mathcal{T}}_{\bar{p}}} \delta_{i,j,k}^{\bar{p}} (\overline{\mathcal{T}}_{\bar{p}} - t_k^{\text{кон}}),$$

$$i \in \mathcal{I}_{\bar{s}}, \quad j = \overline{1, J}.$$

Для удобства формулирования математической модели также положим $\hat{T}_{i,J+1}^{\bar{p}} = 0$.

Введем новые переменные $\mathcal{F}_i^{\bar{p}}$, характеризующие ожидаемое количество времени, требуемого до прибытия в пункт назначения грузу с номером i ,

после окончания субгоризонта $[0, \overline{\mathcal{T}}_{\tilde{p}})$:

$$(16) \quad \mathcal{F}_i^{\tilde{p}} = \tau_{v_i^{\text{отпр}}, v_i^{\text{приб}}} + \sum_{j=1}^J \sum_{k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}} \delta_{i,j,k} \left(\tau_{v_k^{\text{кон}}, v_i^{\text{приб}}} - \tau_{v_k^{\text{нач}}, v_i^{\text{приб}}} \right) + \\ + \sum_{j=1}^J \sum_{k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}: t_k^{\text{кон}} \geq \overline{\mathcal{T}}_{\tilde{p}}} \delta_{i,j,k} (t_k^{\text{кон}} - \overline{\mathcal{T}}_p), \quad i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}.$$

Для того чтобы не превысить допустимое время в пути, введем ограничение

$$(17) \quad \mathcal{F}_i^{\tilde{p}} + \sum_{j=1}^J \sum_{k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}: t_k^{\text{кон}} < \overline{\mathcal{T}}_p, v_k^{\text{кон}} = v_i^{\text{приб}}} \delta_{i,j,k}^{\tilde{p}} (t_k^{\text{кон}} - \overline{\mathcal{T}}_p) + \sum_{k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}} \delta_{i,1,k}^{\tilde{p}} (\overline{\mathcal{T}}_p - t_k^{\text{нач}}) \leq \\ \leq T_i + \left(1 - \sum_{k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}} \delta_{i,1,k}^{\tilde{p}} \right) \eta_{v_i^{\text{отпр}}, v_i^{\text{приб}}}, \quad \forall i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}} : t_i^{\text{отпр}} < \overline{\mathcal{T}}_p.$$

Ограничения (17) идентичны соответствующим ограничениям из [11].

Зададим переменные $\omega_i^{\tilde{p}}$, характеризующие, прибыл ли груз с номером i в пункт назначения на основе используемых транспортировок в субгоризонт планирования $[0, \overline{\mathcal{T}}_{\tilde{p}})$: 0 — прибыл, 1 — не прибыл:

$$(18) \quad \omega_i^{\tilde{p}} = 1 - \sum_{j=1}^J \sum_{k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}: t_k^{\text{кон}} < \overline{\mathcal{T}}_p, v_k^{\text{кон}} = v_i^{\text{приб}}} \delta_{i,j,k}^{\tilde{p}}, \quad i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}.$$

Необходимость не превысить максимально допустимый вес при транспортировке с номером k приводит к ограничениям

$$(19) \quad \sum_{i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}} \sum_{j=1}^{J+1} \delta_{i,j,k}^{\tilde{p}} w_i \leq W_k - \sum_{\substack{\tilde{s}-1 \\ i \in \bigcup_{s=1}^{\tilde{s}-1} \mathcal{I}_s}} \sum_{j=1}^{J+1} \hat{\delta}_{i,j,k} w_i, \quad k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}.$$

3.2. Критерий оптимальности

Потенциально система уравнений и неравенств (1)–(19) может иметь не единственное решение, поэтому требуется критерий выбора среди этих решений. Составим из всех $\delta_{i,j,k}^{\tilde{p}}$ вектор $\delta^{\tilde{s}, \tilde{p}}$, $i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}$, $j = \overline{1, J+1}$, $k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}$. Также составим из всех $\mathcal{F}_i^{\tilde{p}}$ вектор $\mathcal{F}^{\tilde{s}, \tilde{p}}$, а из $\omega_i^{\tilde{p}}$ — вектор $\omega^{\tilde{s}, \tilde{p}}$, $i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}$. Объединим все $\hat{T}_{i,j}^{\tilde{p}}$ в вектор $\hat{T}^{\tilde{s}, \tilde{p}}$, $i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}$, $j = \overline{1, J+1}$.

Выберем критериальную функцию следующего вида:

$$\begin{aligned}
 & J_{\bar{s}}^{\bar{p}} \left(\delta^{\bar{s}, \bar{p}}, \mathcal{F}^{\bar{s}, \bar{p}}, \omega^{\bar{s}, \bar{p}}, \hat{T}^{\bar{s}, \bar{p}} \right) = \\
 & = c_1 \underbrace{\sum_{i \in \mathcal{I}_s} \sum_{j=1}^{J+1} \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,j,k}^{\bar{p}} (\min\{t_k^{\text{кон}}, \bar{T}_{\bar{p}}\} - t_k^{\text{нач}})}_{\substack{\text{суммарное время в движении} \\ \text{в рамках субгоризонта планирования } [0, \bar{T}_{\bar{p}}]}} + c_2 \underbrace{\sum_{i \in \mathcal{I}_s} \sum_{j=1}^{J+1} \hat{T}_{i,j}^{\bar{p}}}_{\substack{\text{суммарное время} \\ \text{стоянки в} \\ \text{промежуточных} \\ \text{вершинах}}} + \\
 (20) \quad & + c_3 \underbrace{\sum_{i \in \mathcal{I}_s} \left(\sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,1,k}^{\bar{p}} t_k^{\text{нач}} + \left(1 - \sum_{k=1}^K \delta_{i,1,k}^{\bar{p}} \right) \bar{T}_{\bar{p}} - t_i^{\text{отпр}} \right)}_{\substack{\text{суммарное время стоянки в вершинах отправления} \\ \text{с момента готовности к отправлению} \\ \text{до конца субгоризонта планирования } [0, \bar{T}_{\bar{p}}]}} + \\
 & + c_4 \underbrace{\sum_{i \in \mathcal{I}_s} \sum_{j=1}^{J+1} \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,j,k}^{\bar{p}} w_i C_k}_{\substack{\text{суммарная стоимость} \\ \text{транспортировок}}} + c_5 \underbrace{\sum_{i \in \mathcal{I}_s} \mathcal{F}_i^{\bar{p}}}_{\substack{\text{суммарное} \\ \text{ожидаемое} \\ \text{время до} \\ \text{доставки}}} + c_6 \underbrace{\sum_{i \in \mathcal{I}_s} \omega_i^{\bar{p}}}_{\substack{\text{суммарное} \\ \text{количество} \\ \text{недоставленных} \\ \text{грузов в рамках} \\ \text{субгоризонта} \\ \text{планирования}}},
 \end{aligned}$$

где c_1, \dots, c_6 – неотрицательные константы, выбираемые лицом, принимающим решения. От выбора констант c_1, \dots, c_6 также зависит цель оптимизации. При $c_1 = c_2 = c_3 = c_5 = c_6 = 0$, $c_4 = 1$ получается задача минимизации стоимости перевозок, при $c_1 = c_2 = c_3 = c_5 = 1$, $c_4 = c_6 = 0$ – задача по минимизации суммы времени перевозок в рамках субгоризонта планирования и прогнозируемого времени за пределами этого субгоризонта. Понимая под r -й компонентой критерия сомножитель числа c_r в (20), $r = \overline{1, 6}$, заметим, что не все компоненты критерия являются однородными. Первая, вторая, третья и пятая измеряются в минутах, четвертая – в единицах стоимости, а шестая – в штуках. Если при оптимизации рассматриваются только однородные компоненты, то размерность коэффициентов c_1, \dots, c_6 неважна. При необходимости учета в одной задаче оптимизации разнородных компонент имеет смысл рассматривать задачу по минимизации общих затрат, т.е. величины c_1, c_2, c_3, c_5 будут иметь размерность условные единицы/мин, а c_6 будет иметь размерность условные единицы/шт.

Если выбрать $\bar{p} = P$, то горизонт планирования совпадет с $[0, \bar{T}_{\bar{p}}]$. Если к тому же множество номеров грузов не расщеплять, т.е. $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\bar{s}}$, а $\mathcal{K}^{\bar{s}, P} = \bigcup_{p=1}^P \mathcal{K}_p$, то построенный критерий (20) и система ограничений (1)–(19) будут в точности повторять критерий и систему ограничений из [11]. Однако при таком расщеплении (а точнее его отсутствии) множества номеров грузов и \bar{p} , которое не предполагает уменьшения множества транспортировок, используемых при поиске расписания, непосредственная оптимизация крите-

рия (20) с целью найти расписание на весь горизонт планирования целиком может быть очень долгой. Поэтому на основе полученных в работе результатов сформируем алгоритм поиска хотя и не оптимального, но более быстрого решения.

Наличие линейных по оптимизируемым переменным ограничений (2)–(19) и линейного критерия (20), векторов бинарных переменных $\delta^{\bar{s}, \bar{p}}$ и $\omega^{\bar{s}, \bar{p}}$, векторов вещественных переменных $\mathcal{F}^{\bar{s}, \bar{p}}$ и $\hat{T}^{\bar{s}, \bar{p}}$ делает задачу (20) при ограничениях (1)–(19) задачей смешанного целочисленного линейного программирования.

4. Алгоритм для нахождения расписания

При формировании алгоритма учтем возможность более быстрого его функционирования путем удаления транспортировок, которые вряд ли будут использованы. Так, не имеет смысла учитывать при составлении расписания на данный субгоризонт планирования транспортировки из вершин, до которых ни один из грузов в этот субгоризонт не успеет добраться. Вообще говоря, для того чтобы определить, сумеет ли тот или иной груз за заданное время добраться до конкретной вершины, необходимо решить соответствующую задачу оптимизации. Однако решение такого рода задач требует времени. Поэтому для установления того факта, что грузы не доберутся до некоторой вершины, будем использовать величины τ_{m_1, m_2} , $m_1 = \overline{1, M}$, $m_2 = \overline{1, M}$. Безусловно, не всегда вывод о возможности прибытия в некоторую вершину на основе величин τ_{m_1, m_2} является верным, $m_1 = \overline{1, M}$, $m_2 = \overline{1, M}$. Это связано с тем, что эти величины строятся на основе прошлой истории перевозок, а не на транспортировках, доступных сейчас. Тем не менее это существенно позволяет сократить время счета, хотя и с ухудшением значения критериальной функции/невозможностью принять к перевозке некоторые грузы. Величины τ_{m_1, m_2} будем сравнивать с отношением длины соответствующего промежутка разбиения к параметру ускорения, $m_1 = \overline{1, M}$, $m_2 = \overline{1, M}$. Параметр ускорения, который является безразмерным, будем обозначать через A . Чем меньше A , тем меньше транспортировок будет вычеркнуто, но тем, скорее всего, больше грузов будет принято к перевозке. И, напротив, чем больше A , тем быстрее получится решение, но тем менее качественное (в терминах количества принятых к отправке грузов) оно будет. При $A = 0$ никаких удалений делать не будем. При решении задач оптимизации наиболее рациональным представляется полагать A равным единице. В таком случае ожидаемое время до прибытия в некоторую вершину будет сравниваться с длительностью соответствующего промежутка разбиения, т.е. промежутка времени, в котором расписание еще не зафиксировано и ищется.

1. Задаются числа $c_1, \dots, c_6 \in \mathbb{R}_+$. Фиксируются числа $P, J \in \mathbb{N}$. Задается число $A \in \mathbb{R}_+$.

2. Множество номеров грузов расщепляется на $S \in \mathbb{N}$ непересекающихся подмножеств \mathcal{I}_s , т.е. $\{1, \dots, I\} = \bigcup_{s=1}^S \mathcal{I}_s$, причем $\forall s_1, s_2 \in \{1, \dots, S\} : s_1 \neq s_2$ $\mathcal{I}_{s_1} \cap \mathcal{I}_{s_2} = \emptyset$.

3. Формируется множество промежутков $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_P$ так, что $[0, T_{\max}) = \bigcup_{p=1}^P \mathcal{T}_p$, где $\forall p_1, p_2 \in \{1, \dots, P\} : p_1 \neq p_2 \quad \mathcal{T}_{p_1} \cap \mathcal{T}_{p_2} = \emptyset$, причем $\underline{\mathcal{T}}_1 = 0$, $\overline{\mathcal{T}}_P = T_{\max}$, $\underline{\mathcal{T}}_{p+1} = \overline{\mathcal{T}}_p$, $p = \overline{1, P-1}$.

4. Формируются множества $\mathcal{K}_p = \{k \in \mathbb{N} : k \leq K, t_k^{\text{нач}} \in \mathcal{T}_p\}$, $p = \overline{1, P}$.

5. Инициализируется параметр $\tilde{s} = 1$.

6. Инициализируется параметр $\tilde{p} = 1$.

7. Если \tilde{p} равно единице, то формируется множество $\mathcal{V}^{\tilde{s}, \tilde{p}} = \bigcup_{i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}} v_i^{\text{отпр}}$. Если \tilde{p} больше единицы, то

$$\mathcal{V}^{\tilde{s}, \tilde{p}} = \bigcup_{i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}} \begin{cases} v_i^{\text{отпр}}, & \sum_{j=1}^{J+1} \sum_{k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}-1}} \bar{\delta}_{i,j,k}^{\tilde{p}-1} = 0, \\ \sum_{k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}-1}} \bar{\delta}_{i,j_i,k}^{\tilde{p}-1} v_k^{\text{кон}}, & \sum_{j=1}^{J+1} \sum_{k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}-1}} \bar{\delta}_{i,j,k}^{\tilde{p}-1} > 0, \end{cases}$$

где

$$j_i = \sum_{j=1}^{J+1} \sum_{k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}-1}} \bar{\delta}_{i,j,k}^{\tilde{p}-1}, \quad i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}.$$

Множество $\mathcal{V}^{\tilde{s}, \tilde{p}}$ состоит из индексов вершин отправления для тех грузов, что еще не в пути, и индексов последних (на текущий момент) вершин движения для грузов, начавших свое движение из соответствующих вершин отправления.

8. Если $A = 0$, то $\mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}} = \mathcal{K}_{\tilde{p}}$. Если $A > 0$, то формируется множество $\mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}} = \left\{ k \in \mathcal{K}_{\tilde{p}} : \min_{m \in \mathcal{V}^{\tilde{s}, \tilde{p}}} \tau_{m, v_k^{\text{нач}}} \leq (\overline{\mathcal{T}}_{\tilde{p}} - \underline{\mathcal{T}}_{\tilde{p}}) / A, \min_{i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}} t_i^{\text{отпр}} \leq t_k^{\text{нач}} \right\}$.

9. Если $\tilde{p} > 1$ формируется множество $\mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}} = \bigcup_{p=1}^{\tilde{p}-1} \mathcal{K}^{\tilde{s}, p} \cup \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}$. Если $\tilde{p} = 1$, то $\mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}} = \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}$.

10. Если множество $\mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}$ пусто и $\tilde{p} < P$, то величина \tilde{p} увеличивается на единицу, происходит переход к шагу 7.

Если множество $\mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}$ пусто и $\tilde{p} = P$, то $\hat{\delta}_{i,j,k} = 0$, $\mathcal{D}_i = 0$, $i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}$, $j = \overline{1, J+1}$, $k = \overline{1, K}$. Если $\tilde{s} = S$, то алгоритм завершен. Если $\tilde{s} < S$, то величина \tilde{s} увеличивается на единицу, происходит переход к шагу 6.

Если множество $\mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}$ не пусто, то происходит переход к шагу 11.

11. Решается задача

$$J_{\tilde{s}}^{\tilde{p}}(\delta^{\tilde{s}, \tilde{p}}, \mathcal{F}^{\tilde{s}, \tilde{p}}, \omega^{\tilde{s}, \tilde{p}}, \hat{T}^{\tilde{s}, \tilde{p}}) \rightarrow \min_{\delta^{\tilde{s}, \tilde{p}}, \mathcal{F}^{\tilde{s}, \tilde{p}}, \omega^{\tilde{s}, \tilde{p}}, \hat{T}^{\tilde{s}, \tilde{p}}}$$

при ограничениях (1)–(19), а также при $\tilde{p} > 1$ ограничениях

$$(21) \quad \delta_{i,j,k}^{\tilde{p}} = \bar{\delta}_{i,j,k}^{\tilde{p}-1}, \quad i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}, \quad j = \overline{1, J+1}, \quad k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}-1}.$$

Если решение этой задачи не существует, то $\hat{\delta}_{i,j,k} = 0$, $\mathcal{D}_i = 0$, $i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}$, $j = \overline{1, J+1}$, $k = \overline{1, K}$. Если $\tilde{s} = S$, то алгоритм завершен. Если $\tilde{s} < S$, то величина \tilde{s} увеличивается на единицу, происходит переход к шагу 6.

Если решение задачи найдено и $\tilde{p} < P$, то задаются величины $\bar{\delta}_{i,j,k}^{\tilde{p}}$, равные единице, если на промежуток времени $[0, \overline{\mathcal{T}}_{\tilde{p}})$ для груза с номером i на этапе с номером j зарезервирована транспортировка с номером k , и равные 0 в противном случае, $i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}$, $j = \overline{1, J+1}$, $k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}$. Величина \tilde{p} увеличивается на единицу. Происходит переход к шагу 7.

Если решение задачи найдено и $\tilde{p} = P$, то $\mathcal{D}_i = 1$, задаются величины $\hat{\delta}_{i,j,k}$, равные единице, если для груза с номером i на этапе с номером j используется транспортировка с номером k , и равные 0 в противном случае, $i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}$, $j = \overline{1, J+1}$, $k = \overline{1, K}$. Если $\tilde{s} = S$, то алгоритм завершен. Если $\tilde{s} < S$, то величина \tilde{s} увеличивается на единицу, происходит переход к шагу 6.

Отметим, что ограничение (21) позволяет зафиксировать расписание на промежуток $[0, \overline{\mathcal{T}}_1)$ при поиске расписания на промежуток $[0, \overline{\mathcal{T}}_2)$, расписание на промежуток $[0, \overline{\mathcal{T}}_2)$ при поиске расписания на промежуток $[0, \overline{\mathcal{T}}_3)$ и т.д.

Алгоритмом *по наименьшему/наибольшему времени* будем называть такой алгоритм, при котором на втором шаге дробление происходит по возрастанию/убыванию времени готовности грузов к отправлению. А именно множество \mathcal{I}_1 будет состоять из номера груза с самым ранним/поздним временем готовности к отправлению, \mathcal{I}_2 — со вторым/предпоследним и т.д.

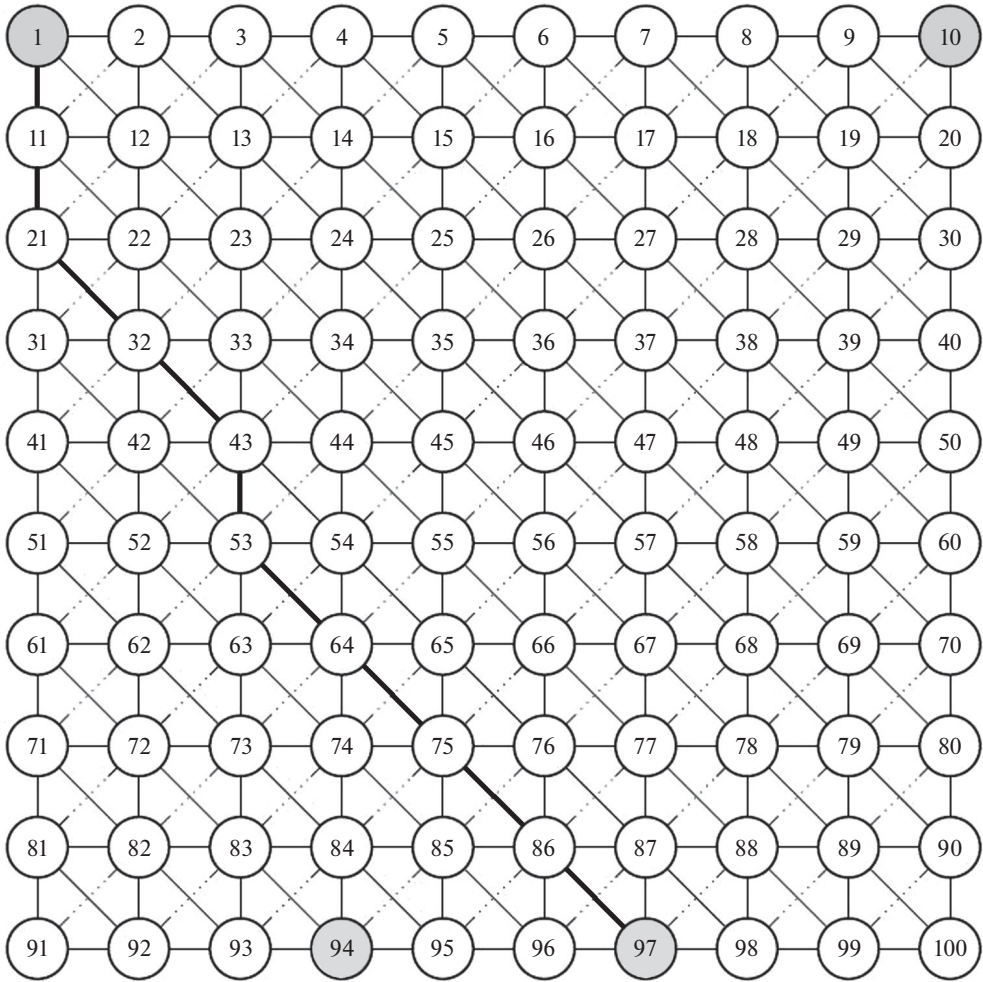
5. Пример

Рассмотрим модельный пример.

Пусть мультиграф транспортной сети имеет вид, представленный на рисунке. Для большей наглядности второе ребро между смежными вершинами опущено. На графе представлены ребра с номером 1. Некоторые ребра обозначены пунктирной линией с целью показать разноуровневое пересечение ребер в транспортной сети.

Положим $T_{\max} = 1440$ мин. Выбран некоторый момент отсчета. Начиная с момента отсчета: каждые 60 мин в вершине с индексом 1 появляется по 5 грузов одинакового веса в 1 единицу, эти грузы требуется перевезти в вершину с индексом 97; каждые 60 мин в вершине с индексом 10 появляется по 5 грузов одинакового веса в 1 единицу, эти грузы требуется перевезти в вершину с индексом 94.

Транспортировки между вершинами с разностью индексов, равной 1 или 10 по модулю, осуществляются каждые 30 мин, цена такой транспортировки — 10 условных единиц, максимальный перевозимый вес — 2 условные единицы, длительность транспортировки — один час. Транспортировки между вершинами с разностью индексов, равной 9 или 11 по модулю, осуществляются каждые 30 мин, цена такой транспортировки — 20 условных единиц, максимальный перевозимый вес — 2 условные единицы, длительность транспортировки — 85 мин. Таким образом, $I = 240$, $K = 32\ 832$, $M = 100$.



Мультиграф G транспортной сети (оранжевым выделены вершины отправления и назначения, синим выделен наиболее часто встречающийся путь у доставленных грузов на одном из полученных решений).

Предположим, что $d_i = 180$, $T_i = 960$, $t_{i,k}^{\text{CT мин}} = 0$, $t_{i,k}^{\text{CT макс}} = 120$, $i = \overline{1, I}$, $k = \overline{1, K}$.

Положим $\eta_{m_1, m_2} = 0$, $m_1, m_2 = \overline{1, 100}$. Пусть также

$$\tau_{m_1+1, m_2+1} = \begin{cases} 90, & |m_1 \% 10 - m_2 \% 10| = 1 \text{ и } |[m_1/10] - [m_2/10]| = 1 \\ 60|m_1 \% 10 - m_2 \% 10| + 60|[m_1/10] - [m_2/10]|, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $x \% y$ – остаток от деления числа x на число y , $[x]$ – целая часть числа x , $m_1, m_2 = \overline{0, 99}$. Такой выбор величин τ_{m_1, m_2} обеспечивает то, что ожидаемое время перевозки грузов от одной смежной вершины до другой, если они соединены по диагонали, составляет 90 мин, во всех остальных случаях ожидаемая длительность перевозок пропорциональна минимальному количеству

Таблица 1. Показатели приближенного решения, найденного алгоритмом по наименьшему времени, в формате суммарное время перевозок/количество принятых к перевозке грузов/количество доставленных грузов/цены перевозок/времени счета в минутах для различных P и J

$J \backslash P$	9	12	15
6	147 960/192/68/21 550/75	183 855 /240/122/28 840/91	183 600 /240/122/28 840/99
12	141 675/182/60/19 720/45	186 435 /240/117/28 520/52	186 435 /240/117/28 520/58
24	170 230/220/94/25 200/54	195 590 /240/96/28 160/59	195 590 /240/96/28 160/64

Таблица 2. Показатели приближенного решения, найденного алгоритмом по наибольшему времени, в формате суммарное время перевозок/количество принятых к перевозке грузов/количество доставленных грузов/цены перевозок/времени счета в минутах для различных P и J

$J \backslash P$	9	12	15
6	148 475/192/64/21 530/73	183 580 /240/122/29 040/88	183 580 /240/122/29 040/107
12	124 245/156/26/15 560/50	187 870/236/106/28 060/54	191 685 /240/110/28 770/62
24	171 470/222/96/25 760/55	171 470/222/96/25 760/57	171 470/222/96/25 760/62

ребер при пути от одной вершины до другой без использования диагональных ребер.

Рассмотрим случай $c_1 = c_2 = c_3 = c_5 = 1$, $c_4 = c_6 = 0$. Положим $A = 1$. Проанализируем, как зависят от P и J результаты применения предложенных алгоритмов. Длительность промежутков $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_P$ будем выбирать одинаковой. Предварительно отметим, что при имеющихся транспортировках движение из вершины с индексом 1 в вершину с индексом 12 стоит столько же, сколько движение через промежуточную вершину с индексом 2 (или индексом 11), при этом движение напрямую занимает меньшее время. Однако наиболее быстрое движение из вершин отправления — по диагонали — вследствие заявленного максимального веса и периодичности транспортировок доступно не для каждого груза, поэтому исследуемая оптимизационная задача, вообще говоря, нетривиальна.

Жирным в табл. 1 и 2 выделены те случаи, когда все грузы приняты к доставке. Как следует из табл. 1 и 2, наилучший результат был достигнут для алгоритма по наибольшему времени при $P = 6$, $J = 12$. Это решение будем называть *базовым*. Для базового решения наиболее часто использованная цепочка индексов вершин, пересекаемых грузами при движении, это

$$1 \rightarrow 11 \rightarrow 21 \rightarrow 32 \rightarrow 43 \rightarrow 53 \rightarrow 64 \rightarrow 75 \rightarrow 86 \rightarrow 97.$$

Такая цепочка встретилась для 8 грузов. Среди доставленных в рамках горизонта планирования грузов для 74 грузов было задействовано 9 транспортировок, для 41 груза — 10, для 7 грузов — 11. Из доставленных грузов ровно половина отправлялась из вершины с индексом 1.

Таблица 3. Дальнейшее улучшение базового решения в алгоритме по наибольшему времени

Параметры алгоритма	Суммарное время перевозок	Количество принятых к перевозке грузов	Количество доставленных грузов	Цена перевозок	Время счета, мин
$A = 1, P = 4,$ $J = 12$	182 455	240	122	28 830	222
$A = 0,5, P = 6,$ $J = 12$	183 165	240	124	29 000	187

Еще одним результатом проведенного исследования является тот факт, что для случаев, когда все грузы приняты к перевозке, при фиксированном J с убыванием P ожидаемо растет время счета, так как решаются задачи математического программирования большей размерности. Однако также наблюдается уменьшение критерия. Рост J при фиксированном P приводит к тому, что большее количество грузов принимается к доставке. Однако увеличение J с 12 до 15 в данной задаче не всегда позволяет уменьшить значение критерия. Этот факт может быть вызван тем, что T_i относительно невелико, $i = \overline{1, I}$. Поэтому маршруты с большим числом транспортировок и временем в пути от момента готовности использованы быть не могут. Кроме того, цель оптимизации — в минимизации суммарного времени перевозок, а движение по диагонали, как отмечалось ранее, быстрее.

Заметим, что уже при $J = 12$ с учетом ограничения (4) в исследуемой задаче имеется $I \cdot J \cdot K = 94\,556\,160$ бинарных переменных, подлежащих оптимизации. При этом время поиска решения составляет около часа, что можно признать приемлемой скоростью. Для ускорения поиска решения можно, например, вначале зафиксировать некоторый набор вершин, через которые должен проследовать тот или иной груз. Если для этого набора будут найдены соответствующие транспортировки, то можно не искать расписание для этого набора грузов на всем множестве транспортировок. Также можно уменьшить количество элементов во множестве $\mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}$, формируемого на восьмом шаге предложенного алгоритма, $\tilde{s} = \overline{1, S}$, $\tilde{p} = \overline{1, P}$. Например, можно исключать транспортировки с вершинами начала или конца движения, в которых уже побывали все грузы из множества $\mathcal{I}_{\tilde{s}}$, $\tilde{s} = \overline{1, S}$. Однако любые такого рода модификации, приводя к увеличению скорости получения решения, могут ухудшить решение в терминах качества.

Исследуем вопрос о качестве получаемого решения, если уменьшить P или A относительно уже использованных.

Как следует из табл. 3, и уменьшение A , и уменьшение P позволили найти решение, несколько лучшее (порядка 0,5 %) по значению критерия, чем базовое решение. Однако время поиска улучшенного решения увеличилось в несколько раз. Увеличение времени счета связано с увеличением размерности решаемых при функционировании алгоритма задач.

Отметим, что потенциально предложенный алгоритм может использоваться не только в целях стратегического, но и оперативного планирования. Оперативное планирование возможно в ситуациях с меньшим количеством транспортировок/меньшим числом вершин мультиграфа, чем рассмотренное в настоящем примере [11]. Вопрос о максимальной размерности решаемой задачи, при которой возможно оперативное планирование при помощи разработанного алгоритма, представляет отдельный научный интерес. Необходимо сказать, что можно ускорить работу предложенного алгоритма новой/другой версией решателя задач смешанного целочисленного линейного программирования.

Все численные эксперименты проводились при помощи математического пакета ILOG CPLEX 12.5.1 на персональном компьютере (Intel Core i5 4690, 3.5 GHz, 8 GB DDR3 RAM).

6. Заключение

В работе была исследована задача формирования расписания движения грузов по транспортной сети, представляемой неориентированным мультиграфом. Транспортировки между вершинами графа осуществлялись в заранее заданные промежутки времени. Для решения этой задачи была предложена математическая модель движения по мультиграфу, построенная с использованием линейных ограничений и неравенств, содержащих целочисленные и непрерывные переменные. Сформулирован критерий оптимизации. Ввиду возможной высокой размерности получаемой задачи был предложен алгоритм поиска приближенного решения. Алгоритм основан на декомпозиции множества грузов и горизонта планирования. Дополнительно в алгоритм введен параметр, отвечающий за ускорение его работы. Этот параметр регулирует количество транспортировок, на которых строится расписание на том или ином шаге алгоритма. Проведено исследование качества декомпозиции на содержательном примере с миллионами целочисленных переменных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Archetti C., Speranza G., Vigo D.* Vehicle routing problems with profits / Toth P., Vigo D. (eds.). *Vehicle Routing: Problems, Methods, and Applications* (Second ed.). 2014. P. 273–297.
2. *Cacchiani V., Caprara A., Toth P.* A column generation approach to train timetabling on a corridor // *4OR*. 2008. V. 6. No. 2. P. 125–142.
3. *Gao Yu., Kroon L., et. al.* Three-stage optimization method for the problem of scheduling additional trains on a high-speed rail corridor // *Omega*. 2018. V. 80. P. 175–191.
4. *Mu S., Dessouky M.* Scheduling freight trains traveling on complex networks // *Transport. Res. Part B: Methodological*. 2011. V. 45. No. 7. P. 1103–1123.
5. *Forsgren M., Aronsson M., Gestrelius S.* Maintaining tracks and traffic flow at the same time // *J. Rail Transport Planning & Management*. 2013. V. 3. No. 3. P. 111–123.

6. *Meng L., Zhou X.* Simultaneous train rerouting and rescheduling on an N-track network: A model reformulation with network-based cumulative flow variables // *Transportation Research Part B: Methodological*. 2014. V. 67. P. 208–234.
7. *Cacchiani V., Caprara A., Toth P.* Scheduling extra freight trains on railway networks // *Transport. Res. Part B: Methodological*. 2010. V. 44. No. 2. P. 215–231.
8. *Lazarev A.A., Musatova E.G.* The problem of trains formation and scheduling: Integer statements // *Autom. Remote Control*. 2013. V. 74. No. 12. P. 2064–2068.
9. *Гайнанов Д.Н., Игнатов А.Н. и др.* О задаче назначения “технологического окна” на участках железнодорожной сети // *АиТ*. 2020. № 6. С. 3–16.
Gainanov D.N., Ignatov A.N., et al. On track procession assignment problem at the railway network sections // *Autom. Remote Control*. 2020. V. 81. No. 6. P. 967–977.
10. *Ignatov A.N.* On the scheduling problem of cargo transportation on a railway network segment and algorithms for its solution // *Bul. of the South Ural State Univ. Ser. Mat. Model. Progr.* 2021. V. 14. No. 3. P. 61–76.
11. *Игнатов А.Н.* Об общей постановке задачи формирования расписания грузоперевозок и способах ее решения // *АиТ*. 2023. № 4. С. 145–165.
Ignatov A.N. On the general problem statement of cargo carriages scheduling and ways to solve it // *Autom. Remote Control*. 2023. V. 84. No. 4. P. 496–510.
12. *Босов А.В., Игнатов А.Н., Наумов А.В.* Алгоритмы приближенного решения задачи назначения «технологического окна» на участках железнодорожной сети // *Информатика и ее применения*. 2021. Т. 15. № 4. С. 3–11.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 06.04.2023

После доработки 19.06.2023

Принята к публикации 20.07.2023