

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АППЛАНАЦИОННОЙ И ИМПРЕССИОННОЙ ТОНОМЕТРИИ ПОСЛЕ ХИРУРГИЧЕСКОЙ КОРРЕКЦИИ ЗРЕНИЯ

© 2019 г. И.Н. Моисеева, А.А. Штейн, Г.А. Любимов

*Институт механики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова,  
117899, Москва, Мичуринский просп., 1*

*E-mail: moiseeva.ir@yandex.ru, stein.msu@bk.ru*

Поступила в редакцию 22.05.2019 г.

После доработки 22.05.2019 г.

Принята к публикации 30.05.2019 г.

Выполнено математическое моделирование аппланационной и импрессионной тонометрии (по Маклакову и Шиотцу соответственно) для глаза с искусственно вызванной сильной неоднородностью упругих свойств роговицы. Такая неоднородность возникает, в частности, в результате хирургической коррекции зрения. Рассматривается ослабление роговицы либо в области апекса (коррекция миопии), либо в периферической кольцевой зоне, лежащей вблизи склеры (коррекция гиперметропии). Использована двухкомпонентная модель глазного яблока, в которой роговица представляется безмоментной деформируемой линейно-упругой поверхностью, а склеральная область — упругим элементом, откликающимся изменением объема на изменения внутриглазного давления. При таком представлении механические свойства роговицы характеризуются эффективной жесткостью — параметром, содержащим в себе как упругие свойства материала роговицы, так и ее толщину. Проведен анализ применимости соотношений, используемых при стандартной обработке данных тонометрии, а также результатов моделирования, полученных нами ранее для случая однородной роговицы, к оперированным глазам со значительной неоднородностью ее упругих свойств. Поправки, вносимые неоднородностью, оказались наиболее значительны для тонометра Шиотца при апикальном ослаблении и достаточно высоком внутриглазном давлении. В случае тонометрии по Маклакову влияние неоднородности на расчет истинного давления не слишком велико для обоих рассмотренных типов ослабления роговицы.

*Ключевые слова: роговица глаза, неоднородность упругих свойств, хирургическая коррекция зрения, тонометрия по Маклакову, тонометрия по Шиотцу, математическое моделирование.*

DOI: 10.1134/S0006302919050272

В последние десятилетия в офтальмологическую практику широко вошли методы коррекции зрения, основанные на хирургическом изменении формы роговицы [1,2]. Все эти методы связаны с удалением части стромы, прилегающей к внешней поверхности роговицы. Таким образом, образуются области, в которых ее толщина заметно уменьшается. Меньше становится также эффективная жесткость роговицы как оболочки. В особенности на уменьшении эффективной жесткости сказывается тот факт, что прочностные свойства роговицы распределены неоднородно по толщине и в основном определяются именно внешними слоями, прилегающими к эпителию, т.е. как раз теми слоями, из которых производится удаление ткани.

Возникновение значительной неоднородности роговицы при корректирующей хирургии де-

лает практически важным вопрос об интерпретации результатов тонометрии в приложении к оперированному глазу, поскольку накопленный за долгие годы исследований опыт относится к глазу с распределением упругих свойств роговицы, не слишком отличающимся от однородного [3]. Прежде всего, речь должна идти о статической тонометрии, так как данные других методов тонометрии тарируются по результатам статической.

В России наиболее распространенными статическими тонометрами являются тонометры Маклакова (аппланационная тонометрия) и Шиотца (импрессионная тонометрия). Именно для них и будет проведено математическое моделирование в предлагаемой работе.

Строго говоря, и для глаза, не подвергшегося операции, стандартные методики обработки данных тонометрии могут давать значительные

ошибки [4,5] вследствие большого разброса упругих свойств глазных тканей [6]. Для эффективной оценки влияния такого разброса нами была разработана модель, представляющая роговицу двумерной упругой безмоментной поверхностью, а склеральную область упругим элементом, откликающимся изменением объема на изменение внутриглазного давления [4]. В первоначальном варианте модели поверхность считалась однородной и изотропной. В дальнейшем рассматривались обобщения такого подхода. В частности, в работе [7] модель была модифицирована для случая пространственно неоднородной роговицы. В рамках нашего приближения неоднородность упругих свойств и толщины роговицы в тангенциальном направлении описывается как зависимость от положения на меридиональной дуге единственной величины – эффективной жесткости поверхности, моделирующей роговицу. Такое представление позволяет не учитывать неоднородность упругих свойств роговицы по толщине, недостаточно изученную и, по всей видимости, сильно различающуюся для разных глаз [7–9].

В работе [10] исследовано влияние некоторых типов естественной и искусственной неоднородности роговицы на ее поведение при раздувании внутренним давлением, а также при нагружении плоским широким штампом (тонометрия по Маклакову). В настоящей работе внимание сосредоточено на статической тонометрии (как по Маклакову, так и по Шиотцу) для таких распределений неоднородности, которые возникают при хирургической коррекции зрения. Анализируется влияние присутствия значительно ослабленных областей в апикальной зоне роговицы (коррекция миопии) и в кольцевой зоне на ее периферии (коррекция гиперметропии).

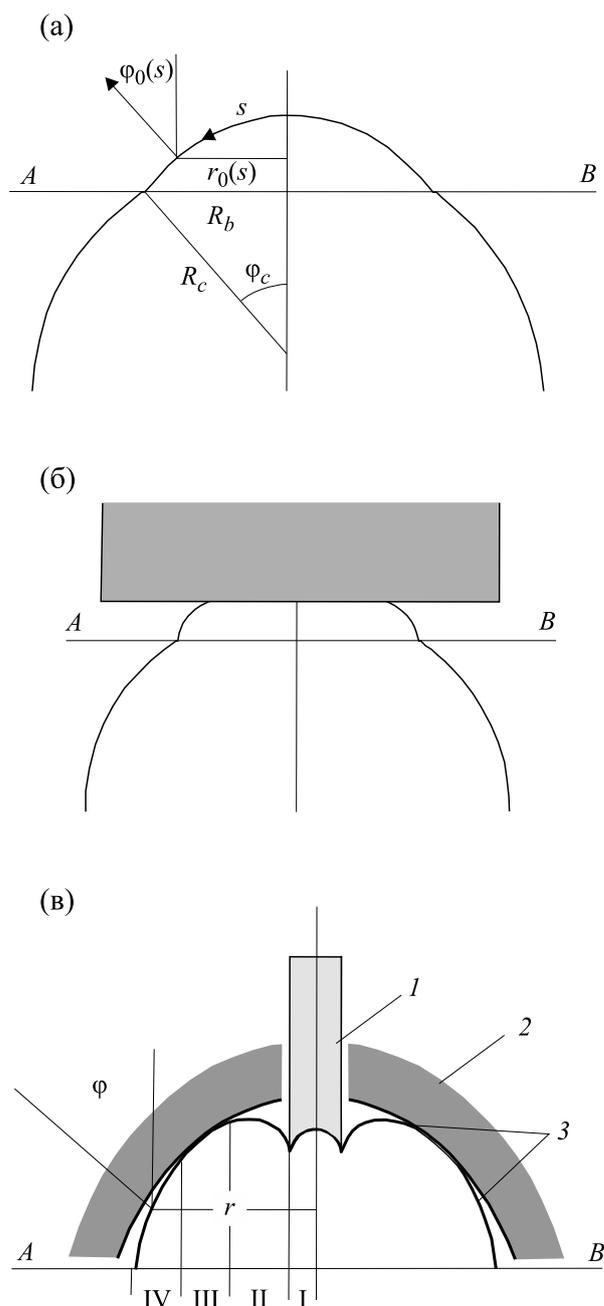
Исследуется влияние различных параметров, характеризующих ослабление роговицы, на соотношение между характеристиками, измеряемыми при тонометрии, и давлением в ненагруженном глазу. В конечном счете исследование имеет целью ответить на естественные вопросы практикующего врача:

– В какой степени при обработке данных тонометрии глаз после операций по коррекции миопии и гиперметропии можно использовать стандартные формулы и таблицы?

– Дает ли в этом случае преимущество использование расчетных кривых, полученных ранее нами для «среднего» глаза [4,5]?

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

На рис. 1 схематически представлены глазное яблоко, не нагруженное извне (рис. 1а), а также нагруженное широким плоским штампом (тонометр Маклакова, рис. 1б) и тонометром Шиотца



**Рис. 1.** К постановке задачи: (а) – глазное яблоко до нагружения; (б) – роговица, нагруженная тонометром Маклакова; (в) – роговица, нагруженная тонометром Шиотца: 1 – плунжер; 2 – стопа; 3 – роговица. Остальные обозначения – в тексте.

(рис. 1в). Последний состоит из тяжелого вогнутого штампа (стопа) и свободно опускающегося на роговицу через отверстие в центре стопы тонкого стержня (плунжера).

Система уравнений для части роговицы вне контакта с тонометром обоснована для неодно-

родной роговицы в работе [10] и имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}(r_0 T_1)' - T_2 \cos \varphi &= 0, \\ -T_2 \sin \varphi - r_0 \varphi' T_1 + \lambda r_0 p_t &= 0, \\ r' &= \gamma \cos \varphi,\end{aligned}$$

$$\lambda = 1 + \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2 = \frac{r}{r_0} - 1, \quad r_0 = R_c \sin \varphi_0, \quad \varphi_0(s) = \frac{s}{R_c}, \quad (1)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E_c^*} [T_1 - \nu_c T_2 - T_0 (1 - \nu_c)]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E_c^*} [T_2 - \nu_c T_1 - T_0 (1 - \nu_c)]$$

Здесь приняты обозначения:  $r$  – расстояние точки поверхности, представляющей роговицу, от оси;  $\varphi$  – угол между нормалью к этой поверхности и осью симметрии;  $s$  – длина дуги образующей роговицы в начальном состоянии, отмеряемая от точки пересечения роговицы с осью симметрии (апекса) и играющая роль независимой переменной;  $p_t$  – тонометрическое давление (т.е. давление внутриглазной жидкости в присутствии груза);  $E_c^*$  и  $\nu_c$  – жесткость и коэффициент Пуассона роговицы как поверхности [4];  $T_1$  и  $T_2$  – касательные усилия в меридиональном и перпендикулярном к нему (окружном) направлениях;  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  – деформации в тех же направлениях, отсчитываемые от некоторого начального состояния не нагруженной извне роговицы;  $r_0(s)$  и  $\varphi_0(s)$  –  $r$  и  $\varphi$  как функции  $s$  в этом начальном состоянии (рис. 1а). Последнее считается условно соответствующим некоторому сферическому пространственно однородному сегменту радиуса  $R_c$  (радиус роговицы) с внутренним давлением  $p_0$ . В этом состоянии  $T_1 = T_2 = T_0 = p_0 R_c / 2$ .

Там, где роговица соприкасается с поверхностями тонометра, система уравнений (1) остается справедливой за исключением второго уравнения, которое заменяется уравнением связи:

$$\sin \varphi = r / r_t,$$

где  $r_t$  – радиус кривизны соответствующей поверхности, равный  $r_p$  для плунжера и  $r_f$  для стопы в случае тонометра Шиотца и  $\infty$  в случае тонометра Маклакова.

В задаче тонометрии [4] приращение «подроговичного» объема  $\Delta V_c$  (над плоскостью  $AB$ ) связано с приращением «склерального» объема  $\Delta V_s$  (под плоскостью  $AB$ ) следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}\Delta V_s &= K(p_t - p_0), \\ \Delta V_c + \Delta V_s &= \Delta V = 0,\end{aligned}$$

т.е. полный объем внутриглазной жидкости остается неизменным. Здесь  $K$  – константа, характеризующая упругость склеральной области.

Далее используются переопределенные упругие константы  $E_c$  и  $E_s$  [4], связанные с  $E_c^*$  и  $K$  формулами

$$\begin{aligned}E_c^* &= \delta E_c, \\ K &= (\zeta E_s)^{-1},\end{aligned}$$

где  $\delta = 0,5$  мм – средняя в норме толщина роговицы, а  $\zeta = 1,44 \cdot 10^{-5}$  мм<sup>-3</sup>. Будем называть  $E_c$  и  $E_s$  роговичной и склеральной жесткостями соответственно. Упругий модуль  $E_c(s)$  – задаваемая функция координаты  $s$ .

Решение задачи ищется в области  $0 \leq s \leq s_*$ , где  $s_* = \varphi_c R_c$  – значение координаты  $s$  на границе роговицы и склеры. Граничные условия включают условие  $r(s_*) = R_b$  (жесткое закрепление роговицы на склере) и условие ограниченности усилия  $T_1$  в апексе [4,5]. Задаются также условия на поверхностях отрыва поверхностей тонометра от роговицы.

Для тонометра Маклакова такое условие имеет вид

$$G = \pi r^2 p_t, \quad (2)$$

где  $G$  – вес груза, а функции  $T_1(s)$ ,  $\varphi(s)$  и  $r(s)$  непрерывны.

Для тонометра Шиотца на границах, разделяющих обозначенные на рис. 1в зоны [5], имеем

$$\text{I–II: } r^- = r^+ = r_*, \quad T_1^- = T_1^+,$$

$$G_p = \pi r_*^2 p_t - 2\pi r_* T_1 \sin(-\varphi^-),$$

$$\text{II–III: } r^- = r^+, \quad \varphi^- = \varphi^+, \quad T_1^- = T_1^+,$$

$$\text{III–IV: } r^- = r^+, \quad \varphi^- = \varphi^+, \quad T_1^- = T_1^+,$$

$$G_p + G_f = \pi r^2 p_t - 2\pi r T_1 \sin \varphi,$$

где  $G_p$  и  $G_f$  – веса плунжера и стопы соответственно,  $r_*$  – радиус сечения плунжера, а индексами «–» и «+» обозначены значения переменных по разные стороны линии отрыва, причем знак «–» соответствует области, лежащей дальше от оси. В соотношениях, содержащих веса (условия равновесия) функции, непрерывные на рассматриваемой поверхности разрыва, индексами «–» и «+» не помечены.

В расчетах принято:  $R_c = 8$  мм,  $R_b = 5,8$  мм,  $E_s = 10$  МПа,  $\nu_c = 0,45$ ,  $G = 15$  г,  $G_f = 11,5$  г,  $G_p = 5,5$  г,  $r_* = 1,5$  мм,  $r_f = r_p = 15$  мм. Значения весов  $G$  и  $G_p$  выбраны таким образом, чтобы давления в нагруженном глазу были сопоставимы для двух рассматриваемых типов тонометров. Независимая переменная  $s$  далее обезразмерена по радиусу ро-

говицы  $R_c$ , причем прежнее обозначение для нее сохраняется. При принятых значениях геометрических параметров роговицы  $s_* \approx 0,8$ .

Эффективная жесткость ослабленной роговицы  $E_c$  варьировалась в диапазоне 0,1–0,9 МПа при различных ее симметричных относительно оси глаза распределениях. Таким образом, эта величина считается функцией только параметра  $s$ , и различные схемы коррекции соответствуют различным формам поведения функции  $E_c(s)$ . Во всех случаях, рассмотренных в этом разделе, функция  $E_c(s)$  предполагалась отличной от некоторого значения, равного жесткости до операции (интактной жесткости) в некоторой конечной области, где ее значение также постоянно, но намного меньше. Считается, что жесткость  $E_c(s)$  меняется при переходе от одной области к другой непрерывно и имеет пограничную область, в которой это изменение происходит. Удобные приближение для описания такого поведения дают функции, сконструированные из арктангенсов. В частности, функция  $E_c(s)$  может быть близка к кусочно-постоянной. В этом случае пограничная область очень узка в сравнении с размерами основных областей.

В рамках рассматриваемой постановки задачи в случае тонометра Маклакова связь между тонометрическим давлением и непосредственно измеряемой геометрической характеристикой (радиусом поверхности контакта «тонометр—роговица») известна заранее и задается формулой (2). Для тонометра Шиотца соответствующая связь (измеряемый параметр — заглубление плунжера) определяется численным расчетом. Для обоих рассматриваемых тонометров основной вопрос — оценка зависимости давления под грузом (тонометрического)  $p_t$  от давления до нагружения (истинного)  $p_0$  или, что равноценно, тонометрической разности  $\Delta p = p_t - p_0$  от истинного давления. В последующих разделах изучается влияние распределения роговичной жесткости  $E_c(s)$  на эти зависимости.

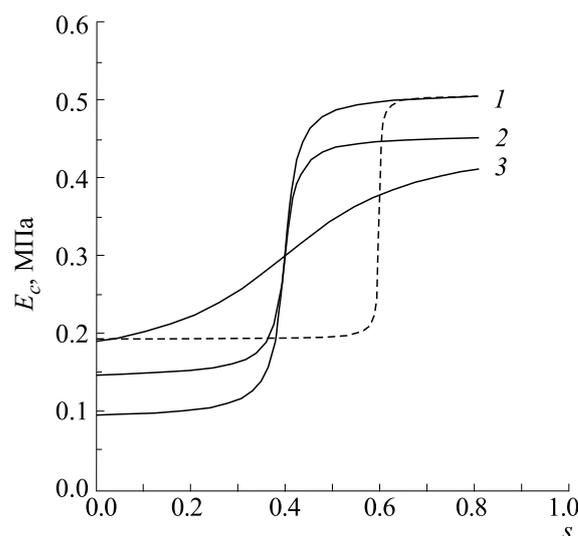
Методика численного решения задачи тонометрии приведена в работе [4].

### СЛУЧАЙ ОСЛАБЛЕНИЯ РОГОВИЦЫ В АПИКАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Рассмотрим сначала случай ослабления роговицы в апикальной области, имеющего место при коррекции миопии. В этом случае будем использовать функцию вида

$$E_c(s) = a_1 + a_2 \arctg[a_3(s - a_4)], \quad (3)$$

поведение которой при различных значениях входящих в нее параметров показано на рис. 2. Такого же вида зависимость использовалась в ра-

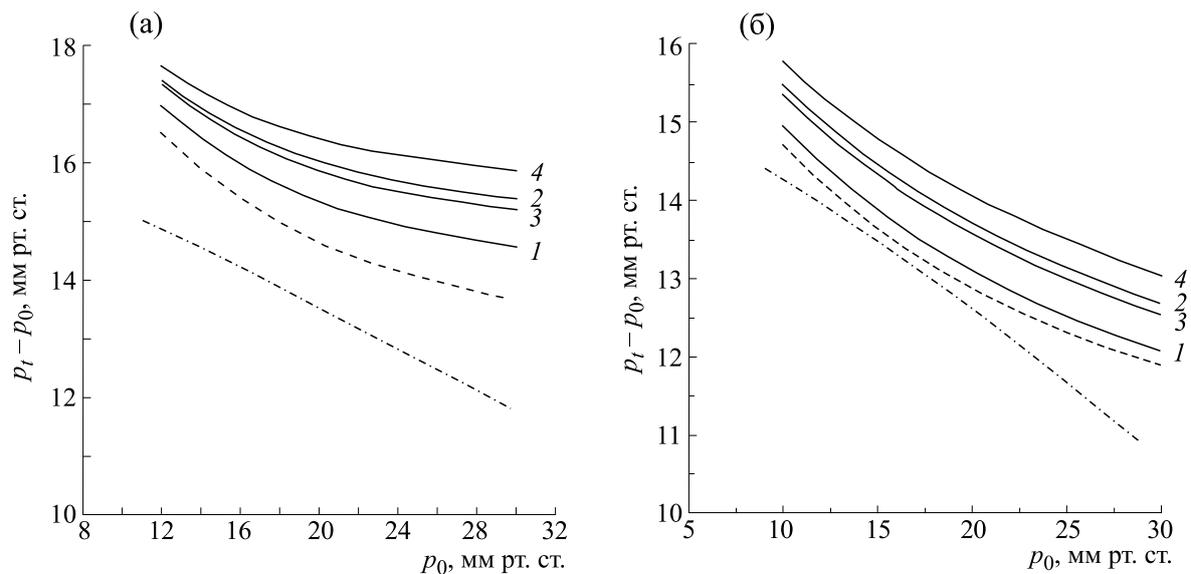


**Рис. 2.** Общий вид зависимостей эффективной жесткости роговицы  $E_c$  от характеризующего положение на роговице безразмерного параметра  $s$  при ослаблении апикальной зоны в первоначально однородной роговице. Кривые 1–3 соответствуют положению границы ослабленной и интактной области в середине меридиональной дуги (центральное положение границы, т.е.  $a_4 = s_*/2 \approx 0,4$ ) при одинаковом среднем значении 0,3 МПа и различной крутизне перехода. Пунктирная кривая изображает практически кусочно-постоянное распределение с нецентральной положением границы.

боте [10] при описании естественной неоднородности, для которой характерно плавное ужесточение роговицы от апикальной области к склере (кривая 3 на рис. 2) [11,13].

Выбирая различные наборы констант  $a_1, a_2, a_3, a_4$ , зависимостью вида (3) можно моделировать разнообразные монотонные распределения. Физически существенные характеристики распределения: среднее интегральное значение жесткости по длине дуги  $\langle E_c \rangle$ ; амплитуда жесткости  $\Delta E_c = E_c(s_*) - E_c(0)$ , т.е. разница между ее значениями на границе со склерой ( $s = s_*$ ) и в апексе ( $s = 0$ ), и крутизна перехода между этими значениями. Для распределений с большой крутизной перехода (например, пунктирная кривая на рис. 2), которые моделируют разделенность роговицы на две выраженные области с разными жесткостями, можно говорить о локализации этого перехода, соответствующей разному расположению границы между названными областями. За эту локализацию, как видно из (3), отвечает параметр  $a_4$ .

Влияние параметров, характеризующих распределение жесткости при одинаковом среднем ее значении  $\langle E_c \rangle = 0,3$  МПа, продемонстрировано зависимостями тонометрической разности  $\Delta p = p_t - p_0$  от истинного давления  $p_0$  (тонометри-



**Рис. 3.** Зависимость тонометрической разности  $p_t - p_0$  от истинного давления  $p_0$  для тонометров Шиотца (а) и Маклакова (б) в случае апикального ослабления жесткости роговицы при центральном положении области перехода ( $a_4 = 0,4$ ) и различной крутизне ее наклона: пунктир - однородная роговица при среднем для здоровых людей значении  $E_c = 0,3$  МПа [4]; штрих-пунктир - расчет по стандартным формулам для тонометра Шиотца [5] и таблицам Нестерова–Вургафта для тонометра Маклакова [14]; 1 –  $\Delta E_c = 0,22$  МПа,  $a_3 = 5$ ; 2 –  $\Delta E_c = 0,3$  МПа,  $a_3 = 50$ ; 3 –  $\Delta E_c = 0,3$  МПа,  $a_3 = 300$ ; 4 –  $\Delta E_c = 0,4$  МПа,  $a = 50$ .

ческими кривыми) на рис. 3 при  $a_4 = 0,4$  (кривые вида 1–3 на рис. 2) и различных значениях  $\Delta E_c$  и  $a_3$ . В таких распределениях средняя жесткость достигается посредине образующей. Показана, в частности, тонометрическая кривая для однородной роговицы с  $E_c = 0,3$  МПа.

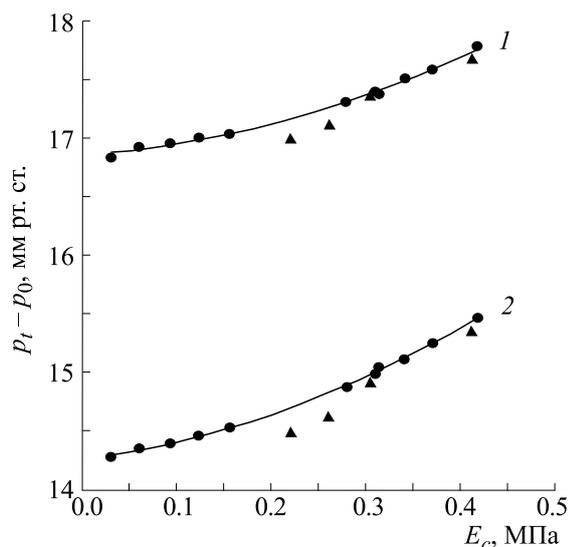
Тонометрическая разность возрастает с увеличением амплитуды неоднородности для обоих тонометров, все более отдаляясь от значения, соответствующего однородной роговице. При этом для тонометра Шиотца кривые «тонометрическая разность – истинное давление» с возрастанием давления заметно расходятся, т.е. различие в  $\Delta p$  растет, увеличиваясь более чем вдвое при изменении  $p_0$  от 12 до 32 мм рт. ст. В случае тонометра Маклакова кривые почти не расходятся.

Отличие тонометрической разности от расчетного значения, получаемого для «средней» роговицы ( $E_c = 0,3$  МПа) без учета неоднородности, достигает для тонометра Шиотца более 2 мм рт. ст. при давлении  $p_0 = 30$  мм рт. ст. и амплитуде  $\Delta E_c = 0,4$  МПа, при малых же давлениях практически пренебрежимо. Для тонометра Маклакова это отличие меньше – порядка 1 мм рт. ст. даже при большой амплитуде  $\Delta E_c = 0,4$  МПа – во всем практически важном диапазоне давлений. Таким образом, использование соотношений, полученных нами ранее для однородной роговицы, при отождествлении жесткости роговицы с ее средним значением может приводить в случае

апикального искусственного ослабления к умеренным ошибкам для тонометра Шиотца и с практической степенью точности правомерно для тонометра Маклакова. Для тонометра Шиотца ошибка становится существенной лишь при больших давлениях и амплитудах неоднородности.

Более значительно отличие в случае тонометра Шиотца от результата, даваемого стандартными формулами расчета (см., например, работу [5]), – результат завывает на 3–4 мм рт. ст. при большой неоднородности, что в особенности заметно при высоких давлениях. Полученные же нами для однородной роговицы расчетные зависимости дают заметно меньшую погрешность. В случае тонометра Маклакова таблицы Нестерова–Вургафта [14] дают для оперированного глаза вполне приемлемые оценки истинного давления при его умеренных значениях, но при давлениях, превышающих 20 мм рт. ст. они определенно завывают результат и использование наших расчетных формул более правомерно.

Крутизна перехода от интактной к ослабленной зоне не оказывает на тонометрическую разность практически никакого влияния: кривые 3 и 2, различающиеся шестикратно большим коэффициентом  $a_3$ , очень близки. Определяющее влияние на тонометрическую разность амплитуды неоднородности в сравнении с параметрами, характеризующими поведение жесткости в зоне перехода от интактной области к ослабленной при ее центральном положении ( $a_4 = 0,4$ ), демонстри-



**Рис. 4.** Влияние амплитуды изменения жесткости роговицы на тонометрическую разность при разных значениях крутизны изменения жесткости: кружки –  $a_2 = 0,01 - 0,135$ ,  $a_3 = 100$ ; треугольники –  $a_2 = 0,1$ ,  $a_3 = 5, 10, 50, 300$ ;  $p_0 = 12$  мм рт.ст.,  $\langle E_c \rangle = 0,3$  МПа; 1 – тонометр Шиотца, 2 – тонометр Маклакова.

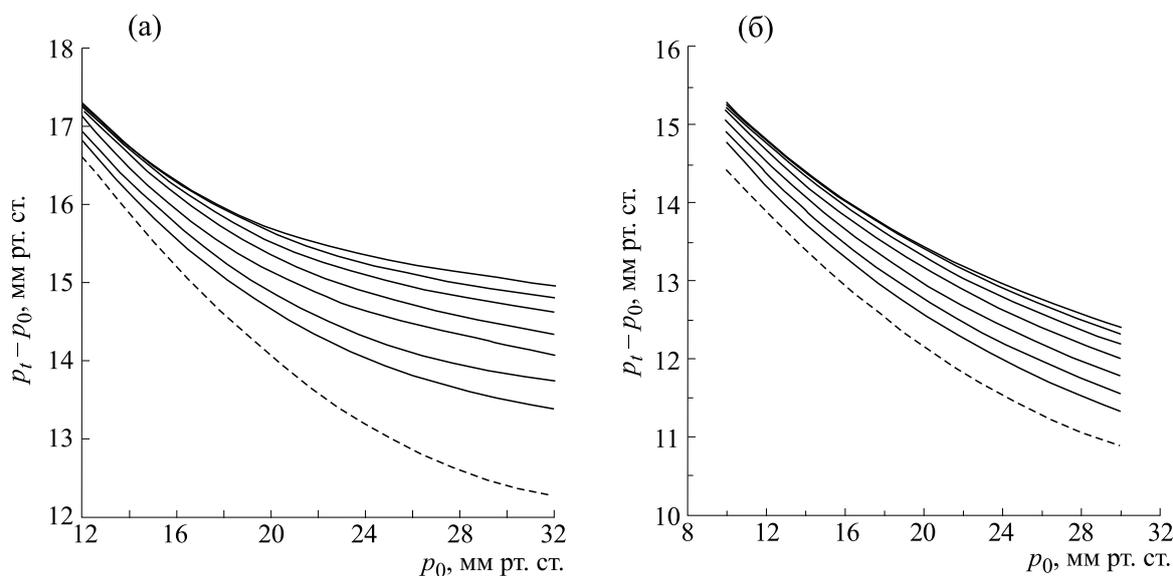
рует рис. 4. Отклонения при разных значениях этих параметров от кривой, представляющей зависимость  $\Delta p = p_t - p_0$  от  $\Delta E_c$ , полученной приближением расчетных точек полиномами, оказываются незначительными.

В дальнейшем рассматриваются только распределения, близкие к кусочно-однородным, а

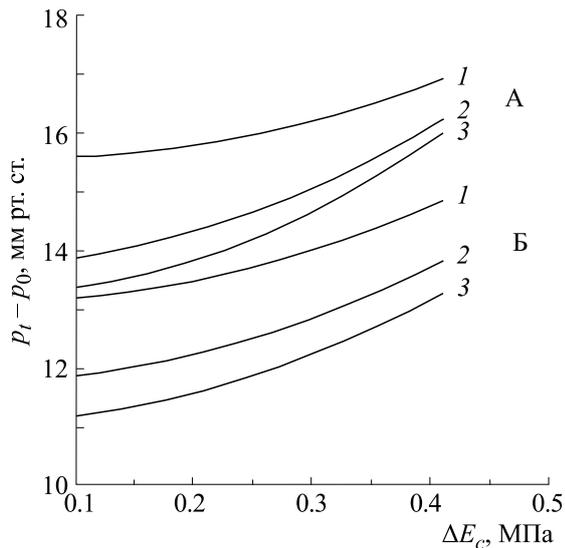
влияние коэффициента  $a_3$ , отвечающего только за крутизну перехода, не обсуждается.

На рис. 5 представлены зависимости тонометрической разности от истинного давления в случае апикального ослабления жесткости роговицы при разных локализациях зоны ослабления, характеризуемых коэффициентом  $a_4$  ( $a_4 = 0,2-0,5$ ), и распределении жесткости, близком к кусочно-постоянному. Интактная жесткость равна 0,5 МПа, а ослабленная – 0,2 МПа (т.е. амплитуда неоднородности равна 0,3 МПа). Тонметрическая разность возрастает с расширением зоны ослабления; незначительно при малых давлениях и заметно для тонометра Шиотца при больших давлениях – порядка 4 мм рт. ст.

Кривые, представленные на рис. 5, характеризуются одинаковой амплитудой неоднородности, но разной средней жесткостью, уменьшающейся с расширением зоны ослабления. Зависимости тонометрической разности от истинного давления при разной средней жесткости (т.е. локализации границы ослабленной и интактной областей) ведут себя сходно с аналогичными зависимостями при разной амплитуде неоднородности (рис. 3). Как уменьшение средней жесткости, так и возрастание амплитуды неоднородности ведут к возрастанию тонометрической разности, т.е. действуют в одном направлении. С уменьшением средней жесткости (возрастанием ширины ослабленной области) возрастает отличие  $\Delta p$  от расчета для интактной роговицы или однородной роговицы с нормальным значением жесткости  $E_c = 0,3$  МПа (последний на рис. 5 не показан).



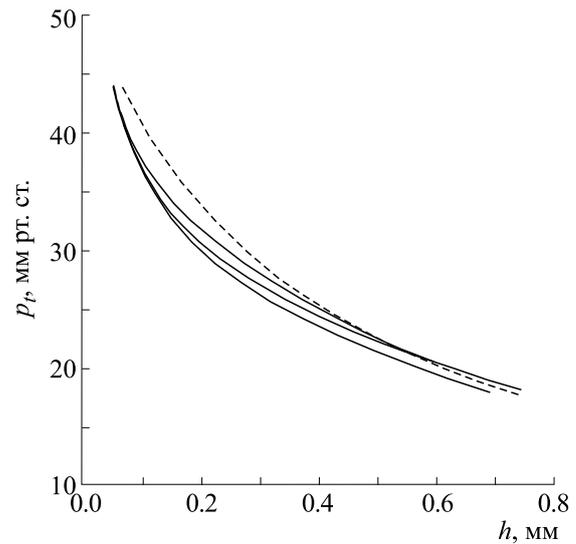
**Рис. 5.** Зависимости тонометрической разности  $p_t - p_0$  от истинного давления  $p_0$  при измерении тонометрами Шиотца (а) и Маклакова (б) в случае апикального ослабления жесткости роговицы при интактной жесткости 0,5 МПа и амплитуде неоднородности 0,3 мм рт. ст.: пунктирная кривая соответствует однородной роговице с  $E_c = 0,5$  МПа; сплошные кривые снизу вверх –  $a_4 = 0,2$  ( $\langle E_c \rangle = 0,47$ ),  $0,25$  ( $\langle E_c \rangle = 0,46$ ),  $0,3$  ( $\langle E_c \rangle = 0,45$ ),  $0,35$  ( $\langle E_c \rangle = 0,436$ ),  $0,4$  ( $\langle E_c \rangle = 0,42$ ),  $0,45$  ( $\langle E_c \rangle = 0,4$ ),  $0,5$  ( $\langle E_c \rangle = 0,38$ ).



**Рис. 6.** Зависимость тонометрической разности от амплитуды жесткости при апикальном ослаблении роговицы с интактным значением  $E_{c0} = 0,5$  МПа при  $a_4 = 0,4$ , рассчитанные для тонометров Шиотца (семейство А) и Маклакова (семейство Б) при  $p_0 = 16$  мм рт. ст. (верхняя кривая каждого семейства),  $p_0 = 24$  мм рт. ст. (средняя кривая) и  $p_0 = 30$  мм рт. ст. (нижняя кривая).

Кривые на рис. 5 расходятся с возрастанием давления теперь для обоих типов тонометра. Для тонометра Шиотца расхождение заметней: при изменении  $p_0$  от 12 до 32 мм рт. ст. тонометрическая разность между значениями, соответствующими  $a_4 = 0,2$  и  $0,5$ , возрастает приблизительно втрое, тогда как для тонометра Маклакова – вдвое. Если бы средняя жесткость после операции была известна, использование зависимостей для однородной роговицы с жесткостью, равной этой средней жесткости, уменьшило бы ошибку (кривые для такой роговицы на рис. 5 лежали бы выше пунктирной кривой и тем выше, чем меньше средняя жесткость).

На рис. 6 представлены зависимости тонометрической разности  $\Delta p$  от амплитуды жесткости  $\Delta E_c$  при одной и той же интактной жесткости  $E_{c0} = 0,5$  МПа, фиксированном положении границы ослабленной зоны ( $a_4=0,4$ ) и трех значениях истинного давления. Видно, что с возрастанием амплитуды жесткости и в этом случае тонометрическая разность  $\Delta p$  растет, и ее значение тем больше, чем ниже давление. Для тонометра Маклакова рост происходит равномерно по  $\Delta E_c$ : кривые  $\Delta p(\Delta E_c)$  приблизительно параллельны; тогда как для тонометра Шиотца с возрастанием амплитуды жесткости кривые сближаются, т.е. с ростом амплитуды жесткости влияние давления на  $\Delta p$  ослабевает.



**Рис. 7.** Зависимость тонометрического давления  $p_t$  от заглаблени  $h$  тонометра Шиотца. Сплошные кривые отображают расчетные зависимости для однородной роговицы при  $E_c = 0,3$  МПа (средняя кривая) и апикально ослабленных роговиц при  $a_2 = 0,1$ ,  $a_3 = 100$ ,  $a_4 = 0,4$ ;  $a_1 = 0,3$  для нижней кривой и  $a_1 = 0,6$  для верхней кривой. Пунктирная кривая соответствует расчету по стандартным формулам.

Если для тонометра Маклакова в рамках предложенной нами модели тонометрическое давление в соответствии с формулой (2) однозначно связано с измеряемой геометрической величиной (радиусом пятна контакта), то для тонометра Шиотца однозначной связи тонометрического давления  $p_t$  с измеряемым заглаблением плунжера  $h$  нет, и влияние неоднородности роговицы на эту связь требует специального исследования. Стандартная же методика предполагает наличие такой (раз и навсегда эмпирически определенной) связи [5].

На рис. 7 проиллюстрированы результаты расчетов зависимости внутриглазного давления от величины заглабления плунжера тонометра Шиотца для разных случаев апикального ослабления роговицы. Представленные кривые соответствуют одинаковым значениям амплитуды неоднородности  $\Delta E_c = 0,34$  МПа при различных значениях других параметров распределения жесткости, включая разную локализацию границы. Для сравнения приведены результаты расчетов для однородной роговицы, имеющей жесткость, близкую к среднему значению неоднородной, и по стандартным формулам. При жесткости роговицы, близкой к нормальной (однородная роговица при  $E_c = 0,3$  МПа и неоднородная роговица  $\langle E_c \rangle = 0,22-0,34$  МПа; нижняя сплошная кривая – из этого семейства), кривые  $p_t(h)$  не различимы графически при высоких тонометриче-

ских давлениях и различаются не более чем на 2 мм рт. ст. при одних и тех же значениях  $h$  в области низких и умеренных давлений (менее 25 мм. рт. ст.). Зависимости  $p_r(h)$  для таких неоднородных роговиц отличаются от зависимостей, получаемых по стандартным формулам (пунктир), несколько сильнее, чем вычисленные нами для однородных роговиц с той же средней жесткостью (средняя из сплошных кривых). Для более жестких роговиц (неоднородная роговица при  $\langle E_c \rangle = 0,52-0,67$  МПа; верхняя сплошная кривая принадлежит к этому семейству) наблюдается графическое совпадение кривых  $p_r(h)$  с аналогичными кривыми для однородных роговиц с той же средней жесткостью во всем исследованном диапазоне давлений.

В целом поправка, вносимая неоднородностью роговицы в определение тонометрического давления по заглублению плунжера, невелика. Вполне приемлемо использование зависимостей, полученных нами для «среднего» глаза [4,5]. Более существенна рассмотренная выше поправка, которую неоднородность вносит в расчет истинного давления по тонометрическому. Однако если использовать стандартную методику, при низких давлениях возможно весьма значительное завышение значения тонометрического давления (ошибка может достигать 4 мм рт. ст.). В сочетании с ошибкой, занижающей тонометрическую разность (см. выше), завышение истинного давления может быть весьма существенным.

### СЛУЧАЙ ОСЛАБЛЕНИЯ РОГОВИЦЫ В ПЕРИФЕРИЧЕСКОЙ ЗОНЕ

Далее рассматривается роговица, ослабленная в кольцевой зоне, примыкающей к границе роговицы со склерой, но не прилегающей к этой границе непосредственно (рис. 8). Было также рассмотрено встречающееся в медицинской практике патологическое ослабление роговицы в области, непосредственно примыкающей к склере. Однако поскольку каких-либо представляющих интерес особенностей для этого случая обнаружено не было, он далее не обсуждается.

Для моделирования ослабления роговицы в кольцевой периферической зоне использовалась зависимость жесткости роговицы от пространственной координаты (длины дуги образующей) следующего общего вида:

$$E_c = a_1 + a_2 \arctg[a_3(s - a_{41})] - a_2 \arctg[a_3(s - a_{42})]. \quad (4)$$

В расчетах, результаты которых представлены на рис. 9 и 10, для входящих в формулу (4) констант были приняты значения  $a_1 = 0,6$  МПа,  $a_2 = 0,12$  МПа,  $a_3 = 300$ ,  $a_{41} = 0,7$ . При выбранном значении  $a_3$  распределение жесткости практически кусочно-постоянно, причем интактная жесткость приблизительно равна  $a_1 = 0,6$  МПа, а в

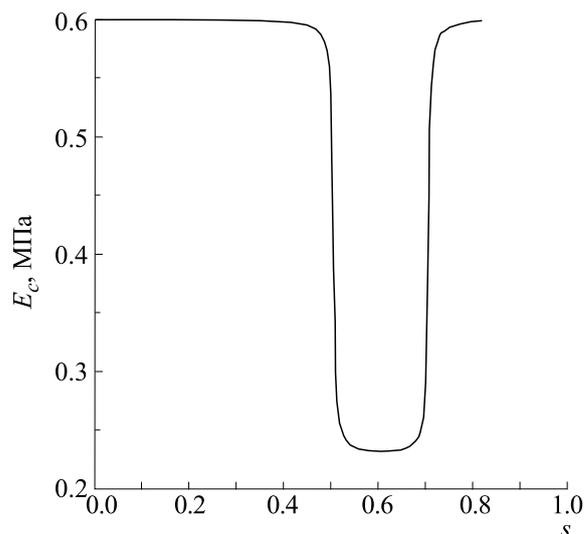


Рис. 8. Общий вид зависимости эффективной жесткости роговицы  $E_c$  от характеризующего положение на роговице безразмерного параметра  $s$  при ослаблении в периферической кольцевой зоне, не прилегающей к склере.

ослабленной области жесткость приблизительно равна 0,23 МПа. Значения  $a_{42}$  варьировались для изучения влияния ширины зоны ослабления жесткости. Значение  $a_{41} > a_{42}$ , характеризующие локализацию внешней границы зоны ослабления, выбрано близким к используемым в офтальмологической практике. Далее для ширины

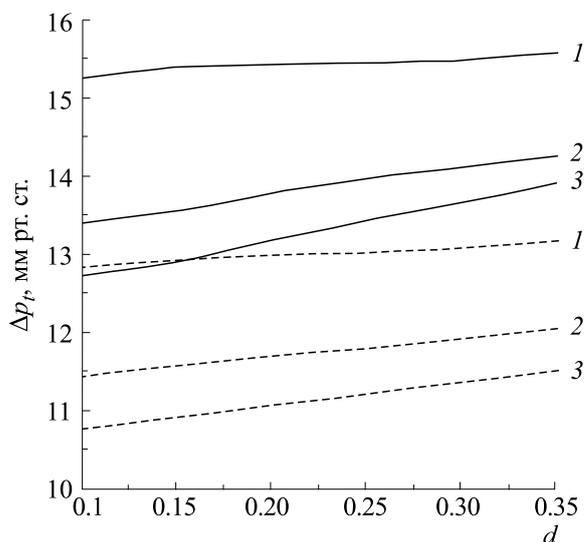
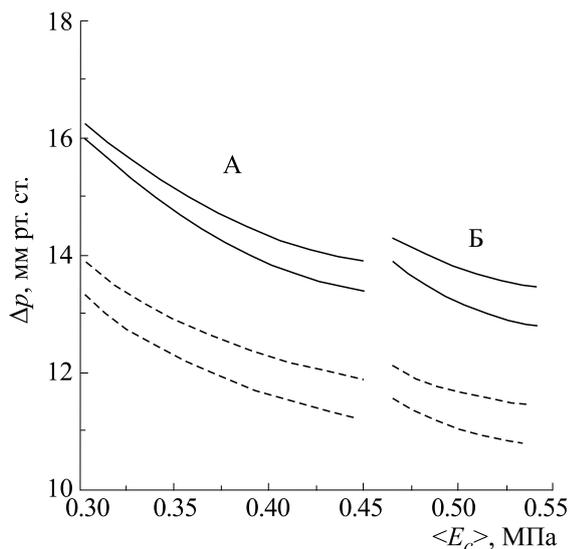


Рис. 9. Зависимость тонометрической разности  $p_t - p_0$  от ширины кольцевой зоны ослабления роговицы в периферической области при измерении тонометрами Шиотца (верхнее семейство сплошных кривых) и Маклакова (нижние пунктирные кривые) при разных значениях истинного давления  $p_0$ : 1 – 16, 2 – 24, 3 – 30 мм рт. ст.



**Рис. 10.** Зависимость тонометрической разности от средней жесткости  $\langle E_c \rangle$  при апикулярном ослаблении роговицы с интактным значением  $E_{c0} = 0,5$  МПа (семейство А) и периферийном ослаблении роговицы с интактным значением  $E_{c0} = 0,6$  МПа (семейство Б): расчеты для тонометров Шиотца (сплошные линии) и Маклакова (пунктирные линии) при  $p_0 = 24$  мм рт. ст. (верхняя кривая каждого семейства) и  $p_0 = 30$  мм рт. ст. (нижняя кривая каждого семейства);  $a_4 = 0,4$  (апикулярное ослабление);  $a_{41} = 0,7$ ,  $a_{42} = 0,45$  (периферийное ослабление).

ослабленной зоны будем использовать обозначение  $d = a_{41} - a_{42}$ .

На рис. 9 показана зависимость тонометрической разности от ширины ослабленного кольца при фиксированном положении его удаленной от апекса границы. Видно, что ширина ослабленной зоны практически не влияет на соотношение между тонометрическим и истинным давлениями при умеренном истинном давлении  $p_0 = 16$  мм рт. ст. Некоторое различие наблюдается только в случае, когда давления достаточно велики (больше 20 мм рт. ст.). Однако оно не слишком значительно — для тонометра Шиотца не более 1 мм рт. ст. (при высоких давлениях), а для тонометра Маклакова еще меньше — порядка или менее 0,5 мм рт. ст. Таким образом, влиянием периферийного ослабления при расчете истинного давления по тонометрическому можно без большой ошибки пренебречь. Поправка к расчету для интактной роговицы может иметь некоторое значение лишь для тонометра Шиотца при больших давлениях.

Во всех случаях следствием увеличения как амплитуды изменения жесткости, так и размеров зоны ослабления, является уменьшение средней жесткости роговицы, которое и оказывается основным характеризующим роговицу параметром, влияющим на тонометрическую разность.

На рис. 10 продемонстрировано влияние средней жесткости роговицы, изменяющейся в ре-

зультате изменения интенсивности ослабления роговицы, на величину тонометрической разности. Данные для периферийного ослабления сравниваются с аналогичными данными для апикулярного ослабления. При фиксированных интактной жесткости и положении границ ослабленной области средняя жесткость  $\langle E_c \rangle$  определяется только интенсивностью ослабления, падая вместе с ростом последней. С уменьшением  $\langle E_c \rangle$  тонометрическая разность во всех случаях растет.

Расчитанные при периферийном ослаблении роговицы зависимости тонометрического давления от заглубления плунжера в тонометре Шиотца оказались еще менее отличающимися от аналогичных зависимостей для однородной роговицы, чем при апикулярном ослаблении. В отличие от случая апикулярного ослабления, отклонения кривых  $p_t(h)$  для ослабленной роговицы от кривых для однородной роговицы с тем же средним значением более заметны для жестких, чем для мягких роговиц, но эти отличия остаются менее 1 мм рт. ст. Таким образом, для периферийного ослабления роговицы уточненный расчет связи  $p_t(h)$  с учетом неоднородности практически не влияет на оценку внутриглазного давления.

Влияние апикулярного и периферийного ослабления на результаты тонометрии по Шиотцу оказалось существенно различным. При апикулярном ослаблении роговицы тонометрическая разность, определяющая пересчет от тонометрического к истинному давлению, возрастает довольно значительно, причем ее величина существенно ближе к значению для однородной роговицы с жесткостью, равной ее среднему значению после операции, чем для интактной роговицы (с дооперационным значением жесткости). В случае же периферийного ослабления тонометрическая разность меняется мало: различие становится сколько-нибудь заметно только при очень больших давлениях. Это означает, что при тонометрии по Шиотцу желательно учитывать характер апикулярного ослабления роговицы (размер ослабленной зоны, объем удаленной ткани). В случае же периферийного ослабления такие оценки в большинстве случаев не нужны. Для тонометрии по Маклакову влияние ослабления в обоих случаях практически не существенно.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Операции, направленные на хирургическую коррекцию зрения, приводят к существенной пространственной неоднородности механических свойств роговицы. Проведены расчеты тонометрии оперированных глаз по Шиотцу и Маклакову для разных типов таких операций: с механическим ослаблением апикулярной области (при коррекции миопии) и кольцевой зоны вблизи границы со склерой (при коррекции гиперметропии). Оказалось, что при апикулярном ослаблении в случае тономет-

рии по Шюццу разность между тонометрическим и истинным давлениями (тонометрическая разность) заметно увеличивается по сравнению с дооперационным состоянием. При этом тонометрическая разность, рассчитанная для однородной роговицы с жесткостью, равной ее среднему значению после операции, существенно ближе к рассчитанной для роговицы с реальной послеоперационной неоднородностью, и в большинстве случаев различием между ними практически можно пренебречь. В случае периферийного ослабления роговицы ситуация иная: тонометрическая разность близка к своему дооперационному значению, и поправки, вносимые неоднородностью, становятся заметными лишь при повышенном внутриглазном давлении. В случае же тонометрии по Маклакову для обеих операций их влияние на тонометрическую разность не слишком велико. Тонометрия по Маклакову, таким образом, оказывается после коррекции миопии предпочтительней. После коррекции гиперметропии можно пользоваться обоими способами тонометрии без учета дополнительных поправок.

Проведенные расчеты можно рассматривать как базу для создания рекомендаций врачам, выполняющим тонометрию оперированного глаза и использующих стандартные соотношения, разработанные для глаз со средней по многим людям жесткостью. Конкретную методику оценки по параметрам операции реальной неоднородности эффективной жесткости и соответствующих изменений в расчете истинного давления еще предстоит разработать. Однако уже сейчас можно сказать, что истинное давление, рассчитанное по тонометрическому с использованием нашей модели для «среднего» глаза, во всех случаях оказалось ближе к полученному с учетом неоднород-

ности, чем определяемое на основе стандартных методик обработки данных тонометрии.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-01-00380).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л. И. Балашевич, *Рефракционная хирургия* (Изд. дом СПбМАПО, СПб., 2002).
2. С. Э. Аветисов, Вестн. офтальмологии, № 1, 3 (2006).
3. С. М. Бауэр, Л. А. Карамшина и А. Б. Качанов, Росс. журн. биомеханики **16** (3), 25 (2012).
4. И. Н. Моисеева и А. А. Штейн, Изв. РАН. Сер. МЖГ, № 5, 3 (2011).
5. И. Н. Моисеева и А. А. Штейн, Росс. журн. биомеханики **19** (3), 243 (2015).
6. I. G. Pallikaris, G. D. Kymionis, H. S. Ginis, et al., Invest. Ophthalmol. Vis. Sci. **46** (2), 409 (2005).
7. *Corneal Biomechanics and Refractive Surgery*, Ed. by F. A. Guarnieri (Springer, Berlin, 2015).
8. P. M. Pinsky and D. V. Datye, J. Biomech. **24** (10), 907 (1991).
9. C. Fernandez, A. M. Niazy, A. M. Kurtz, et al., J. Biomed. Optics **10** (6), 064018 (2005).
10. И. Н. Моисеева и А. А. Штейн, Биофизика **62** (6), 1193 (2017).
11. E. Reichel, D. Miller, E. Blanco, and R. Mastanduno, Ann. Ophthalmol. **21**, 20 (1989).
12. J. Ø. Hjortdal, J. Biomech. **29** (7), 931 (1996).
13. T. J. Shin, R. P. Vito, L. W. Johnson, and B. E. McCarey, J. Biomech. **30** (5), 497 (1997).
14. А. П. Нестеров, Ф. Я. Бунин и Л. А. Кацнельсон, *Внутриглазное давление. Физиология и патология* (Наука, М., 1974).

### Mathematical Modeling of Applanation and Impression Tonometry after Surgical Correction of Vision

I.N. Moiseeva, A.A. Stein, and G.A. Lyubimov

*Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Michurinsky prosp. 1, Moscow, 117899 Russia*

Mathematical modeling of applanation and impression tonometry (by Maklakoff and Schiøtz, respectively) for the eye with artificially induced strong inhomogeneity of the elastic properties of the cornea is performed. Such inhomogeneity arises, in particular, as a result of surgical correction of vision. Corneal weakening is considered either in the apex area (correction of myopia) or in the peripheral annular zone lying close to the sclera (correction of hyperopia). A two-component model of the eyeball is used, in which the cornea is represented by a momentless deformable, linearly elastic surface and the scleral area by an elastic element that responds by changing its volume to changes in intraocular pressure. Within this representation, the mechanical properties of the cornea are characterized by effective stiffness — a parameter that contains both the elastic properties of the cornea material and the cornea thickness. The analysis of the applicability of the relations used in the standard processing of tonometry data, as well as of the simulation results we obtained earlier for the case of a homogeneous cornea, to the operated eyes with significant inhomogeneity of the elastic properties of the cornea is carried out. The corrections caused by heterogeneity turned out to be most significant for the Schiøtz tonometer with apical weakening and fairly high intraocular pressure. In the case of Maklakoff tonometry, the effect of inhomogeneity on the calculation of the true pressure is not too significant for both studied types of cornea weakening.

*Keywords: eye cornea, inhomogeneity of elastic properties, vision correction surgery, Maklakoff tonometry, Schiøtz tonometry, mathematical modeling*