БИОФИЗИКА, 2021, том 66, № 5, с. 1005–1014

БИОФИЗИКА СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

УДК 574.14

К ВОПРОСУ О САМООРГАНИЗАЦИИ ПРОЦЕССОВ ИЗМЕНЕНИЯ ЧИСЛЕННОСТИ НАСЕЛЕНИЯ ЗЕМЛИ

С.О. Гладков

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4

E-mail: sglad51@mail.ru

Поступила в редакцию 21.12.2020 г.
После доработки 25.01.2021 г.
Принята к публикации 26.01.2021 г.

Предложена новая математическая модель из тематики задач «хищник–жертва». Строго аналитически дан вывод системы нелинейных дифференциальных уравнений, качественно правильно описывающих динамику поверхностной концентрации населения Земли с учетом основных факторов «обрезания», влияющих на ее пространственно-временную эволюцию. С помощью предложенной модели показано, что вначале численность населения Земли имеет тенденцию к возрастанию, а затем, в силу открытости системы, после достижения максимума, начинает убывать. Этот факт подтвержден строгим математическим и численным расчетом.

Ключевые слова: самоорганизация и саморегуляция, модель «хищник–жертва», нелинейная динамика, концентрация популяций.

DOI: 10.31857/S0006302921050203

Задача, о которой пойдет речь, относится к общим проблемам теоретической биофизики, главная тенденция которых имеет ярко выраженное направление к области математических проблем, характеризуемых вполне понятной терминологией «хищник–жертва».

Подобный тип задач изучается уже примерно в течение двух столетий, и одними из самых первых работ в этом направлении по праву считаются работы Г. Ферхюльста [1–3], в которых было предложено модельное описание эволюционного развития определенного класса индивидов. В рамках этой модели были учтены как естественный прирост популяции, так и ее естественная убыль из-за гибели вследствие вероятной встречи с хищниками.

К подобного рода проблемам относится и задача, связанная с выяснением характерной динамики развития численности населения Земли в условиях учета разнообразных естественных и искусственных факторов, обрезающих демографический рост нашей популяции. К ним можно отнести, например, такие понятия, как интеллектуальный фактор, учитывающий развитие науки, техники и технологий и приведший к «зеленой революции» и к «индустриальному птицеводству», а также социально-биологический фактор, породивший демографический переход, а именно быстрое снижение рождаемости в индустриальном обществе до уровня простого замещения поколений. Кроме того, не стоит сбрасывать со счетов и гендерный фактор, обуславливающий рост частично бесплодного процента людей в человеческой популяции, связанный с психическими заболеваниями и ослаблением интеллекта, вызываемыми чисто искусственным путем. Отмеченные факторы напрямую связаны с мыслительным процессом, но не инстинктивным, как у животных. К примеру, если взять гендерный фактор, внесенный в сознание человечества искусственно или иначе, насильственно, то в этом плане он никак уже не может считаться естественным.

Главной целью настоящего сообщения является доказательство того, что рост человечества является саморегулируемым и самоорганизованным (пренебрегая интеллектуально создаваемыми насильственными факторами и исключая также инопланетное вмешательство) процессом, который диктуется лишь условиями хаоса, естественными при развитии любой биологической системы (см. Приложение).

Здесь необходимо понимать, что Земля представляет собой уникальный объект для изучения развития популяций в экологически открытой и эволюционирующей по своим законам системе, которая изначально была организована таким образом, что в процессе многовековой эволюции на ней постепенно стала появляться биологическая жизнь. В этой связи вполне прозрачным, на наш взгляд, является такое понятие, как эволюционное развитие человечества в результате естественного размножения. Поэтому сразу же возникает и вопрос: а почему рост человечества должен длиться до бесконечности? Ответ кроется в другом встречном вопросе, а почему никого не беспокоит, например, факт того, что, скажем, популяция волков не может расти до бесконечности? Совершенно понятно, что человек, вмешиваясь в Природу, сам начинает их уничтожение, однако, это действие вполне равносильно такому понятию, как насилие. В этой связи становится абсолютно понятным, что если пустить развитие все тех же волков на самотек, не вмешиваясь в их жизнь, то их популяция, достигнув определенного порога, дальше расти не будет. Связано же это будет с тем, что даже при их миграции в другие места, где более благоприятные условия, они не смогут выжить, поскольку и на новом месте будет действовать естественный, подчеркнем (а не насильственный благодаря кому-то), «обрезающий фактор». Переселение на следующее новое место обитания не улучшит ситуацию, а приведет к тому же эффекту, но только с еще большей скоростью ухода из нее ввиду сильно возросшей их численности. То есть, в конце концов, они начнут уничтожать себя сами, что является вполне логичным, например, для такой популяции, как крысы. Совершенно понятно, что уменьшение их популяции будет происходить ровно до такого критического уровня, пока их количество не выйдет на ту предельную концентрацию, которая позволит им балансировать на грани жизни и смерти, т.е. выживать. Этот абстрактный пример представляет собой идеальную полностью замкнутую и изолированную биологическую систему. В реальности, однако, идеальных систем не бывает, а потому любая биосистема является открытой, поскольку помимо волков существует и масса других животных и организмов, которые также размножаются и которые могли бы служить им, например, пищей. Ясно поэтому, что сколько бы организмов на Земле мы не рассматривали, у каждого из них имеются свои естественные враги, регулирующие численность собственной популяции. То же самое относится и к человеку как относительно разумному примату. В процессе своего размножения, способствующего перенаселенности численности любой популяции, с необходимостью происходит объективное включение каких-либо естественных, подчеркиваем, а не искусственных факторов, обрезающих» их размножение.

Заметим также, что, помимо уже упомянутых чуть выше искусственных факторов (интеллектуальный или гендерный), к ним следует добавить и вполне объективные факторы, например, такие, как, скажем, оживание различных дремавших до определенного момента времени микроорганизмов и вирусов, замороженных в арктических льдах и оттаявших благодаря потеплению климата Земли.

Если придерживаться несостоятельной (как сейчас говорится) теории Т. Мальтуса, в которой основным «тормозящим» фактором роста численности населения считалось ограниченное количество пищи, то надо заметить, что в те времена – в XVIII веке – это предположение было основано на утверждении, что народонаселение растет в геометрической прогрессии, а прирост пищи – в арифметической. Действительно, с этим можно было бы согласиться, но только с существенной поправкой, что речь об этом шла в эпоху сильно отсталого в плане интеллектуального развития малообразованного общества. Придерживаясь современного уровня развития сельскохозяйственной науки, можно абсолютно уверенно утверждать, что вполне реально добиться, чтобы количество произведенной пищи могло также расти в геометрической прогрессии, пропорционально росту народонаселения. Другое дело, что для этого необходимо сильно напрягаться, что не всем по вкусу, и куда проще ввести искусственно обрезающие рост популяций факторы в виде, например, гендерных.

В этой связи еще раз подчеркну, что в Приложении строго математически обоснована общая биологическая модель, придерживаясь которой, в частных случаях получаются и уравнение Вольтерра–Лотки, и Ферхюльста, и наша система уравнений (1), исследованию которой и посвящена настоящая статья.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Когда речь идет о классической задаче Ферхюльста, в нее закладывается лишь простейшая формулировка модели без учета таких понятий, как, например, естественная или принудительная (по неосторожности) гибель хищников [4, 5], а также неоднородности распределения их численности по территории парка и множества других также вполне объективных естественных факторов.

В более сложной задаче, которая была сформулирована Вольтерра и Лоткой [6, 7], авторами был учтен ряд новых физических параметров, качественно влияющих на поведение всей системы в целом и, в частности, изменение концентрации самих хищников.

Более общая теория была предложена в уже совсем свежей в этом направлении чисто математической статье [8], где авторы привели подробный анализ обобщенного уравнения Вольтерра–Лотки (см. также работы близкого направления [9–27]) и доказали ряд теорем, связанных с этим вопросом.

Далее мы приведем подробное исследование хаотического роста народонаселения Земли, рассматривая его на языке только двух параметров – плотности популяции n и обрезающего их рост фактора m, используя уже другую математическую модель в отличие от двух упомянутых. При этом если придерживаться современного представления о факторах сдерживания скорости роста популяций, и ввести в обрезающий фактор помимо пищевого дефицита все искусственные (т.е. гендерные и техногенные), то такой параметр будет иметь максимально возможное значение. Именно поэтому далее мы будем рассматривать только нижнюю границу этого параметра, считая, что его роль сводится только к пищевому фактору. Как увидим, даже это минимальное значение позволяет утверждать, что в силу хаотического поведения энтропии общества в целом будет иметь место и условие максимума численности населения, которое, благодаря объективным законам теории хаоса, затем неминуемо начнет спадать. Этот спад, подчеркнем, будет продиктован уменьшением энтропии, связанным с перенаселенностью, включающим естественные факторы обрезания ее численности, о которых человечество пока может даже и не догадываться.

Прежде, чем приступать к формальной стороне, касающейся строгого анализа обозначенной выше проблемы, необходимо остановиться на некоторых основных понятиях и определениях, без которых все нижеследующее изложение может оказаться малопонятным.

Будем предполагать, что распределение населения по поверхности Земли имеет однородный и равномерный характер. При этом, как кажется вполне очевидным, подобное предположение никак не должно повлиять на суть решаемой задачи. Помимо этого, будем также считать, что скорость роста численности населения α представляет собой вполне естественный природный фактор. Обрезающий фактор, роль которого мы отводим жертве, мы обозначим буквой m.

Пусть скорость убывания параметра m характеризуется некоторой постоянной величиной γ, а безразмерный параметр λ обозначает долю ее характерной убыли, в определение которой мы включим всевозможные субъективные и объективные факторы, влияющие на нее. Тогда систему динамических уравнений, описывающих естественное эволюционное развитие численности населения, можно записать в следующем вполне понятном с качественной точки зрения виде (подробности вывода см. в Приложении):

$$\begin{cases} \dot{n} = \alpha n - \dfrac{\beta(t)}{m} n^2, \\ \dot{m} = -\gamma m n + \lambda \varepsilon m^{\lambda+1}, \end{cases} \tag{1}$$

где $\beta(t)$ – непрерывно меняющийся от времени параметр. Он имеет вероятностный смысл и является «тормозящим» рост популяций фактором (наподобие похожего слагаемого в уравнении Ферхюльста, где этот коэффициент считался постоянным). Обрезающий фактор в знаменателе верхнего уравнения этой системы также введен не случайно. Чисто качественно он ведет к тому, что при его резком уменьшении должно произойти и резкое уменьшение численности населения. Что касается последнего (но не по значению) параметра ε, то он характеризует собой медленную скорость возможного увеличения обрезающего фактора.

Под сказанным подразумевается следующее. Достигнув определенного максимального значения, численность населения начнет свое стремительное убывание из-за начинающегося уменьшения глобальной энтропии, а именно благодаря включению обрезающих факторов. Например, это может быть извержение вулкана Йеллоустон или, скажем, сдвиг литосферных плит, который породит цунами высотой в несколько десятков метров, сметающий целые континенты, еще космическое излучение, а также множество других более мелких природных катаклизмов, включающихся по мере эволюции самой Земли, свойственных любой открытой системе.

Но вот что интересно. Как бы человек не пытался навредить Природе, что является неоспоримым и объективно доказанным фактором (кстати, также способствующим уменьшению численности населения), регулирование популяции Земли является неотъемлемым элементом существования самой нашей Планеты. Подобное утверждение базируется на невозможности нарушения основного закона эволюции, связанного с хаотическим ростом глобальной энтропии и стремлении системы к хаосу, фактически означающее гибель всего живого. Отмеченный факт бесспорно приведет к изменению климатических условий, приводящих, в свою очередь, и к иному локальному перераспределению введенного нами параметра m.

Например, какие-то континенты могут уйти под воду, где-то активируются вулканы, что может породить, например, нашествие летучих мышей, а вместе с ними и каких-то эпидемий, что в целом и приведет, причем естественным образом, к уменьшению численности народонаселения. Формально это и заложено в коэффициенте $\beta(t)$ системы уравнений (1), а также в коэффициенте ε.

Подобные факторы продиктованы и вполне объективной эволюцией глобальной энтропии S

(она составляет порядка 16 миллиардов лет, пока будет иметь место вращение Земли вокруг своей оси, связанное с неостывшим пока ядром), обусловленной принципом самоорганизации нашего макромира.

Соответствующие уравнения, которые можно представить в виде (1), нетрудно получить из необходимого и достаточного (при решении синергетических проблем) условия существования экстремума некоторого функционала $\Phi\{m,n\}$, исходя из равенства $\Phi = 0$ (похожий принцип был использован, например, в работах [28, 29]).

АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ (1)

Вернемся теперь к формальному анализу уравнений (1) и введем следующие безразмерные концентрации:

$$x = \frac{n}{n_0}, \ y = \frac{m}{m_0}, \tag{2}$$

где n_0 и m_0 – средние значения концентраций индивидов и обрезающего фактора соответственно.

Что касается концентрации n_0, ее можно определить естественным образом, как $n_0 = N/S$, где $N = 7\,000\,000\,000$ – современное население Земли, $S = S_0/6$ – площадь поверхности суши, где $S_0 = 4\pi R^2$ – площадь поверхности Земли, R – ее радиус. Что касается конкретной величины среднего значения обрезающего рост народонаселения фактора m_0, то чисто условно его можно ввести в виде некоторой средней наименьшей величины, позволяющей человечеству выжить. Это наименьшее значение мы будем характеризовать в виде дроби $m_0 = M/N$, где под параметром M мы будем подразумевать только количество общей пищи на Земле, опустив такие важнейшие факторы, как гендерный фактор и индустриальный. Подобное введение нам кажется вполне объективным, поскольку при таком описании мы получим оправданно реальную картину, описывающую взаимодействие обоих параметров n и m при условии, что значение m – наименьшее. Это просто означает, что всегда можно сделать корректировку условия $m_0 < m$, перейдя к искусственно увеличенному значению m. Именно в рамках такого представления, если исходить из разумных предположений чисто феноменологически, считая, например, что суточная норма потребления пищи (минимальное значение m), позволяющая выжить, определяется минимальным значением $m_0 = 1$ кг/сутки.

В итоге систему уравнений (1) можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \dfrac{\beta(t)}{y} x^2, \\ \dot{y} = -\gamma x y + \lambda \varepsilon y^{\lambda+1}. \end{cases} \tag{3}$$

В том случае, если мы хотим учесть неоднородность распределения параметров x и y по поверхности Земли, уравнения (3) следует переписать с учетом неоднородности концентраций в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = D_1 \Delta x + \alpha x - \dfrac{\beta(t)}{y} x^2, \\ \dot{y} = D_2 \Delta y - \gamma x y + \lambda \varepsilon y^{\lambda+1}. \end{cases} \tag{4}$$

где коэффициенты $D_{1,2}$ обладают по своему смыслу размерностью коэффициентов диффузии, а в представлении популяций просто учитывают ее миграцию, $\boldsymbol{\Delta}_2$ – двухмерный оператор Лапласа, который на сферической поверхности с фиксированным радиусом R и в сферической системе координат имеет обычный вид

$$\Delta_2 = \frac{1}{R^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right], \tag{5}$$

где θ и φ по своему смыслу представляют собой соответственно азимутальный и полярный углы, которые можно «привязать» к параллелям и меридианам Земли, а центр сферической системы координат поместить в ее центре.

Найдем вначале стационарное решение системы уравнений (3) в однородном случае, считая, что $D_1 = D_2 = 0$, а

$$\beta(t) = \beta = \text{const}. \tag{6}$$

В результате приходим к следующей системе нелинейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \alpha\overline{x} - \dfrac{\beta(t)}{\overline{y}} \overline{x}^2 = 0, \\ \gamma\overline{xy} - \lambda\varepsilon\overline{y}^{\lambda+1} = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{cases} \overline{x} = \dfrac{\alpha}{\beta}\overline{y} = \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\lambda}{1-\lambda}}\left(\dfrac{\lambda\varepsilon}{\gamma}\right)^{\frac{1}{1-\lambda}}, \\ \overline{y} = \left(\dfrac{\lambda\varepsilon\beta}{\alpha\gamma}\right)^{\frac{1}{1-\lambda}}. \end{cases} \tag{8}$$

Чтобы численно оценить обе эти величины, мы можем, исходя из разумных предположений, задать все входящие в решение (6) параметры. Действительно, поскольку по своему смыслу все они малы (эта малость диктуется малостью безразмерных концентраций численности населения x и наименьшей доли обрезающего фактора y благодаря огромной площади поверхности Земли), то, как видно из уравнений (3), если исходить из соображений размерности, вполне можно считать, что $\alpha = m_0/t_0$, $\beta = n_0/t_0$, $\gamma = n_0/t_1$.

Стоит заметить, что за единицу времени здесь удобно выбрать не традиционные секунды, как это обычно делается в физических задачах, а сутки. Полагая поэтому, что $\alpha = 10^{-2}$ кг/км^2·сут, $\beta = 10^{-5}$ кг/км^2·сут, $\gamma = 10^{-6}$ кг/км^2 сут, $\lambda = 10^{-2}$, $\varepsilon = 10^{-2}$ (СИ, км, сут), найдем

$$\bar{x} \approx 10^2,\ \bar{y} = 0{,}1. \quad (9)$$

В пересчете на размерные величины отсюда получаются такие вполне реальные предельные значения:

$$\bar{n} \approx 10^2 n_0 \left(\frac{1}{\text{км}^2}\right),\ \bar{m} = 10^2 m_0\ \frac{\text{кг}}{\text{км}^2\ \text{сут}}. \quad (10)$$

Поскольку радиус Земли $R \approx 6400$ км, то для средней плотности населения получаем

$$n_0 = N/S = 2.5{\cdot}10^2\ \text{км}^{-2}. \quad (11)$$

В настоящее время это составляет примерно 250 человек на квадратный километр, что и позволило нам спрогнозировать выбор приведенных выше численных значений параметров. Подставляя величину (11) в выражение (10), находим, что предельно допустимая средняя плотность населения на квадратный километр может составлять 25000 человек.

Поскольку же полная поверхность суши Земли есть $S_0 = \dfrac{S}{6} = \dfrac{2\pi}{3} R^2 \approx 8 \cdot 10^7\text{км}^2$, то, согласно выражению (10), для наименьшего значения обрезающего фактора мы приходим к следующей предельной оценке

$$\mu = \bar{m} S = 8 \cdot 10^9 m_0\ \frac{\text{кг}}{\text{сут}}. \quad (12)$$

Для предельного же количества населения Земли найдем, согласно выражению (10):

$$\bar{N} = \bar{x} S = 8 \cdot 10^{11}\ \text{человек}. \quad (13)$$

Вполне разумным нам кажется предположение, что $m_0 = 2.5$.

Поделив выражение (12) на выражение (13), получим

$$q = \frac{\mu}{\bar{N}} = 2{,}5 \cdot 10^{-2}\ \frac{\text{кг}}{\text{сут}{\times}\text{чел}}, \quad (14)$$

Приведенная цифра говорит о том, что для предельной численности населения Земли в 800 миллиардов человек суточная норма потребления еды (а точнее, фактор обрезания, измеряемый в граммах), имеющая значение в 25 г, фактически означает вымирание.

Это значит, что если придерживаться критерия жизни, когда доля потребления должна составлять ограничение в виде среднего значения

$$\bar{q} = 1\ \frac{\text{кг}}{\text{сут}\ {\times}\text{чел}}, \quad (15)$$

то приходим к той предельной цифре численности, которая допустима и составляет, очевидно, величину

$$N_{\text{пред}} = 2 \cdot 10^{10}\ \text{человек}. \quad (16)$$

Предельное число (16) указывает, что на каждом квадратном километре вполне комфортно может проживать примерно 750 человек.

И еще: согласно официальной статистике [30] каждые сутки на Земле рождается в среднем 433382 ребенка, а умирает естественным путем или суммарно погибает примерно 150000 человек.

Как видим, разность прироста народонаселения не так велика, а потому достичь значения в 20 миллиардов человек реально можно примерно через 120 лет. Совершенно понятно, что за такой промежуток времени ввиду непредсказуемости человеческой психики и общих законов Природы может произойти все что угодно.

Что же касается описания временного хода событий, которые находятся в полном соответствии с приведенными выше величинами (11)–(16), то нам следует вернуться к общим однородным уравнениям (3) и для случаев, когда $\beta(t) = \beta = \text{const}$ и $\beta = \beta(t)$ (эту зависимость мы конкретизируем), провести численное интегрирование полученной системы уравнений.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ (1)

В первом случае, когда $\beta(t) = \beta = \text{const}$, зависимость $y(x)$ показана на рис. 1.

Во втором случае, если выбрать, например, рост функции в виде степенного закона $\beta(t) = \beta_0 \tau^{\kappa}$, где константы β_0 и k мы задаем, зависимость $y(x)$ при $k = 1$ показана на рис. 2.

Как видно из рис. 1 и 2, поведение популяции и обрезающий фактор меняются во времени довольно хаотическим образом, что вполне естественно, поскольку равномерность развития каких-либо событий нельзя уложить в рамки теории хаоса, когда речь заходит о таком сложном понятии, как изменение энтропии (см. Приложение).

Главный вывод из всего того, что было сейчас нами изложено, заключается в том, что нет ни малейших оснований и повода вмешиваться в естественный ход развития жизни на Земле и пытаться предпринять какие-либо шаги с целью принудительного регулирования роста народонаселения на нашей планете.

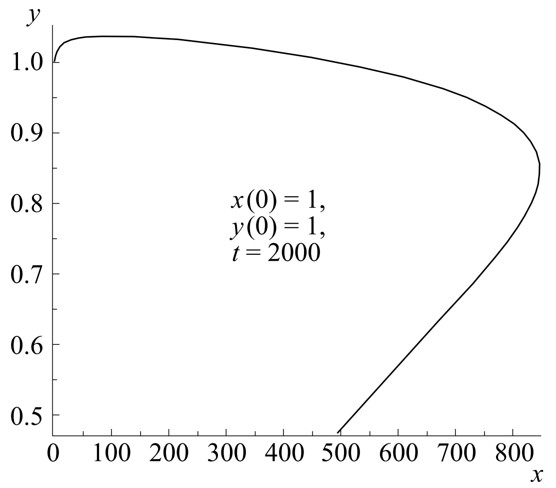

Рис. 1. Эволюция численности населения $x(y)$ при условии, что вероятность действия обрезающего фактора β постоянна.

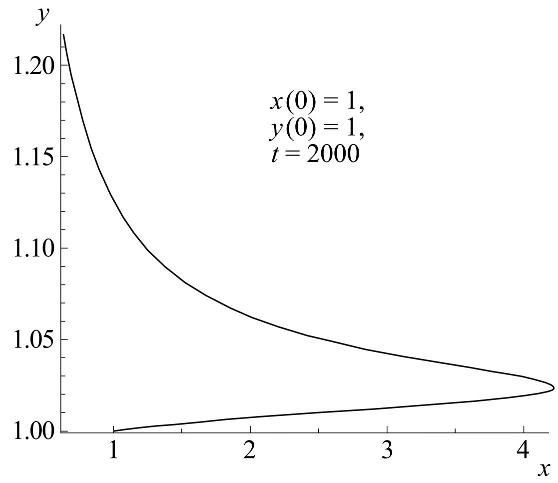

Рис. 2. Эволюционное развитие численности населения при условии, что вероятность изменения обрезающего фактора β убывает со временем по гиперболическому закону.

Как видно из обоих рисунков, численность популяции в зависимости от обрезающего фактора вначале ведет к ее росту, а впоследствии всегда будет сопровождаться ее спадом, что изначально уже и было заложено в общие свойства энтропии.

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ (3)

Следуя общим принципам теории обыкновенных дифференциальных уравнений [31], легко провести линеаризацию системы уравнений (3) вблизи стационарной точки $M_0 = M(\bar{x}, \bar{y})$. В результате получаем следующие линейные уравнения

$$\begin{cases} \dot{x} = -\alpha(x - \bar{x}) + \dfrac{\alpha^2}{\beta}(y - \bar{y}), \\ \dot{y} = -\gamma\bar{y}(x - \bar{x}) + \lambda\gamma\bar{x}(y - \bar{y}). \end{cases} \tag{17}$$

Решение системы (17) элементарно находится, в результате мы получаем

$$\begin{cases} x = \bar{x} + C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t}, \\ y = \bar{y} + \dfrac{\beta}{\alpha^2}\left[C_1\left(\alpha + \dfrac{\beta k_1}{\alpha^2}\right)e^{k_1 t} + C_2\left(\alpha + \dfrac{\beta k_2}{\alpha^2}\right)e^{k_2 t}\right], \end{cases} \tag{18}$$

где корни характеристического уравнения есть

$$k_{1,2} = \frac{\lambda\gamma\bar{x} - \alpha}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\lambda\gamma\bar{x} - \alpha}{2}\right)^2 - \alpha\gamma\bar{x}(1 - \lambda)}. \tag{19}$$

Как видно из уравнения (19), при различных соотношениях между входящими в ответ параметрами, решение системы (18) может представлять собой узлы, седловые точки, а также аттракторы и репеллеры.

При этом последние могут возникать только в том случае, если подкоренное выражение в уравнении (19) отрицательно. В результате это приводит к притягивающей спирали (аттрактор) или отталкивающей (репеллер).

В соответствии с общими постулатами синергетики эволюция области фазового пространства ω описывается уравнением $\dot{\omega} = \omega \operatorname{div}\mathbf{v}$, где $\mathbf{v}$ – обобщенная скорость, определяемая как вектор с компонентами $\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y})$.

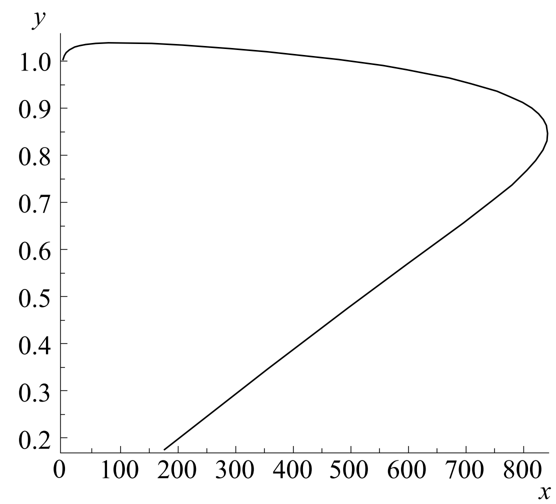

Рис. 3. Эволюция численности населения x(y) согласно уравнениям (П10) при условии, что вероятность действия обрезающего фактора β постоянна. Здесь анализ проведен для начальных условий $x(0) = 1$, $y(0) = 1$, и до момента времени $t = 8000$. Пренебрежение двумя последними слагаемыми в нижнем уравнении системы (П10) вообще не влияет на поведение зависимости x(y) и приводит к укороченной системе уравнений (1), которая и была исследована в статье.

Из системы уравнений (17) видно, что $\operatorname{div}\mathbf{v} = \lambda\gamma\bar{x} - \alpha$. Это означает, что при $\alpha > \lambda\gamma\bar{x}$ область фазовой плоскости $\omega = \Delta x \Delta y$ сжимается и представляет собой типичное притягивающее множество, которое является устойчивым и не будет реагировать ни на какие внешние малые возмущения типа техногенных или гендерных, которые просто ускоряют уменьшение численности населения, не влияя качественно на ее естественное поведение в целом (см. рис. 1 и 2 и уравнения (1) и (П9)).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как было показано выше, именно благодаря хаотическому характеру развития общества его глобальная энтропия должна вести себя подобающим образом в соответствии с общими законами эволюции, неотъемлемыми от природы самой Земли. Поскольку $\dot{S} \sim \dot{n}$, то при приближении энтропии к стационарной точке она приближается к максимуму, как и численность населения. При уходе от равновесия энтропия начнет убывать, «захватывая» за собой и n. В статье это было строго математически доказано с помощью численного решения полученных уравнений, описывающих естественный ход развития народонаселения Земли. Все это возможно лишь благодаря открытости нашей биологической системы и объективному (подчеркиваю) ходу ее развития. Это становится вполне понятным, если вспомнить основные принципы теории детерминированного хаоса, когда система на каком-то промежутке времени ведет себя хаотическим образом, а затем под влиянием некоторых вполне определенных факторов «скатывается» в локальную область стационарной точки. Затем история повторяется. Точно по таким же законам должны вести себя абсолютно все популяции Земли, в том числе и человеческая.

Итак,

1) Предложена вполне объективная биологическая модель из серии задач по теме «хищник–жертва»;

2) Проведен аналитический и численный анализ полученных феноменологическим путем уравнений, которые показали, что эволюция численности населения при минимальном значении обрезающего параметра должна иметь естественный неравномерный и хаотический характер развития (см. рис. 1, 2);

3) Показано, что предельно допустимое значение численности населения Земли может составить примерно 20 миллиардов человек, а затем таким же вполне естественным образом начнет спадать.

ПРИЛОЖЕНИЕ

С целью подтверждения корректности уравнений (1) мы воспользуемся общей методикой вывода основных физических уравнений, в которых будут учтены некоторые специфические особенности эволюционного развития биосистем. С этой целью удобно воспользоваться приемом, который основан на использовании закона сохранения полной мощности исследуемой системы и был успешно применен при решении ряда задач (см., например, работы [32–37]). По некоторой аналогии с механическими задачами мы рассмотрим задачу из серии задач «хищник–жертва» на языке энергетической и диссипативной функций, которые для биофизических проблем следует воспринимать, конечно, не в буквальном смысле, а чисто условно. Как известно [38], кинетическую энергию гидродинамического потока можно представить в виде $\varepsilon = \frac{1}{2}\int\limits_V \rho\, v^2\, dV$, где ρ – плотность, а v – скорость жидкости. В рассматриваемой нами модели нельзя ввести энергию популяций, однако записать прототип энергии, как в гидродинамике, мы имеем полное право, введя в рассмотрение некоторую квадратичную форму по концентрации индивидов n и обрезающего фактора m. Обозначая ее, как и в физических задачах через E, с очевидностью можно записать, что

$$E = \frac{1}{2}\int\limits_\Sigma \left[C_1(m)\,n^2 + C_2(n)\,m^2\right] d\sigma, \qquad (\text{П}1)$$

где $C_1(n)$ и $C_2(m)$ – две существенно положительные функции от соответствующих аргументов, Σ – поверхность Земли, а $d\sigma$ – ее элемент поверхности.

Что касается диссипативной функции $\dot{Q}$, то по своему смыслу она представляет собой производство энтропии в единицу времени [39] и в любых физических процессах является величиной существенно положительной.

В случае биологических систем этот принцип следует применять с осторожностью, исходя из объективного фактора того, что процесс изменения количества популяций носит хаотический характер, а потому в случае открытой системы производство энтропии в единицу времени $\dot{S}$ не может все время оставаться существенно положительной величиной, поскольку на определенных промежутках времени должна подчиняться двум взаимоисключающим друг друга условиям: $\dot{S} > 0$ и $\dot{S} < 0$.

Это означает, что диссипативную функцию для формального описания любого скалярного хаоса мы имеем право представить в виде следующей условно положительной комбинации (см. работу [34]):

$$\dot{S} \sim \dot{Q} = \int_{\Sigma} \left[\Gamma_1(n,m)\, m^2 - \Gamma_2(n,m)\, n^2 + \Gamma_3 n^3 + \Gamma_4 n m^2 + \Gamma_5 m n^2 \right] d\sigma, \tag{П2}$$

где $\Gamma_{1,2}(n,m)$ – функции от концентраций n и m, имеющих соответственно смысл обобщенного декремента и инкремента, а $\Gamma_{3,4,5}(n,m)$ – в общем случае также функции от n и m, но при этом любого знака. Кроме того всегда $n > 0$ и $m > 0$. Тот факт, что в определениях (П1) и (П2) фигурирует довольно много свободных параметров, не должно вызывать особого удивления, поскольку все они в предельных частных случаях либо выражаются друг через друга, либо оказываются равными нулю.

Согласно общему принципу получения любых уравнений динамики, мы имеем право исходить из условия $\dot{E} + \dot{Q} = 0$ (примерами того являются, например, уравнения Навье–Стокса и любые уравнения механики, в которых диссипативная функция существенно положительна), что с очевидностью указывает на автоматическое выполнение условия экстремума и для функций, выбранных в виде (П1) и (П2), но уже для открытых систем. Понятно, что в результате мы должны прийти к уравнениям, описывающим экстремальное распределение обоих интересующих нас параметров (см. ниже).

Действительно, дифференцируя (П1) по времени, находим

$$\dot{E} = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \left[C_1' \dot{m} n^2 + 2 C_1 n \dot{n} + C_2' \dot{n} m^2 + 2 C_2 m \dot{m} \right] d\sigma, \tag{П3}$$

где $C_1' = \dfrac{dC_1}{dm}$, $C_2' = \dfrac{dC_2}{dm}$.

Складывая (П2) и (П3), будем иметь

$$\int_{\Sigma} \left[\frac{1}{2} C_1' \dot{m} n^2 + C_1 n \dot{n} + \frac{1}{2} C_2' \dot{n} m^2 + C_2 m \dot{m} + \Gamma_1(n,m)\, m^2 - \Gamma_2(n,m)\, n^2 + \Gamma_3 n^3 + \Gamma_4 n m^2 + \Gamma_5 m n^2 \right] d\sigma = 0.$$

Группируя здесь слагаемые с n и m, получаем в подынтегральной функции сумму двух выражений:

$$n \left[C_1 \dot{n} + \frac{1}{2} C_1' \dot{m} n + \Gamma_3 n^2 - \Gamma_2(n,m)\, n + \frac{1}{2} \Gamma_4 m^2 + \frac{1}{2} \Gamma_5 m n \right] + \\ + m \left[C_2 \dot{m} + \Gamma_1(n,m)\, m + \frac{1}{2} C_2' \dot{n} m + \frac{1}{2} \Gamma_4 n m + \frac{1}{2} \Gamma_5 n^2 \right].$$

Пользуясь независимостью параметров n и m, полагаем каждое из них по отдельности равным нулю и находим интересующую нас систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1 \dot{n} + \dfrac{1}{2} C_1' \dot{m} n + \Gamma_3 n^2 - \Gamma_2 n + \dfrac{1}{2} \Gamma_4 m^2 + \dfrac{1}{2} \Gamma_5 m n = 0, \\ C_2 \dot{m} + \dfrac{1}{2} C_2' \dot{n} m + \Gamma_1 m + \dfrac{1}{2} \Gamma_4 n m + \dfrac{1}{2} \Gamma_5 n^2 = 0. \end{cases} \tag{П4}$$

Перепишем эти уравнения в виде

$$\begin{cases} \dot{n} + \dfrac{C_1'}{2C_1} \dot{m} n = -\dfrac{1}{C_1} \left(\Gamma_3 n^2 - \Gamma_2 n + \dfrac{1}{2} \Gamma_4 m^2 + \dfrac{1}{2} \Gamma_5 m n \right) = \varphi_1(n,m), \\ \dot{m} + \dfrac{1}{2C_2} C_2' \dot{n} m = -\dfrac{1}{C_2} \left(\Gamma_1 m + \dfrac{1}{2} \Gamma_4 n m + \dfrac{1}{2} \Gamma_5 n^2 \right) = \varphi_2(n,m). \end{cases} \tag{П5}$$

Если решить эту линейную относительно производных $\dot{n}$ и $\dot{m}$ систему, то получим

$$\begin{cases} \dot{m} + \dfrac{1}{C_2 - \dfrac{C_1'C_2'}{4C_1}mn}\left[\Gamma_1 m + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{C_2'}{C_1}\Gamma_2 + \Gamma_4\right)mn + \dfrac{\Gamma_5}{2}n^2 - \dfrac{C_2'}{4C_1}\Gamma_4 m^3 - \dfrac{C_2'}{2C_1}\Gamma_3 mn^2 - \dfrac{C_2'}{4C_1}\Gamma_5 nm^2\right] = 0, \\ \dot{n} + \dfrac{1}{C_1 - \dfrac{C_1'C_2'}{4C_2}mn}\left[-\Gamma_2 n + \Gamma_3 n^2 + \dfrac{\Gamma_4}{2}m^2 + \dfrac{1}{2}\left(\Gamma_5 - \dfrac{C_1'}{C_2}\Gamma_1\right)nm - \dfrac{C_1'\Gamma_4}{4C_2}mn^2 - \dfrac{C_1'\Gamma_5}{4C_2}n^3\right] = 0. \end{cases} \quad (\text{П6})$$

Из общей системы уравнений (П6) сразу же видно, что при $m = 0$ и $\Gamma_5 = 0$ мы приходим к уравнению Ферхюльста: $\dot{n} = \alpha n - \beta n^2$. При других соотношениях мы приходим к обобщенной системе уравнений Вольтерра–Лотка.

Полагая в уравнениях (П6) $C_2(n,m) = \text{const}$ и опуская все кубические слагаемые по n и m, а также вводя для удобства явные зависимости от n и m, будем иметь

$$\begin{cases} \dot{m} + \dfrac{1}{C_2}\left(\Gamma_1(n,m)m + \dfrac{\Gamma_4(n,m)}{2}mn + \dfrac{\Gamma_5(n,m)}{2}n^2\right) = 0, \\ \dot{n} + \dfrac{1}{C_1(n,m)}\left[-\Gamma_2(n,m)n + \Gamma_3(n,m)n^2 + \dfrac{\Gamma_4(n,m)}{2}m^2 + \dfrac{1}{2}\left(\Gamma_5(n,m) - \dfrac{C_1'}{C_2}\Gamma_1(n,m)\right)nm\right] = 0. \end{cases} \quad (\text{П7})$$

Исследуемый нами случай отвечает условиям $C_1(n,m) = C_1 m$, $\Gamma_1(n,m) = \Gamma_1 m$, $\Gamma_2(n,m) = \Gamma_2 m$, $\Gamma_3(n,m) = \Gamma_3 = \text{const}$, $\Gamma_4 = \text{const}$, $\Gamma_5 = 0$.

В результате из уравнений (П7) следует, что

$$\begin{cases} \dot{n} + \left[-\dfrac{\Gamma_2}{C_1}n + \dfrac{\Gamma_3}{C_1 m}n^2 + \dfrac{\Gamma_4}{2C_1}m - \dfrac{C_1}{2C_2}\Gamma_1(m)nm\right] = 0, \\ \dot{m} + \dfrac{1}{C_2}\left(\Gamma_1(m)m + \dfrac{\Gamma_4}{2}mn\right) = 0. \end{cases} \quad (\text{П8})$$

Чтобы привязаться к параметрам уравнений (1), считаем коэффициент Γ_1 отрицательным и полагаем, что:

$$\alpha = \frac{\Gamma_2}{C_1},\ \beta(t) = \frac{\Gamma_3(t)}{C_1},\ \gamma = \frac{\Gamma_4}{2C_2},\ \frac{\Gamma_1(m)}{C_2} = -\lambda\varepsilon m^{\lambda}.$$

В результате из (П8) следует:

$$\begin{cases} \dot{n} = \alpha n - \dfrac{\beta(t)}{m}n^2 - \gamma\dfrac{C_2}{C_1}m - \dfrac{\lambda\varepsilon}{2}nm^{1+\lambda}, \\ \dot{m} = -\gamma mn + \lambda\varepsilon m^{1+\lambda}. \end{cases} \quad (\text{П9})$$

Из сравнения уравнений (П9) с уравнениями (1) видно, что в верхнем уравнении (П9) в правой части присутствуют два дополнительных слагаемых в отличие от уравнений (1), в которых их нет. Казалось бы, этот момент может послужить сильным поводом для критики всей работы. Однако торопиться не будем. Как видно из (П9), эти слагаемые входят с правильными знаками, и если положить здесь $C_1 = C_2$ и воспользоваться численными значениями параметров, приведенными выше ($\alpha = 10^{-2}$ кг/км^2 сут, $\beta = 10^{-5}$ кг/км^2 сут, $\gamma = 10^{-6}$ кг/км^2 сут, $\lambda = 10^{-2}$, $\varepsilon = 10^{-2}$ (СИ, км, сут)), то система (П9) примет вполне конкретный вид

$$\begin{cases} \dot{x} = -10^{-6}xy + 10^{-4}x^{1,01}, \\ \dot{y} = 10^{-2}y - \dfrac{10^{-5}}{x}y^2 - 10^{-6}x - 0,5\cdot 10^{-4}yx^{1,01}. \end{cases} \quad (\text{П10})$$

Результат численного интегрирования уравнений (П10) проиллюстрирован на рис. 3. Из его сравнения с рис. 1 и 2 мы видим их замечательное сходство.

Таким образом, у нас имеется корректная и вполне обоснованная (правда, укороченная по сравнению с уравнениями (П9)), система уравнений (1), моделирующая эволюционное развитие человеческой популяции с учетом обрезающего ее развитие фактора.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

СОБЛЮДЕНИЕ ЭТИЧЕСКИХ СТАНДАРТОВ

Настоящая работа не содержит описания исследований с использованием людей и животных в качестве объектов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. P.-F. Verhulst, *Corresp. Math. Phys.* **10**, 113 (1838).

2. P.-F. Verhulst, *Nouv. Mém. Acad. R. Sci. B.—Lett. Brux.* **18**, 1 (1845).
3. P.-F. Verhulst, *Mém. Acad. R. Sci. Lett. B.—Arts Belg.* **20**, 142 (1847).
4. Yu. Loskutov and A. S. Mihailov, *Introduction to Synergetic* (Science, Moscow, 1990).
5. H. Haken, *Synergetics. Introduction and advanced topics* (Springer, 2004).
6. A. J. Lotka, *Elements of Physical Biology* (Williams & Wilkins, Baltimore, 1925).
7. V. Volterra, *Mem. Accad. Lince* **6**, 31 (1926).
8. M. A. Safi, Incidence Function. Mathematics **7**, 350 (2019).
9. С. П. Капица. Успехи физ. наук **166**, 63 (1996).
10. J. Medlock and M. Kot, Math. Biosci. **184**, 201 (2003).
11. T. Fujimoto and R. R. Ranade, Electron. J. Lin. Algebra **11**, 59 (2004).
12. С. П. Капица, Успехи физ. наук **180**, 1337 (2010).
13. J. Macías-Díaz and A. A. Puri, Appl. Numer. Math. **60**, 934 (2010).
14. N. K. Martin, P. Vickerman, and M. Hickman, J. Theor. Biol. **274**, 58 (2011).
15. J. E. Macías-Díaz, Comput. Phys. Commun. **182**, 2471 (2011).
16. J. E. Macías-Díaz and A. Puri, Appl. Math. Comput. **218**, 5829 (2012).
17. J. E. Macías-Díaz, R. Landry, and A. Puri, Int. J. Comput. Math. **91**, 2199 (2014).
18. P. E. Parham, J. Waldock, G. K. Christophides, et al., Philosoph. Trans. Roy. Soc. B: Biol. Sci. **370**, 20130551 (2015).
19. Q. Cheng, Q. Jing, R. C. Spear, et al., PLoS Neglected Tropic. Dis. **10**, e0004417 (2016).
20. A. P. Lemos-Paião, C. J. Silva, and D. F. Torres, J. Comput. Appl. Math. **318**, 168 (2017).
21. F. Agusto, S. Bewick, and W. Fagan, Ecol. Complexity **29**, 61 (2017).
22. Г. Р. Иваницкий, Успехи физ. наук **187**, 757 (2017).
23. M. Parsamanesh and M. Erfanian, Chaos, Solitons & Fractals **117**, 192 (2018).
24. N. Ahmed, N. Shahid, Z. Iqbal, et al., J. Appl. Environ. Biol. Sci. **8** (4), 67 (2018).
25. Г. Р. Иваницкий, Успехи физ. наук **188**, 965 (2018).
26. R. Nistal, M. De la Sen, S. Alonso-Quesada, and A. Ibeas, Mathematics **7**, 18 (2019).
27. N. Ahmed, M. Rafiq, M. Rehman, et al., AIP Advances **9**, 015205 (2019).
28. S. O. Gladkov, Reports Physics RAS **48** (8), 405 (2003).
29. S. O. Gladkov, Technic. Phys. Lett. **309** (9), 735 (2004).
30. https://www.countrymeters.info/ru
31. D. K. Arrowsmith and C. M. Place, *Ordinary Differential Equations: a Qualitative Approach with Applications* (Chapman and Hall, Lond., N. Y., 1982).
32. S. O. Gladkov, Reports Physics RAS **49** (2), 82 (2004).
33. S. O. Gladkov and E. F. Medvedev, Glass Phys. Chem. **32** (3), 346 (2006).
34. S. O. Gladkov, Technic. Phys. **53**, 952 (2008).
35. S. O. Gladkov and S. B. Bogdanova, Int. J. Mechanics 9 (11), 909 (2015).
36. S. O. Gladkov and S. B. Bogdanova, Technic. Phys. **61**, 157 (2016).
37. S. O. Gladkov, WSEAS Trans. Appl. Theor. Mechanics **15**, 24 (2020).
38. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика,* Т. 6. *Гидродинамика* (Наука, М., 1988).
39. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика,* Т. 5. *Статистическая физика* (Наука, М., 1982).

On the Question of Self-Organization of Processes of Changing the Population on the Earth

S.O. Gladkov

Moscow Aviation Institute (National Research University), Volokolamskoe shosse 4, Moscow, 125993 Russia

A new mathematical model based on the predator-prey interactions has been proposed. Strictly analytical solution has been found for a system of nonlinear differential equations describing accurately the dynamics of a population concentration on Earth's land surface, taking into account the main factors of "cut-off" influencing its spatio-temporal evolution. With the help of the proposed model, it is shown that the population of the Earth tends to increase, and then, due to a system's permeability, after reaching the maximum, the population growth rate begins to decline. This observation is confirmed by rigorous mathematical and numerical calculations.

Keywords: self-organization and self-regulation, “predator–prey” model, nonlinear dynamics, population concentration