БИОФИЗИКА, 2022, том 67, № 1, с. 150–159

БИОФИЗИКА СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

УДК 517.958.531.3-324

НЕИНВАЗИВНЫЙ ПОДХОД В ГИДРОДИНАМИКЕ СПИННОМОЗГОВОЙ ЖИДКОСТИ В СПИНАЛЬНОЙ ПОЛОСТИ

© 2022 г. А.Г. Зверев, Ю.Н. Токарев

Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, 115191, Москва, Большая Тульская ул., 52

E-mail: ytokarev@ya.ru

Поступила в редакцию 21.09.2021 г.
После доработки 21.09.2021 г.
Принята к публикации 18.11.2021 г.

Предложена модель движения спинномозговой жидкости в спинальной полости позвоночника, позволяющая рассчитать профили скоростей и расходы ликвора в зависимости от размеров полости и пульса пациента. Полученные аналитическими методами зависимости позволяют делать количественные оценки движения ликвора в спинальной полости позвоночника и более обоснованно ставить диагнозы при его патологии.

Ключевые слова: спинномозговая жидкость, ликвор, профиль скорости, число Уомерсли.

DOI: 10.31857/S0006302922010161

В живых биологических системах некоторые процессы являются периодическими, характеризующимися частотой и амплитудой. К таким процессам относятся сердечные сокращения, дыхание, движение спинномозговой жидкости. Их частоты находятся в диапазоне от 0.0–1.2 Гц в покое до 3.5 Гц при нагрузках [1, 2].

До XIX века пока аппаратура по измерению частот еще не была создана, главным инструментом для их определения являлась пальпация. С ее помощью при определенной тренировке измерялся пульс, дыхательный ритм, а в некоторых случаях и колебания спинномозговой жидкости [1–3]. Систематическое исследование ритмов началось с конца XIX века, с появлением электрокардиографа, а позднее, в 50 годы XX века – капнографа и реоэнцефалографа, 80 годы XX века – транскраниальной допплерографии, ультразвуковых исследований, магнитно-резонансной томографии. Проводились также инвазивные исследования [3–6]. Технический прогресс позволил сократить затрачиваемое время на постановку диагноза по глубоким патологиям и более адекватно описывать сам диагноз (рис. 1) [7]. Появилась возможность управлять этими параметрами в спорте [8, 9]. Параллельно изучался состав ликвора и его пульсации при изменении давления [9, 10].

Исторически сложилось так, что сердечно-сосудистая, дыхательная и ликворная системы изучались по отдельности и для их описания применялись не связанные между собой системы терминов. Дальнейшее изучение выявило взаимную связь этих систем, но к единой терминологии это так и не привело.

В данной работе проводится моделирование движения ликвора в позвоночнике, точнее в спинальной полости (подпаутинном пространстве). Спинальная полость представляет собой неравномерную кольцевую (коаксиальную) трубку, которая в шейном и поясничном отделе имеет утолщение в виде раструба, а в грудном – обычную кольцевую трубку. Длина полости ~ 0.5 м, от большого затылочного отверстия до точки L_2. Наружная стенка (паутинная оболочка), плотно примыкает к твердой мозговой оболочке. Внутренняя стенка, мягкая оболочка спинного мозга, крепится к твердой мозговой оболочке зубчатыми связками через паутинную оболочку. Схематично геометрия спинальной полости приведена на рис. 2 [8].

Одной из главных особенностей ликвора является его дренажная функция, т.е. отведение продуктов жизнедеятельности из спинного мозга и спинномозговых нервов, и компенсаторная (стабилизация внутричерепного давления), которая влияет на всасывание части ликвора в спинномозговые нервы [11], обеспечивая их работоспособность.

Конструкция шейных и поясничных каналов имеет расширение типа валторны. Ликвор, поступающий из черепа, имеет начальную среднюю скорость порядка 0.01 м/с, которая возрастает почти в три раза при входе в грудной канал и дополнительно возрастает в центре вследствие уменьше-

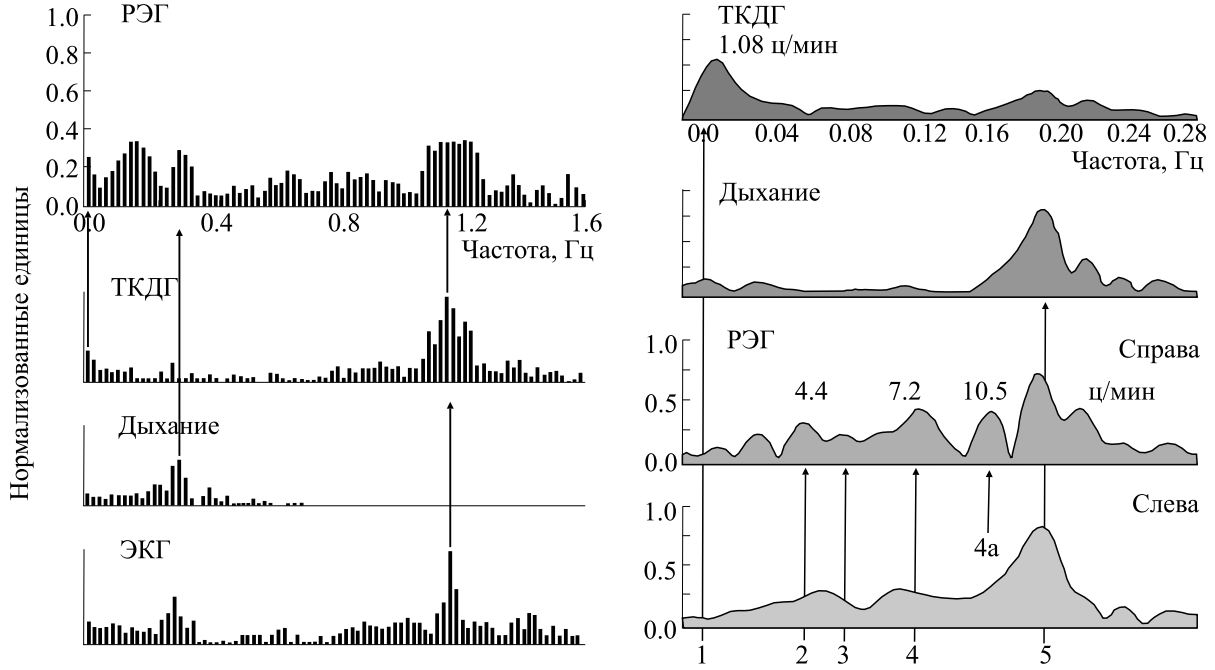

Рис. 1. Синхронизованные спектральные реоэнцефалограммы, транскраниальные допплерограммы, электрокардиограммы и дыхание.

ния проходного сечения. В грудном канале скорость возрастает примерно в полтора раза. В поясничном канале вследствие его расширения скорость падает в полтора раза. Из опытных данных следует, что расход ликвора на уровне большого затылочного отверстия составляет ~(1–3)×10^{-6} м^3/с, средняя скорость по поперечному сечению – 0.01–0.07 м/с [8, 10].

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЛИКВОРА

Примем, что ликвор является ньютоновской жидкостью, имеющей плотность $\rho = 966 \div 1007$ кг/м^3 и динамическую вязкость $\mu = 0{,}0007 \div 0{,}001$ Н/м^2, движущейся по бесконечной кольцевой трубке с постоянным поперечным сечением. В этом случае уравнения Навье–Стокса сводятся к единственному уравнению для осевой скорости, которое в цилиндрических координатах записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}, \qquad (1)$$

где u – скорость вдоль оси, t – время, ν – кинематическая вязкость, r – текущий радиус, $r_1 < r < r_2$, p – давление, ρ – плотность, z – продольная координата.

Конвективный член в уравнении (1) опущен, так как поперечное сечение постоянно. Скорость ликвора принимает нулевые значения на границе, поэтому к уравнению (1) присоединим граничные условия:

$$\begin{cases} u|_{r=r_1} = 0, \\ u|_{r=r_2} = 0 \end{cases}. \qquad (2)$$

Приведем уравнение (1) к безразмерному виду. Для этого введем безразмерные координаты и время:

$$r' = r/r_2,\ z' = z/r_2,\ \tau = t/t_{\text{Р}}. \qquad (3)$$

В выражении (3) $t_{\text{Р}}$ – период пульсаций давления. Градиент давления в рассматриваемой задаче является периодической функцией; поскольку величина p/ρ имеет размерность квадрата скорости, представим его в виде

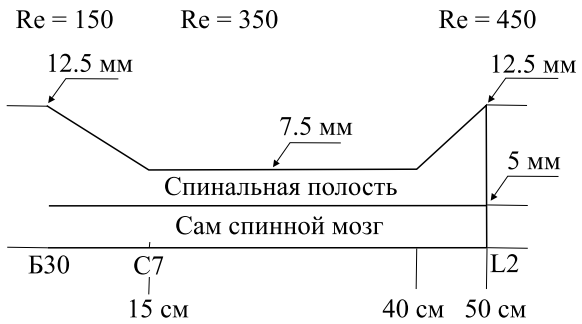

Рис. 2. Геометрия кольцевого канала.

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = A\,P\left(\frac{t}{t_P}\right) = \frac{u_p^2}{r_2}P\left(\frac{t}{t_P}\right). \quad (4)$$

Функция $P(\tau)$ в уравнении (4) будет периодической, изменяясь в пределах (–1, 1) на отрезке (0, 1), например, можно положить $P(\tau) = \sin(2\pi\tau)$. Величина u_P характеризует амплитуду колебаний градиента давления:

$$A = \frac{u_p^2}{r_2},\ u_p = \sqrt{Ar_2}. \quad (5)$$

Из имеющихся исходных данных можно составить еще одну величину, имеющую размерность скорости и равную

$$u_\nu = \frac{\nu}{r_2}. \quad (6)$$

Обезразмерить скорость можно с использованием как u_P (5), так и u_ν (6). В рассматриваемом случае нас интересует влияние частотных и геометрических факторов, поэтому положим

$$u' = \frac{u}{u_P}. \quad (7)$$

Опуская штрихи у всех переменных, кроме u, приводим уравнение (1) в результате замен (3) и (7) к следующему виду:

$$\frac{r_2^2}{\nu t_P}\frac{\partial u'}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u'}{\partial r}\right) + \frac{r_2 u_P}{\nu}P(t). \quad (8)$$

Уравнение (8) показывает целесообразность еще одной замены:

$$U = \frac{u'\nu}{r_2 u_P}. \quad (9)$$

В результате замены (9) уравнение (8) приводится к виду

$$\beta^2\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + P(t). \quad (10)$$

В уравнении (10) обозначено:

$$\beta = \frac{r_2}{\sqrt{\nu t_P}} = \frac{(r_2 - r_1)}{\sqrt{\nu t_P}}\frac{r_2}{(r_2 - r_1)} = \frac{\alpha}{1-\xi};$$
$$\alpha = \frac{(r_2 - r_1)}{\sqrt{\nu t_P}} = \frac{r_2(1-\xi)}{\sqrt{\nu t_P}}; \quad (11)$$
$$U = \frac{u\nu}{r_2 u_P^2} = \frac{u\,u_\nu}{u_P^2};\ u = \frac{u_P^2}{u_\nu}U.$$

Параметр α в выражении (11) с точностью до множителя $\sqrt{2\pi}$ является числом Уомерсли. Граничные условия (2) примут вид

$$\begin{cases} U_{r=\xi} = 0, \\ U\big|_{r=1} = 0. \end{cases} \quad (12)$$

В выражениях (11) и (12) введено обозначение

$$\xi = \frac{r_1}{r_2}. \quad (13)$$

Таким образом, уравнение (10) с периодическими функциями U и P с граничными условиями (13) рассматриваем на отрезке [ξ, 1] в промежутке времени [0, 1].

Решение уравнения (10). Применим метод Фурье для разделения переменных [12]. Найдем необходимые для дальнейшего собственные функции оператора вязкости

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_n}{\partial r}\right) = \lambda_n^2 u_n. \quad (14)$$

Общим решением уравнения (14) будет функция

$$u_n = b_n J_0(r\lambda_n) + c_n Y_0(r\lambda_n). \quad (15)$$

В уравнении (15) b_n и c_n – произвольные константы, $J_0(x)$ и $Y_0(x)$ – цилиндрические функции. Граничные условия (12) с учетом уравнения (15) приводят к алгебраической системе

$$\begin{cases} b_n J_0(\xi\lambda_n) + c_n Y_0(\xi\lambda_n) = 0, \\ b_n J_0(\lambda_n) + c_n Y_0(\lambda_n) = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Для того, чтобы однородная система уравнений с неизвестными b_n и c_n имела нетривиальное решение, ее детерминант должен равняться нулю. Это условие дает характеристическое уравнение, из которого можно найти собственные значения λ_n:

$$X(\lambda_n,\xi) = \begin{vmatrix} J_0(\xi\lambda_n) & Y_0(\xi\lambda_n) \\ J_0(\lambda_n) & Y_0(\lambda_n) \end{vmatrix} = J_0(\xi\lambda_n)Y_0(\lambda_n) - J_0(\lambda_n)Y_0(\xi\lambda_n) = 0. \quad (17)$$

Ниже везде при вычислении числовых значений будем полагать $r_2 = 0.01$. График характеристической функции $X(\lambda,\xi)$ представлен на рис. 3.

Корни уравнения (17) легко находятся с помощью метода Ньютона, который в рассматриваемом случае выражается итерационной формулой

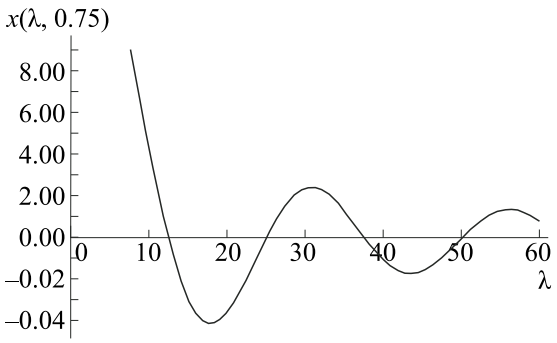

Рис. 3. График характеристической функции при r_1 = = 0.0075 м.

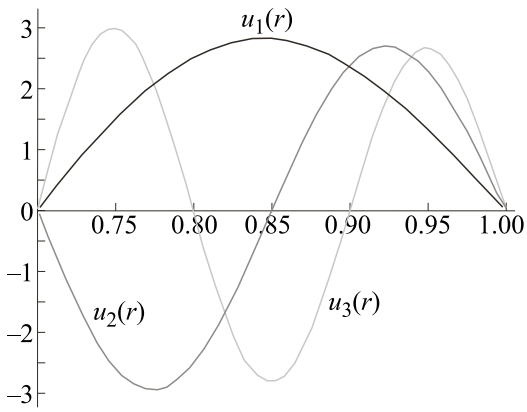

Рис. 4. Собственные функции вязкостного оператора.

$$\lambda_n^{k+1} = \lambda_n^k - \frac{1}{X(\lambda_n,\xi)}\frac{\mathrm{d}X(\lambda,\xi)}{\mathrm{d}\lambda}\bigg|_{\lambda=\lambda_n^k}, \quad k = 0, 1, 2, 3\ldots \tag{18}$$

Приведем несколько первых собственных значений для $\xi = 0.7$:

$$\lambda_1 = 12.5533,\ \lambda_2 = 25.1261,\ \lambda_3 = 37.6947,$$
$$\lambda_4 = 50.2622,\ \lambda_5 = 62.8292. \tag{19}$$

В нулях характеристической функции из уравнений (16) имеем

$$-\frac{c_n}{b_n} = \frac{J_0(\xi\lambda_n)}{Y_0(\xi\lambda_n)} = \frac{J_0(\lambda_n)}{Y_0(\lambda_n)}. \tag{20}$$

Из выражения (20) следует, что коэффициенты b_n и c_n можно выбрать по формуле

$$b_n = Y_0(\lambda_n),\ \ c_n = -J_0(\lambda_n). \tag{21}$$

С учетом выражений (21) формула (15) запишется в виде

$$u_n(r) = Y_0(\lambda_n)J_0(r\lambda_n) - J_0(\lambda_n)Y_0(r\lambda_n). \tag{22}$$

Сравнивая уравнения (22) и (17), видим, что после нахождения собственных чисел λ_n собственные функции можно выразить через характеристическую функцию

$$u_n(r) = X(\lambda_n, r). \tag{23}$$

Определим ортонормированные собственные функции в соответствии с выражением

$$U_n(r) = \frac{u_n(r)}{\|u_n\|}. \tag{24}$$

Используя уравнение (22), вычислим норму собственной функции $\|u_n\|$, входящей в выражение (24):

$$\|u_n\|^2 = \int_\xi^1 r u_n(r)^2\,\mathrm{d}r =$$
$$= \frac{2}{\pi^2\lambda_n^2} - \frac{1}{2}\xi^2\left[Y_0(\lambda_n)J_1(\lambda_n\xi) - J_0(\lambda_n)Y_1(\lambda_n\xi)\right]^2. \tag{25}$$

На рис. 4 представлены несколько первых нормированных собственных функций для r_1 = 0.0075 м.

По определению ортонормированных функций, справедливо равенство

$$\|U_n\| = (U_n, \mathrm{U}_n) = \int_\xi^1 r U_n(r)^2\,\mathrm{d}r = 1. \tag{26}$$

После нахождения ортонормированных собственных функций (24) дальнейший ход решения совпадает со стандартной процедурой этого метода (см. работу [12]). Представим решение в виде разложения в ряд Фурье по системе ортонормированных собственных функций с коэффициентами, зависящими от числа Фурье:

$$U(r,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n(\tau)U_n(r). \tag{27}$$

Подставляя выражение (27) в уравнение (10) и учитывая соотношение (14), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\beta^2\frac{\partial d_n}{\partial\tau} + \lambda_n^2 d_n\right)U_n(r) = P(\tau). \tag{28}$$

Умножая уравнение (28) на $rU_n(r)$ и интегрируя на отрезке (0,1), получаем

$$\beta^2\frac{\partial d_n}{\partial\tau} + \lambda_n^2 d_n = p_n P(\tau),\quad p_n = (1, U_n) = \int_\xi^1 r U_n \mathrm{d}r. \tag{29}$$

Вычисления приводят к следующей формуле:

$$p_n = \frac{\sqrt{2}\{2 + \pi\lambda_n\xi[J_0(\lambda_n)Y_1(\lambda_n\xi) - Y_0(\lambda_n)J_1(\lambda_n\xi)]\}}{\lambda_n\sqrt{4 - \pi^2\lambda_n^2\xi^2\left\{[J_0(\lambda_n)Y_0(\lambda_n\xi) - Y_0(\lambda_n)J_0(\lambda_n\xi)]^2 + [J_0(\lambda_n)Y_1(\lambda_n\xi) - Y_0(\lambda_n)J_1(\lambda_n\xi)]^2\right\}}}. \quad (30)$$

При получении уравнения (29) было использовано соотношение (26). Общим решением уравнения (29) будет функция

$$d_n(\tau) = \left[\frac{p_n}{\beta^2}\int_0^\tau e^{\left(\frac{\lambda_n}{\beta}\right)^2\tau} P(\tau)\,d\tau + g_n\right] e^{-\left(\frac{\lambda_n}{\beta}\right)^2\tau}. \quad (31)$$

Неизвестную константу g_n в уравнении (31) найдем из условия периодичности решения по времени:

$$d_n(0) = d_n(\tau_0). \quad (32)$$

Подставляя в условие (32) выражение (31), получим

$$g_n = \frac{p_n}{\alpha^2\left[e^{\left(\frac{\lambda_n}{\beta}\right)^2} - 1\right]}\int_0^1 e^{\left(\frac{\lambda_n}{\beta}\right)^2 x} P(x)\,dx. \quad (33)$$

Подставляя выражение (33) в уравнение (31), получим окончательное выражение для $d_n(\tau)$:

$$d_n(\tau) = \frac{p_n}{\beta^2}D_n(\tau) = \frac{(1-\xi)^2}{\alpha^2}p_nD_n(\tau);$$
$$D_n(\tau) = \left[\int_0^\tau e^{\left(\frac{\lambda_n}{\beta}\right)^2\tau} P(\tau)\,d\tau + \frac{\int_0^1 e^{\left(\frac{\lambda_n}{\beta}\right)^2\tau} P(\tau)\,d\tau}{e^{\left(\frac{\lambda_n}{\beta}\right)^2} - 1}\right] e^{-\left(\frac{\lambda_n}{\beta}\right)^2\tau}. \quad (34)$$

Из формул (27), (30) и (34) следует, что параметрами, влияющими на скорость при заданном давлении $P(\tau)$, являются число ξ, однозначно определяющее множество значений λ_n, и число Уомерсли α.

Как было сказано выше,

$$P(\tau) = \sin(2\pi\tau). \quad (35)$$

Тогда выражение (34) для $D_n(\tau)$ примет вид

$$D_n(\tau) = \frac{\sin(2\pi\tau - \psi_n)}{\sqrt{\left(\frac{\lambda_n}{\beta}\right)^4 + 4\pi^2}}; \quad \psi_n = \operatorname{arctg}\left(2\pi\left(\frac{\beta}{\lambda_n}\right)^2\right). \quad (36)$$

Величина ψ_n в выражении (36) является сдвигом по фазе n-й гармоники скорости ликвора по отношению к фазе давления. Из выражения (36) видно, что этот сдвиг монотонно убывает и максимален для $n = 1$. Формула для безразмерной скорости принимает вид

$$U(r,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n(\tau)U_n(r) = \frac{1}{\beta^2}\sum_{n=1}^{\infty} p_nD_n(\tau)U_n(r). \quad (37)$$

Размерная скорость, зависящая от размерных времени и радиуса, определится с учетом уравнения (11) соотношением

$$u(r,t) = \frac{u_P^2}{u_\nu}U\left(\frac{r}{r_2}, \frac{t}{t_p}\right). \quad (38)$$

Вычислим, используя соотношение (38), расход ликвора и размерную среднюю скорость, переходя к безразмерному радиусу $r \to r_2r'$ в соответствии с уравнением (3), подставляя формулу (37) и применяя уравнение (29):

$$\begin{aligned} Q &= 2\pi\int_{r_1}^{r_2} rudr = 2\pi\int_{r_1}^{r_2} r\frac{u_P^2}{u_\nu}U\left(\frac{r}{r_2},\tau\right)dr = 2\pi r_2^2\frac{u_P^2}{u_\nu}\int_\xi^1 rU(r,\tau)\,dr = \\ &= 2\pi r_2^2\frac{u_P^2}{u_\nu}\frac{1}{\beta^2}\int_\xi^1 r\sum_{n=1}^{\infty}p_nD_n(\tau)U_n(r)\,dr = 2\pi\frac{r_2^2u_P^2}{u_\nu}\frac{1}{\beta^2}\sum_{n=1}^{\infty}p_nD_n(\tau)\int_\xi^1 rU_n(r)\,dr = \\ &= 2\pi\frac{r_2^2u_P^2}{u_\nu}\frac{1}{\beta^2}\sum_{n=1}^{\infty}D_n(\tau)\,p_n^2, \\ \bar{u} &= Q\big/\pi(r_2^2 - r_1^2) = 2\frac{u_P^2}{u_\nu}\frac{1}{\alpha^2}\frac{1-\xi}{1+\xi}\sum_{n=1}^{\infty}D_n(\tau)\,p_n^2. \end{aligned} \quad (39)$$

Полученные формулы (39) дают решение исходной задачи, но являются сложными для использования. Их упрощение возможно в случае, когда значение ξ близко к единице, то есть когда кольцевой канал по форме приближается к плоскому каналу. В этом случае, раскладывая характеристическое уравнение (17) в ряд Тейлора в точке $\xi = 1$ и оставляя только первые три члена, находим, что первое собственное значение можно приблизить формулой

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{6}}{1-\xi}. \tag{40}$$

При $\xi \to 1$ первая собственная функция должна быть квадратичной, обращаться в нуль на стенках и удовлетворять условию (26). Эти условия приводят к выражению

$$U_1(r) = \frac{\sqrt{30}}{(1-\xi)^{\frac{5}{2}}}(r-\xi)(1-r). \tag{41}$$

Для коэффициента p_1 в формуле (30) в случае, когда значение ξ близко к единице, справедлива следующая формула:

$$p_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-\xi}. \tag{42}$$

Используя формулу (40) для $D_1(\tau)$ и значение сдвига по фазе из формулы (36), получаем следующее выражение:

$$D_1(\tau) \approx \frac{\alpha^2}{2\sqrt{9+4\pi^2\alpha^4}}\sin\left(2\pi\tau - arctg\left(\frac{\pi}{3}\alpha^2\right)\right). \tag{43}$$

Формула (36) показывает, что функции $D_n(\tau)$ быстро убывают с ростом n, поэтому для получения приближенных оценок ограничимся первым членом ряда в формуле (37):

$$U(r,\tau) \approx \frac{3\sqrt{10}}{4}\alpha^2\frac{\sin(2\pi\tau - \psi_n)}{\sqrt{9+\pi^2\alpha^4}}(r-\xi)(1-r). \tag{44}$$

Беря первые члены рядов (39) и используя формулы (42) и (43), вычислим приближенные значения средней скорости и расхода:

$$\begin{gathered}\tilde{u} = A_{\tilde{u}}\sin\left(2\pi\tau - arctg\left(\frac{\pi}{3}\alpha^2\right)\right); \quad A_{\tilde{u}} = \frac{3u_P^2}{4u_\nu}\frac{(1-\xi)^2}{1+\xi}\frac{1}{\sqrt{9+4\pi^2\alpha^4}};\\ \tilde{Q} = A_{\tilde{Q}}\sin\left(2\pi\tau - arctg\left(\frac{\pi}{3}\alpha^2\right)\right); \quad A_{\tilde{Q}} = \pi\left(r_2^2 - r_1^2\right)A_u = \frac{3}{4}\pi\frac{r_2^2u_P^2}{u_\nu}\frac{(1-\xi)^3}{\sqrt{9+4\pi^2\alpha^4}}.\end{gathered} \tag{45}$$

где $A_{\tilde{Q}}$ и $A_{\tilde{u}}$ – амплитуды расхода и средней скорости соответственно. Ликвор движется по каналу с меняющимся внутренним радиусом r_1 или, по другому, параметром ξ, но величина $A_{\tilde{Q}}$ в любом сечении при этом остается постоянной, поскольку ликвор является несжимаемой жидкостью. Поэтому способ определения амплитуды средней скорости $A_{\tilde{u}}$ в любом сечении заключается в следующем. Берем относительно протяженный участок канала с известным градиентом давления, определяем u_p, используя формулу (5), и по формуле (45) вычисляем $A_{\tilde{Q}}$. После этого величина $A_{\tilde{u}}$ в любом сечении со своим значением ξ определяется из соотношения

$$A_{\tilde{Q}} = A_{\tilde{u}}\pi(1-\xi^2)r_2^2. \tag{46}$$

Сделаем числовые оценки и построим графики изменения ключевых величин. Амплитуду градиента давления, присутствующую в уравнении (4), опираясь на работу [13] приближенно положим равной 0.025 мм рт.ст./см. Это позволяет вычислить

$$A = \frac{1}{\rho}\max\left(\left|\frac{\partial p}{\partial z}\right|\right) = \frac{1}{1000}(0.025 * 133.3224 * 100) = 0.333\,\text{м/с}^2, \;\; u_p = \sqrt{Ar_2} = 0.0577\,\text{м/с}.$$

Период пульсаций давления $t_P = 1$ с для величины пульса 60 уд./мин. Везде ниже полагаем $\nu = 10^{-6}$ м^2/с, $r_2 = 0.01$ м. В этих условиях число Уомерсли $\alpha = \frac{(r_2 - r_1)}{\sqrt{\nu t_P}} = \frac{r_2(1-\xi)}{\sqrt{\nu t_P}} = 10(1-\xi)$. Подставляя это в формулы (30), (36) и (37), получаем формулы для скорости ликвора, зависящей только от внутреннего радиуса и времени. Формулы (45) дадут значения амплитуд средней скорости и расхода.

Рассмотрим характер изменения скорости ликвора в зависимости от радиуса и времени при нескольких значениях внутреннего радиуса r_1, от которого зависит величина α, оставляя r_2 постоянным. Покажем также график изменения сред-

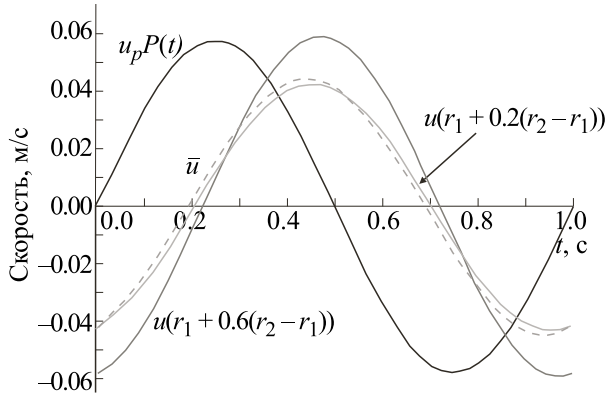

Рис. 5. Зависимость скорости ликвора в различных точках канала от времени при $r_1 = 0.0075$ м.

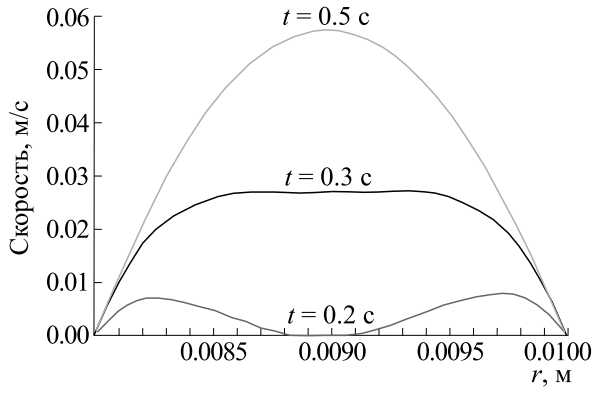

Рис. 7. Профили скорости для нескольких моментов времени при $r_1 = 0.0075$ м.

ней скорости во времени. Чтобы наглядно продемонстрировать отставание фазы скорости ликвора от фазы градиента давления, покажем также на графике соизмеримый со скоростью ликвора нормированный градиент давления $u_PP(t)$, определяемый формулами (5) и (35).

Рис. 5 показывает, что скорости в значительно отстоящих друг от друга точках канала довольно близки и близки к средней скорости. Величина $u_PP(t)$ носит тот же характер, хотя имеет место значительное отставание по фазе. На рис. 6 представлены профили скорости для нескольких моментов времени, которые вблизи стенок канала и в его центре могут быть направлены в разные стороны.

Из рис. 7 видно, что при приближении внутреннего радиуса к значению $r_1 = 0.0080$ м форма профилей скорости приближается к параболической.

На рис. 8 представлены профили скорости при дальнейшем увеличении внутреннего радиуса, соответствующем $r_1 = 0.0090$ м.

Видим, что профили скорости принимают форму, близкую к профилю Пуазейля, для любых моментов времени. Посмотрим на изменение скорости во времени для различных точек сече-

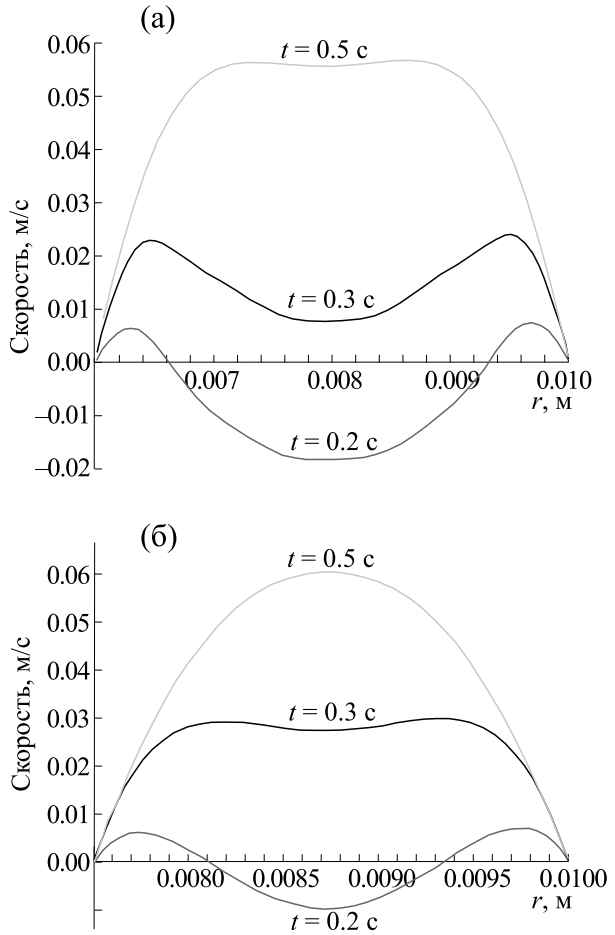

Рис. 6. Профили скорости для нескольких моментов времени при $r_1 = 0.0060$ м (а) и $r_1 = 0.0075$ м (б).

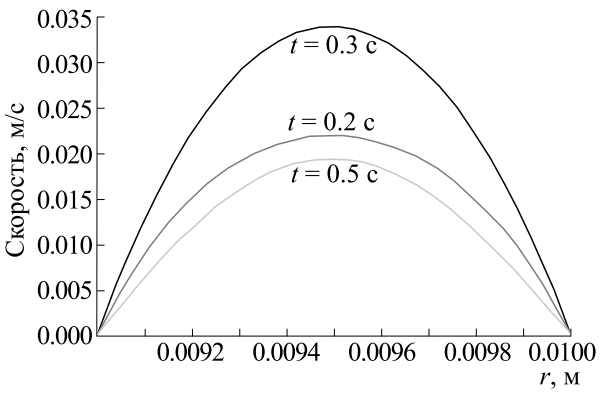

Рис. 8. Профили скорости для нескольких моментов времени при $r_1 = 0.0090$ м.

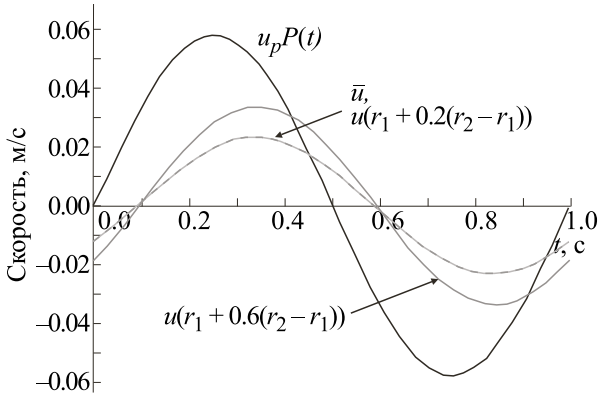

Рис. 9. Зависимость скорости ликвора в различных точках канала от времени при $r_1 = 0.0090$ м.

ния. График изменения скорости ликвора в двух точках в зависимости от времени, а также средняя скорость $\bar{u}$ и величина $u_P P(t)$ для $r_1 = 0.0090$ м представлены на рис. 9.

Рис. 9 показывает, что в любой момент времени скорости по всему сечению канала имеют один знак, то есть всегда направлены в одну сторону для всех точек сечения канала. Кроме того, величины скоростей стали существенно меньше величины $u_P P(t)$ и заметно уменьшилось отставание по фазе по сравнению с рис. 5. Объясняется это возрастанием сил вязкости по сравнению с силами инерции.

На рис. 10 представлено сравнение средней скорости, вычисленной по точной формуле (39) и по приближенной формуле (45) для $r_1 = 0.0075$ м на протяжении периода. Видим, что имеет место хорошее совпадение как по фазе, так и по модулю. Интересно также сравнить амплитуды средних скоростей, вычисленных по точной и приближенной формулам.

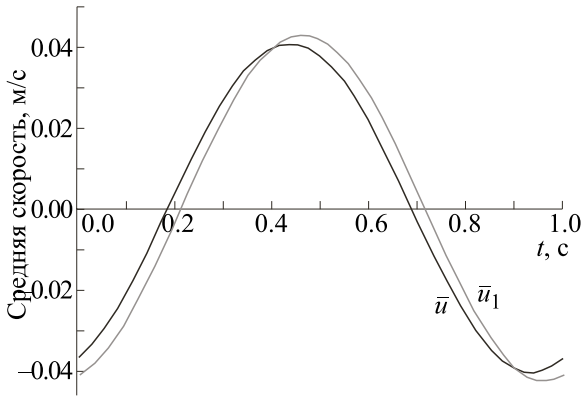

Рис. 10. Сравнение за период средних скоростей, вычисленных по точной и приближенной формулам при $r_1 = 0.0075$ м.

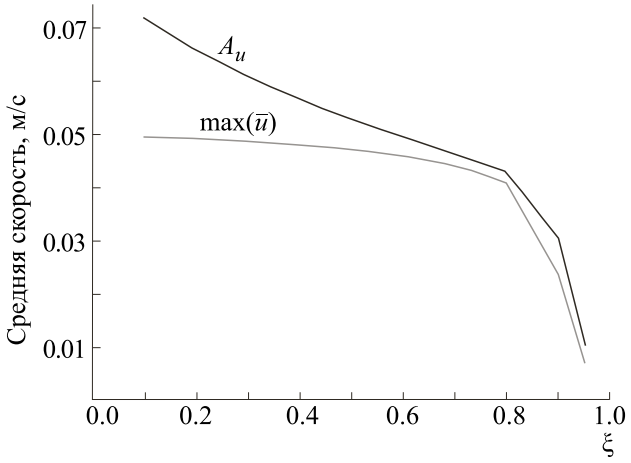

Рис. 11. Сравнение амплитуд средних скоростей, вычисленных по точной и приближенной формулам в диапазоне $0.1 \le \xi \le 0.95$.

На рис. 11 представлены графики величин $A_{\tilde{u}}$, представляющих собой амплитуду приближенной средней скорости (45) и максимальные значения средней скорости за период $A_{\bar{u}} = \{\max(|\bar{u}|), 0 \le \tau \le 1\}$, где $\bar{u}$ – точное значение средней скорости, определяемой по формуле (39).

Вычисления делали в точках $r_1 = 0.0012$, 0.0016, 0.0075, 0.0080, 0.0090 и 0.0095 м, затем проводили линейную интерполяцию. Видно, что приближенная формула (45) дает неплохое совпадение с точной формулой (39) для $0.6 \le \xi \le 0.8$. Интересно, что вплоть до значения $\xi \approx 0.75$ амплитуда средней скорости, вычисленная как амплитуда точного решения, даваемого формулой (39), на промежутке времени, равном периоду, меняется слабо. И лишь при значениях $\xi > 0.8$ начинается крутое падение. Данное сравнение имеет своей целью оценку точности приближенного решения, но не имеет отношения к реальному движению ликвора в спинальной полости, где при меняющихся по длине соотношениях внутреннего и внешнего радиусов сохраняется постоянство расхода.

Чтобы получить значения амплитуды скорости во всех сечениях позвоночника, сначала нужно по приведенным формулам вычислить амплитуду скорости на относительно протяженном участке позвоночника с известными перепадом давлений и радиусами, определяющими значение ξ_0, и затем для остальных участков позвоночника воспользоваться соотношением, вытекающем из постоянства расхода в любом сечении позвоночника

Гидродинамические параметры и числа Уомерсли расчетной модели

r_1, м	α	$A_{\bar{u}}$, м/с	$A_{\bar{u}}$, м/с
0.0012	8.8	0.0191	0.0200
0.0016	8.4	0.0194	0.0201
0.0025	7.5	0.0201	0.0210
0.0050	5.0	0.0251	0.0260
0.0075	2.5	0.0431	0.0450
0.0080	2.0	0.0524	0.0550
0.0090	1.0	0.0990	0.1030
0.0095	0.5	0.1930	0.2020

$$A_u(\xi) = A_u(\xi_0)\frac{1-\xi_0^2}{1-\xi^2}. \quad (47)$$

В таблице представлены числовые значения амплитуд средней скорости, определенные по точной и приближенной формулам для значения $\xi \approx 0.75$, а также для вычисленного выше значения $A = 0.333$ м/с^2, отражающего перепад давлений на участке определенной длины и пересчитанных затем для остальных значений r_1 по формуле (47).

ВЫВОДЫ

Значения скоростей, приведенные в нашей таблице, имеют хорошее совпадение с величинами, представленными в работе [8]. Это позволяет на основе предложенной модели, а также экспериментального определения расхода и поперечного сечения с помощью магнитно-резонансной томографии фазового контраста, вычислить скорость потока в любом позвоночно-двигательном сегменте. Экспериментальное изучение показывает, что в случае патологий канал спинальной полости всегда сужается. Использование полученных в работе соотношений позволяет определить влияние этого факта на гидродинамику ликвора.

Для грудного отдела примерными параметрами являются следующие: $\alpha \le 7.5$, $r_2 \sim 0.0075$ м, $r_1 \sim 0.0012$ м. При этих параметрах скорости ликвора можно вычислить по приближенным формулам (45). Профиль скорости в момент достижения максимального расхода ликвора напоминает профиль Пуазейля (стационарное течение в кольцевом канале). Для шейного и поясничного отделов, где инерция движения ликвора играет большую роль, что соответствует значениям $\alpha > 7.5$, $r_2 \sim 0.0090$ м, $r_1 \sim 0.0050$ м, профиль скорости становится более сложным, как показано на рис. 6 и 7. В этом случае вычисления необходимо проводить по точной формуле (39). На самых широких участках большого затылочного отверстия и L_2 течение имеет также сложный профиль. При этом в некоторые моменты времени в разных точках сечения скорости ликвора противоположны, что на практике означает его большее перемешивание. Несмотря на сложные профили скорости при определенных параметрах, средняя скорость ликвора не превышает 0.1 м/с, и оценка числа Рейнольдса показывает, что течение остается ламинарным.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СОБЛЮДЕНИЕ ЭТИЧЕСКИХ СТАНДАРТОВ

Настоящая работа не содержит описания исследований с использованием людей и животных в качестве объектов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. И. А. Егорова, *Краниальная остеопатия* (СПбМАПО, СПб, 2006).
2. М. Керн, *Мудрость тела* («Сударыня», СПб, 2006).
3. M. Czosnyka, Z. Czosnyka, Sh. Momjian, and J. D. Pickard, Physiol. Meas. **25** (5), R51 (2004).
4. N. Alperin, M. Mazda, T. Lichtor, and S. H. Lee, Curr. Med. Imaging Rev. **2** (1), 117 (2006). DOI: 10.2174/157340506775541622
5. Ю. Е. Москаленко, Г. Б. Вайнштейн, Н. А. Рябчикова и др., Региональное кровообращение и микроциркуляция **9** (3), 43 (2010).
6. L. M. Levy and G. Di Chiro, Neuroradiology **32**, 399 (1990).

7. *Остеопатия: учебник для медицинских вузов*, под ред. Т. И. Кравченко (СпецЛит, СПб, 2014), т. 1, сс. 334–335.
8. F. Loth, M. A. Yardimci, and N. Alperin, J. Biomech. Eng. **123** (1), 71 (2001). DOI: 10.1115/1.1336144
9. Ю. Е. Москаленко, Г. Б. Вайнштейн, П. Хальворсон и др., Региональное кровообращение и микроциркуляция **9** (2), 18 (2010).
10. Г. П. Бургман и Т. Н. Лобкова, *Исследование спиномозговой жидкости* («Медицина», М., 1968).
11. В. И. Решетилов, Вопросы нейрохирургии, № 6, 45 (1982).
12. В. С. Владимиров и В. В. Жаринов, Уравнения математической физики (Физматлит, М., 2004).
13. N. J. Alperin, S. H. Lee, F. Loth, et al., Radiology **217** (3), 877 (2000).

Noninvasive Approach in the Hydrodynamics of the Cerebrospinal Fluid in the Spinal Cavity Spine

A.G. Zverev and U.N. Tokarev

Nuclear Safety Institute, Russian Academy of Sciences, Bolshaya Tulskaya ul. 52, Moscow, 115191, Russia

A convenient method for the analytical calculation of the flow speed and mass flow rate of the cerebrospinal fluid in model of the spinal cavity, depending on the patients pulse is suggested. Velocity values and velocity profiles are provided, which allows using them for real spine calculation. These estimates allow a more informative description of the diagnosis of spinal pathology.

Keywords: cerebrospinal fluid, liquor, velocity profile, Womersley number