

К ТЕОРИИ ЯВЛЕНИЯ СУПЕРКОМПЕНСАЦИИ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОГО ПЕРЕТОРМОЖЕННОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

© 2022 г. А.А. Зайцев^{*,#}, С.В. Сазонов^{**}, ^{***}, ^{****}, ^{##}

^{*}Калининградский государственный технический университет,
Советский просп., 1, Калининград, 236000, Россия

[#]E-mail: aaz039@yandex.ru

^{**}Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»,
123182, Москва, пл. академика Курчатова, 1, Россия

^{***}Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет),
Волоколамское шоссе, 4, Москва, 125993, Россия

^{****}Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
Ленинские горы, 1/2, Москва, 191991, Россия

^{##}E-mail: sazonov.sergey@gmail.com

Поступила в редакцию 19.10.2021 г.

После доработки 19.10.2021 г.

Принята к публикации 02.09.2022 г.

Предложен аналитический подход к описанию явления суперкомпенсации на основе уравнения нелинейного переторможенного осциллятора Дюффинга. Получено выражение для порогового значения функционального сдвига живого организма. Найдено и проанализировано приближенное решение, которое описывает временную динамику функционального сдвига, включая фазу суперкомпенсации первого порядка.

Ключевые слова: суперкомпенсация, функциональный сдвиг, нелинейность, нелинейный переторможенный осциллятор.

DOI: 10.31857/S0006302922060242, EDN: LMNDEM

Процессы восстановления живых организмов после интенсивных физических нагрузок часто происходят через фазу суперкомпенсации [1–6]. Данный эффект, как правило, способствует увеличению функциональных способностей организма.

Суть явления состоит в следующем. Пусть Q – один из динамических параметров, характеризующих состояние организма. Например, это может быть мгновенное значение пульса или, другими словами, частоты сердечных сокращений. В состоянии равновесия $Q = Q_{\text{eq}}$. При внешних воздействиях на организм значение Q изменяется, в результате чего данный динамический параметр начинает зависеть от времени t : $Q = Q(t)$. Определим функциональный сдвиг $P(t)$ данного параметра равенством $P(t) = Q_{\text{eq}} - Q(t)$. Очевидно, что если организм находится в равновесном состоянии, то $P = 0$. Реакция организма на внешнюю физическую нагрузку проявляется в том, что параметр Q отклоняется от равновесного значения. Пусть, например, при этом $Q > Q_{\text{eq}}$, тогда $P < 0$. При небольших внешних нагрузках после их пре-

ращения происходит плавная релаксация функционального сдвига к нулевому значению. Однако если сразу после действия интенсивной нагрузки величина сдвига превышает некоторое пороговое значение P_{th} , то релаксация сдвига к нулевому значению имеет квазиосциллирующий характер. В таком случае говорят о явлении суперкомпенсации (или о сверхвосстановлении). При релаксации P к нулевому значению посредством одной квазиосцилляции (одного экстремума в зависимости $P(t)$) имеем суперкомпенсацию первого порядка (рис. 1а). Если процесс релаксации включает две квазиосцилляции (два экстремума в зависимости $P(t)$), говорят о суперкомпенсации второго порядка (рис. 1б) и т.д.

В основе эффекта суперкомпенсации лежат процессы пластического характера в утомленных органах и тканях живого организма [7].

В работе [8] было предложено описывать явление суперкомпенсации на основе уравнения затухающего осциллятора с кубической нелинейностью для функционального сдвига

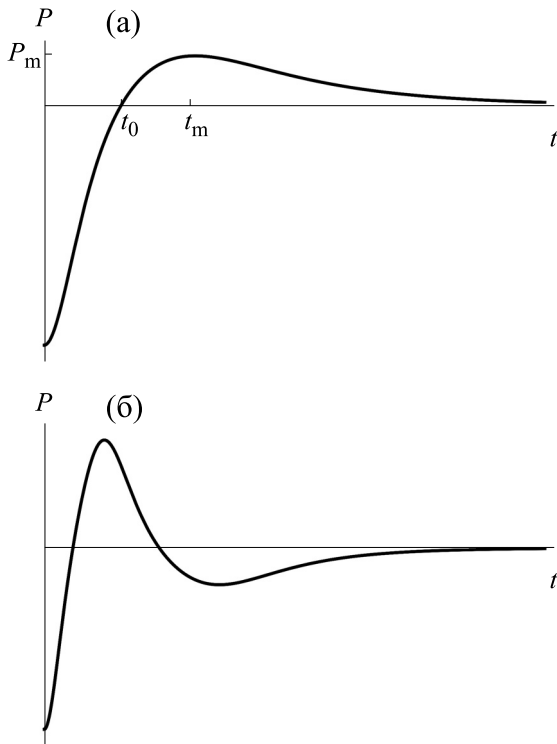


Рис. 1. Эффекты суперкомпенсации первого (а) и второго (б) порядков; t_0 и t_m – соответственно времена начала и максимума фазы суперкомпенсации первого порядка, $P_m = P(t_m)$ – максимальное значение функционального сдвига в фазе суперкомпенсации первого порядка.

$$\ddot{P} + 2\gamma\dot{P} + \omega_0^2 P + \beta P^3 = 0. \tag{1}$$

где γ и ω_0 – постоянные параметры, характеризующие соответственно вязкую и упругую сопротивляемости организма по отношению к выводу его из равновесного состояния, при котором $P = 0$, β – нелинейный коэффициент упругой сопротивляемости, точка сверху означает производную по времени.

Условие переторможенности $\gamma > \omega_0$ наряду с жесткой ($\beta > 0$) нелинейностью обеспечивает пороговый по начальному сдвигу ($|P(0)| > P_{th}$) характер эффекта [8]. Для реализации эффекта суперкомпенсации в случае здорового организма переторможенность должна быть относительно слабой, такой, что (см. работу [8])

$$1 \leq \gamma/\omega_0 \leq 1.1. \tag{2}$$

Численные эксперименты, проведенные в работе [8], показали, что уравнение (1) наряду с условием слабой переторможенности (2) достаточно корректно описывает эффект суперкомпенсации и его пороговый характер. Однако с помощью численных экспериментов затруднительно сделать прогнозные оценки в появлении

данного эффекта и характере его протекания во времени в зависимости от величины нагрузки на организм, а также от соотношения между параметрами γ и ω_0 . Здесь необходимо использовать приближенные аналитические методы решения уравнения (1).

Заметим, что в случае, когда $\gamma/\omega_0 \ll 1$, разработан ряд аналитических методов для нахождения приближенных аналитических решений уравнения (1). Можно выделить методы Ван-дер-Поля, Крылова–Боголюбова–Митропольского, Линшtedта–Пуанкаре, метод многих масштабов и др. [9]. В другом, противоположном случае ($\gamma/\omega_0 \gg 1$) хорошо зарекомендовал себя метод пограничного слоя [9]. Этим двум взаимно противоположным условиям не удовлетворяют значения отношения γ/ω_0 из интервала (2).

Следует отметить, что при $\gamma/\omega_0 = 3/\sqrt{8} \approx 1.06$ имеется одно точное решение уравнения (1) [10, 11]. Важно, что данное значение параметра γ попадает в интервал, определенный двойным неравенством (2). В работе [12] был предложен приближенный подход для нахождения приближенного решения уравнения (1) при $\gamma/\omega_0 = 1$, основанный на асимптотическом методе Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна. В то же время при слабой переторможенности отсутствуют методы поиска приближенных аналитических решений уравнения (1), справедливые для всех отношений γ/ω_0 из интервала значений (2).

Настоящая работа посвящена представлению и развитию оригинального приближенного метода решения нелинейного уравнения Дюффинга (1) при условии слабой переторможенности (2) и анализу на этой основе явления суперкомпенсации.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ, ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ И ЕГО АНАЛИЗ

После масштабных преобразований

$$P = \frac{\omega_0}{\sqrt{\beta}} R, \quad t = \frac{\tau}{\omega_0}, \quad \Gamma = \frac{\gamma}{\omega_0} \tag{3}$$

уравнение (1) и условие слабой переторможенности (2) примут соответственно вид

$$\frac{d^2 R}{d\tau^2} + 2\Gamma \frac{dR}{d\tau} + R + R^3 = 0, \tag{1a}$$

$$1 \leq \Gamma \leq 1.1. \tag{2a}$$

Будем считать, что действие внешней нагрузки на организм соответствует отрицательным временам. При $t = \tau = 0$ действие нагрузки прекращается и начинается восстановление организма. В соответствии с этим для обезразмеренного функци-

Таблица 1. Подобранные значения параметров

| Γ | 1.00 | 1.05 | 1.10 |
|------------|--------|--------|--------|
| I_{\min} | 0.0008 | 0.0012 | 0.0018 |
| σ | 0.800 | 0.745 | 0.690 |

онального сдвига R при $\tau = 0$ имеем следующие начальные условия:

$$R(0) = R_0, \left(\frac{dR}{d\tau}\right)_{\tau=0} = 0. \quad (4)$$

При этом величина R_0 связана с начальным значением P_0 функционального сдвига очевидным соотношением $P_0 = \omega_0 R_0 / \sqrt{\beta}$ (см. первое выражение (3)).

Для аналитического исследования, следуя работе [12], нелинейное слагаемое в уравнении (1а) перепишем в приближенном виде:

$$R^3 \approx R_i^2(\tau)R, \quad (5)$$

где $R_i(\tau)$ – решение линеаризованной задачи (1а), (2а):

$$R_i(\tau) = R_0 e^{-\Gamma\tau} \left[\operatorname{ch}(\sqrt{\Gamma^2 - 1}\tau) + \frac{\Gamma}{\sqrt{\Gamma^2 - 1}} \operatorname{sh}(\sqrt{\Gamma^2 - 1}\tau) \right]. \quad (6)$$

Тогда уравнение (1а) примет вид

$$\ddot{R} + 2\Gamma\dot{R} + R + R_i^2(\tau)R = 0. \quad (7)$$

Представляя R как

$$R = e^{-\Gamma\tau}\psi(\tau) \quad (8)$$

и подставляя данное выражение в уравнение (7), приходим к уравнению

$$\frac{d^2\psi}{d\tau^2} + R_i^2(\tau)\psi = (\Gamma^2 - 1)\psi. \quad (9)$$

Уравнение (9) формально совпадает со стационарным уравнением Шредингера из квантовой механики [13] для частицы с энергией $E = -(\Gamma^2 - 1)/2$, движущейся в потенциальной яме

$$U(\tau) = -\frac{R_i^2}{2}. \quad (10)$$

где роль координаты играет безразмерное время τ .

Аппроксимируем $U(\tau)$ модифицированным потенциалом Пешля–Теллера [14]:

$$U(\tau) \approx U_{PT}(\tau) = -\frac{R_0^2}{2} \operatorname{sech}^2(\alpha\tau), \quad (11)$$

где α – подлежащая определению постоянная.

Для определения α воспользуемся методом наименьших квадратов [15], согласно которому минимизируется интеграл

$$I \equiv \int_0^{\infty} (U(\tau) - U_{PT}(\tau))^2 d\tau.$$

В результате найдем α как функцию декремента затухания Γ (см. уравнения (6) и (10)). Сначала запишем $\alpha = \Gamma\sigma$. Затем простым перебором для разных Γ найдем те значения σ , при которых интеграл I принимает минимальные значения I_{\min} . Соответствующие данные сведены в табл. 1.

Нетрудно видеть, что эти данные в промежутке $1 \leq \Gamma \leq 1.1$ удовлетворяют следующей зависимости: $\sigma = 0.8 - 1.1(\Gamma - 1.0) = 0.8[1.0 - 1.375(\Gamma - 1.0)]$. Так как параметр σ принимает только положительные значения, предположим, что выражение в квадратных скобках представляет собой первые два члена разложения экспоненты в ряд Тейлора. Таким образом, $\sigma = 0.8 \exp[-1.375(\Gamma - 1.0)]$. Следовательно, имеем:

$$\alpha = \frac{4}{5} \Gamma e^{-11(\Gamma-1)/8}. \quad (12)$$

Формальная проверка показывает, что данное выражение с хорошей точностью выполняется вплоть до $\Gamma = 1.5$.

На рис. 2 показаны профили кривых (10), (6) и (11) при равенстве (12). Заметно удовлетворительное совпадение обеих кривых.

Теперь совершим формальный прием: продлим четным образом зависимость $U(\tau)$ в область отрицательных значений τ . В этом случае мы можем использовать результаты квантовомеханической задачи для потенциала Пешля–Теллера на всем интервале значений τ от $-\infty$ до $+\infty$. Также четным образом продлим в область отрицательных времен зависимость $R(\tau)$. Это соответствует начальным условиям (4). Тогда число связанных состояний $n + 1$ в потенциальной яме Пешля–Теллера соответствует порядку суперкомпенсации n при том, что основному связанному состоянию соответствует $n = 0$. Действительно, согласно теории одномерного движения в квантовой механике волновая функция основного состояния нигде не пересекает ось абсцисс, а одно связанное состояние существует при любой, сколь угодно малой глубине потенциальной ямы. Значит, наличие только одного связанного состояния не приводит к эффекту суперкомпенсации. Для проявления же эффекта суперкомпенсации глубина потенциальной ямы должна быть таковой, чтобы в ней содержалось не менее двух связанных состояний. Ниже ограничимся рассмотрением суперкомпенсации первого порядка ($n = 1$), что соответствует двум связанным состояниям в рассматриваемой потенциальной яме.

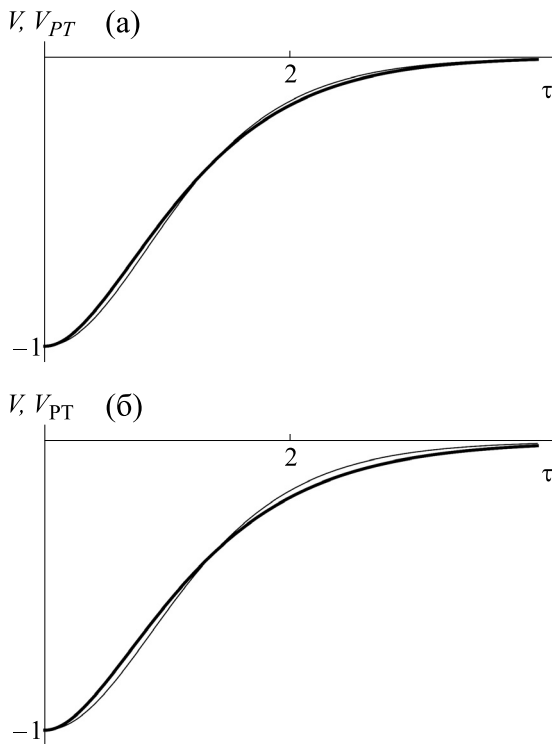


Рис. 2. Зависимости «потенциалов» $V = 2U/R_0^2$ (жирные кривые) и $V_{PT} = 2U_{PT}/R_0^2$ (тонкие кривые) от безразмерного времени τ при $\Gamma = 1.0$ (а) и $\Gamma = 1.1$ (б).

Приняв во внимание уравнение (11), запишем с учетом замены $R_0 \rightarrow R_{th}$ выражение для собственных значений энергии связанных состояний в следующем виде [13]:

$$E = -\frac{\alpha^2}{8} \left[\sqrt{1 + \frac{4R_{th}^2}{\alpha^2}} - (1 + 2n) \right]^2.$$

С другой стороны, как было отмечено выше, $E = -(\Gamma^2 - 1)/2$. Приравнивая друг другу правые части данных выражений и полагая в уравнении (15) $n = 1$, будем иметь

$$R_{th} = \left[(\alpha + \sqrt{\Gamma^2 - 1})(2\alpha + \sqrt{\Gamma^2 - 1}) \right]^{1/2}. \quad (13)$$

При этом α определяется выражением (12), а $P_{th} = \omega_0 R_{th} / \sqrt{\beta}$.

Величиной R_{th} определяется наименьшее (критическое) начальное значение обезразмеренного функционального сдвига, при превышении которого возникает явление суперкомпенсации первого порядка.

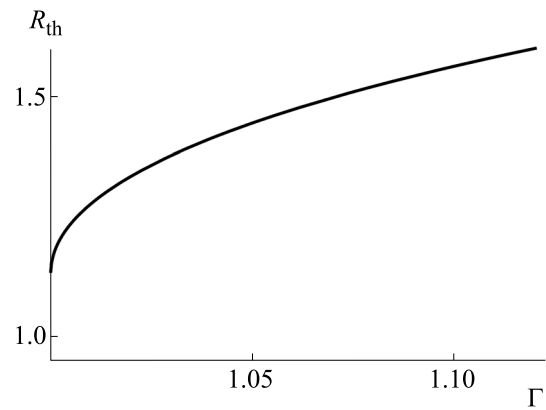


Рис. 3. Зависимость безразмерного порогового значения R_{th} функционального сдвига от параметра Γ .

В работе [11] было найдено точное решение задачи (1а), (4) при $\Gamma = 3/\sqrt{8} \approx 1.06$. Поэтому для тестирования формул (12) и (13) удобно рассмотреть именно этот случай. Подставив в уравнения (12) и (13) $\Gamma = 1.06$, найдем $R_{th} = 1.47$. Это практически совпадает с результатом, полученным в работе [11] точными математическими методами. Данное обстоятельство является серьезным аргументом в пользу корректности формул (12) и (13).

Преимущество используемого приближенного подхода в сравнении с точным подходом, проведенным в работе [11], состоит в том, что полученные здесь основные выражения (12) и (13) справедливы не только при $\Gamma = 1.06$, но и при других значениях Γ из допустимого интервала (2а). Полагая, например, $\Gamma = 1.0$, будем иметь $R_{th} = 1.13$. В работе [12], где для приближенного решения задачи (1), (2) был использован метод Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна, было получено значение $R_{th} = 1.15$, что очень близко к 1.13. Однако хорошее совпадение нашего результата с результатом, найденным в работе [11] с помощью точного решения, дает нам основания утверждать, что $R_{th} = 1.13$ при $\Gamma = 1.0$ уточняет соответствующий результат, полученный в работе [12].

На рис. 3 изображена зависимость $R_{th}(\Gamma)$, построенная на основе уравнений (12) и (13) в интервале $1.0 \leq \Gamma \leq 1.1$. Как и следовало ожидать, R_{th} монотонно возрастает с увеличением диссипативного параметра Γ .

Общее решение уравнения (9) может быть представлено в виде линейной комбинации четной и нечетной собственных функций [14]:

$$\psi = \text{ch}^\lambda \alpha \tau \left[AF \left(a, b, \frac{1}{2}; -\text{sh}^2 \alpha \tau \right) + B \text{sh} \alpha \tau F \left(a + \frac{1}{2}, b + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -\text{sh}^2 \alpha \tau \right) \right], \quad (14)$$

где $F(a, b, c; x)$ – гипергеометрическая функция аргумента x [15]; A и B – постоянные, определяемые из начальных условий;

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4R_0^2}{\alpha^2}} - 1 \right), \quad a = \frac{1}{2} \left(\lambda - \frac{\sqrt{\Gamma^2 - 1}}{\alpha} \right), \quad b = \frac{1}{2} \left(\lambda + \frac{\sqrt{\Gamma^2 - 1}}{\alpha} \right). \quad (15)$$

Приняв во внимание выражения (8) и (4), запишем интересующее нас решение в виде

$$R = R_0 e^{-\Gamma \tau} \operatorname{ch} \lambda \alpha \tau \left[F \left(a, b, \frac{1}{2}; -\operatorname{sh}^2 \alpha \tau \right) + \frac{\Gamma}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha \tau F \left(a + \frac{1}{2}, b + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -\operatorname{sh}^2 \alpha \tau \right) \right]. \quad (16)$$

Данное выражение содержит в себе решение (6) линейной задачи как частный случай $R_0 \rightarrow 0$. Действительно, как видно из выражений (15), в этом случае $\lambda = 0$, $a = -b = -\sqrt{\Gamma^2 - 1} / (2\alpha)$. Учитывая также, что $F(-b, b, 1/2; -\operatorname{sh}^2 \alpha \tau) = \operatorname{ch}^2 \alpha \tau$, $F(-b + 1/2, b + 1/2, 3/2; -\operatorname{sh}^2 \alpha \tau) = \operatorname{sh}(2b\alpha\tau) / (2b\operatorname{sh}\alpha\tau)$, из решения (16) приходим к решению (6). Данное обстоятельство является существенным аргументом в пользу решения (15), (16).

На рис. 4 изображены кривые, построенные на основе выражений (12), (15), (16) и на основе численного решения задачи (1а), (4) при $\Gamma = 1.5$ и $R_0 = 3.0$. В этом случае вычисление по формуле (13) дает для порогового значения безразмерного функционального сдвига $R_{\text{th}} = 1.44$. Налицо вполне удовлетворительное согласие между численным экспериментом и аналитическим решением (16), где постоянные параметры определяются по формулам (12) и (15).

Приравняв правую часть уравнения (16) к нулю, можно найти τ_0 – безразмерное время начала

фазы суперкомпенсации. В свою очередь, приравняв к нулю производную по τ той же правой части, можно в принципе найти безразмерное время τ_m экстремальной (развитой) стадии фазы суперкомпенсации. Затем с помощью второй формулы (3) можно найти соответствующие размерные времена τ_0 и τ_m (см. рис. 1). Соответствующие уравнения являются трансцендентными, содержащими гипергеометрические функции. Поэтому они не очень удобны для анализа. С другой стороны, нетрудно заметить, что при заметном превышении начальным значением функционального сдвига пороговой величины R_{th} справедлива оценка $\tau_0 \sim 1/\Gamma$. Отсюда, а также из формул (3) имеем $t_0 \sim 1/\gamma$. Для оценки интервала $t_m - t_0$ заметим, что в фазе суперкомпенсации значения $R_m = \sqrt{\beta P_m / \omega_0}$ относительно невелики (см. рис. 1). Следовательно, здесь можно пренебречь нелинейностью и рассматривать линейное решение (6) с заменами $\tau \rightarrow \tau - \tau_m$ и $R_0 \rightarrow R_m$ [12]. Таким образом, имеем

$$R_i(\tau) \approx R_m e^{-\Gamma(\tau - \tau_m)} \left[\operatorname{ch} \left(\sqrt{\Gamma^2 - 1} (\tau - \tau_m) \right) + \frac{\Gamma}{\sqrt{\Gamma^2 - 1}} \operatorname{sh} \left(\sqrt{\Gamma^2 - 1} (\tau - \tau_m) \right) \right].$$

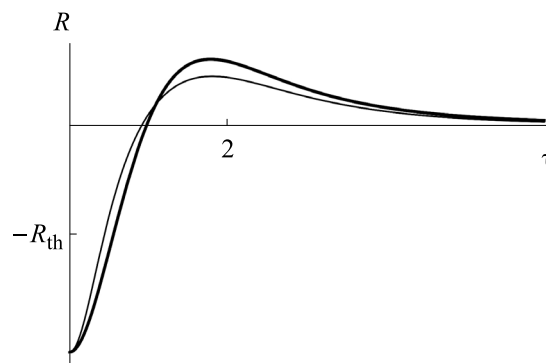


Рис. 4. Временные зависимости функционального сдвига одного и того же организма, построенные на основе аналитического решения (12), (15) и (16) (жирная кривая) и на основе численного решения уравнения (1а) при начальных условиях (4) (тонкая кривая).

Так как при $\tau = \tau_0$ сдвиг R обращается в ноль, отсюда находим $\text{th}\left(\sqrt{\Gamma^2 - 1}(\tau_0 - \tau_m)\right) \approx \sqrt{\Gamma^2 - 1} / \Gamma$. Так как, согласно условию (2а), значение Γ очень близко к единице, обе части последнего равенства малы. Приближенно заменяя в этих условиях гиперболический тангенс его аргументом, получим $\tau_m - \tau_0 \approx 1/\Gamma$. Отсюда и из формул (3) находим для размерных времен

$$t_m - t_0 \approx 1/\gamma. \quad (17)$$

Из рис. 1 и 4 видно, что фаза суперкомпенсации несимметрична относительно времени t_m , соответствующего слабо выраженному локальному максимуму. Продолжительность данной фазы после t_m примерно в три раза превышает промежуток $t_m - t_0$. Отмерив интервал, равный примерно $3(t_m - t_0) \approx 3/\gamma$ от значения t_m , приходим к практическому окончанию фазы суперкомпенсации.

Таким образом, можно сказать, что спустя время, равное $t_0 \approx 1/\gamma$ после начала процесса восстановления наступает фаза суперкомпенсации. Далее, при $t = t_m \approx 2/\gamma$, наступает развитая стадия фазы суперкомпенсации, а при $t \approx 5/\gamma$ следует практическое окончание данной фазы. В результате для интервала времени Δt , где организм пребывает в фазе суперкомпенсации, справедлива приближенная оценка $\Delta t \approx 4/\gamma$.

Приведем пример на использование полученных здесь результатов. Пусть у тренированного спортсмена пульс в покое равен $Q_{\text{eq}} = 60$ ударов в минуту. При этом параметры его организма следующие: $\gamma = 1.33 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$, $\omega_0 = 1.27 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$, $\beta = 1.5 \cdot 10^{-4}$ [12]. Тогда после использования масштабных преобразований (3) получим $\Gamma = 1.047$. Подставляя данное значение в формулы (12) и (13), найдем $R_{\text{th}} = 1.435$. Используя далее формулы (3), получим $\omega_0 R_{\text{th}} / \sqrt{\beta} = 1.49 \text{ с}^{-1} \approx 89 \text{ уд/мин}$. Таким образом, для наступления фазы суперкомпенсации пульс спортсмена сразу после снятия интенсивной нагрузки должен превышать значение $Q_{\text{th}} = Q_{\text{eq}} + P_{\text{th}} = 149 \text{ уд/мин}$. При этом стадия суперкомпенсации наступит примерно через $t_0 \approx 1/\gamma = 75 \text{ с}$ и продлится порядка пяти минут.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный в настоящей работе подход основан на приближенном представлении кубически нелинейного слагаемого в виде (5). Это позволило эффективно линеаризовать уравнение (1а) и найти приближенное решение (16) уравнения (1а). В результате удается проследить наступление фазы суперкомпенсации или ее отсутствие. Для реализации данной фазы абсолютное началь-

ное значение функционального сдвига организма (сразу после действия внешней нагрузки) должно превышать пороговую величину, вычисляемую по формуле (13), где параметр α определяется с помощью выражения (12). Пожалуй, это является основным результатом данной работы.

Подчеркнем, что использованный здесь приближенный подход позволяет определять основные параметры, характеризующие явление суперкомпенсации только первого порядка. Попытка его использования для описания суперкомпенсации высших порядков не привела к успеху. Здесь, по-видимому, необходимо развивать другие подходы. Понятно, что пороговые значения функционального сдвига для суперкомпенсации высших порядков должны значительно превышать соответствующие пороговые значения в случае эффекта первого порядка. Таким образом, при высших порядках суперкомпенсации возрастает роль нелинейности. В этой связи следует заметить, что использованная в уравнениях (1) и (1а) только кубическая нелинейность скорее всего пригодна лишь для описания эффекта суперкомпенсации первого порядка. Каковой должна быть нелинейность при описании суперкомпенсации высших порядков, должны показать будущие исследования с обязательным анализом экспериментальных данных.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СОБЛЮДЕНИЕ ЭТИЧЕСКИХ СТАНДАРТОВ

Статья не содержит описания исследований, выполненных с участием людей или использованием животных в качестве объектов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. В. Розенблат, *Проблема утомления* (Медицина, М., 1975).
2. В. Н. Платонов, *Подготовка квалифицированных спортсменов* (Физкультура и спорт, М., 1986).
3. В. П. Луговцев, *Восстановительные процессы после мышечной деятельности* (СГИФК, Смоленск, 1988).
4. Ю. В. Верхошанский, *Основы специальной физической подготовки спортсменов* (Физкультура и спорт, М., 1988).
5. В. С. Мищенко, В. А. Мироненко, А. И. Павлик и др., Теория и практика физической культуры, № 5, 17 (1990).
6. В. Э. Ээпик и А. А. Виру, Теория и практика физической культуры, № 5, 24 (1990).

7. Н. А. Фомин и Ю. Н. Вавилов, *Физиологические основы двигательной активности* (Физкультура и спорт, М., 1991).
8. А. А. Зайцев и С. В. Сазонов, *Биофизика*, **42** (2), 521 (1997).
9. А. Найфэ, *Введение в методы возмущений* (Мир, М., 1984).
10. Ю. В. Брежнев, А. А. Зайцев и С. В. Сазонов, *Биофизика*, **56** (2), 342 (2011).
11. Ю. В. Брежнев и С. В. Сазонов, *Журн. эксперим. и теорет. физики*, **146** (5), 1106 (2014).
12. А. А. Зайцев и С. В. Сазонов, *Биофизика*, **52** (4), 727 (2007).
13. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Т. 3. Квантовая механика: нерелятивистская теория* (Наука, М., 1989).
14. З. Флюгге, *Задачи по квантовой механике* (Мир, М., 1974), т. 1.
15. А. Анго, *Математика для электро- и радиоинженеров* (Наука, М., 1967).

To the Theory of the Supercompensation Phenomenon Based on a Model of a Nonlinear Overdamped Oscillator

A.A. Zaitsev* and S.V. Sazonov, ***, ******

**Kaliningrad State Technical University, Sovetskii prosp. 1, Kaliningrad, 236000, Russia*

***National Research Centre "Kurchatov Institute", pl. akademika Kurchatova 1, Moscow, 123182 Russia*

****Moscow Aviation Institute (National Research University), Volokolamskoe shosse 4, Moscow, 125993 Russia*

*****Lomonosov Moscow State University, Leninskie Gory 1/2, Moscow, 191991 Russia*

In this paper, an analytical approach to the description of the supercompensation phenomenon based on a nonlinear overdamped Duffing oscillator equation is proposed. An expression for the threshold value of a functional shift of the living body is obtained. An approximate solution is found and analyzed, this solution describes the temporal dynamics of the functional shift, including a first-order supercompensation phase.

Keywords: supercompensation, functional shift, nonlinearity, nonlinear overdamped oscillator