ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2020, том 490, с. 52–56

МЕХАНИКА

УДК 517.54532.5556.3

ТОЧНОЕ ПОЛУОБРАТНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ СЕМЕЙСТВА ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДРЕНИРУЮЩЕГО СКЛОНА

© 2020 г. К. Н. Анахаев[1,2,*], В. В. Беликов[2,**]

Представлено академиком РАН Н.Ф. Морозовым 08.07.2019 г.
Поступило 29.07.2019 г.
После доработки 29.07.2019 г.
Принято к публикации 02.10.2019 г.

Одной из основных причин возникновения опасных геофизических склоновых явлений является водонасыщение склонов и негативное гидродинамическое воздействие на них потока подземных вод. В работе получено точное полуобратное гидромеханическое решение для семейства геофизических задач дренирующего склона на основе теории функции комплексного переменного. Методом последовательных конформных отображений установлена аналитическая взаимосвязь между областями комплексного потенциала и комплекса Н.Е. Жуковского, позволяющая определять все необходимые параметры области фильтрации. Приведен пример расчета с определением очертаний линий водоупора, участка высачивания, депрессионной поверхности, а также линий токов и равных напоров (эквипотенциалей) с построением ортогональной и квадратичной гидродинамической сетки фильтрационного потока, высачивающегося через дренирующий склон. Дана краткая оценка влияния фильтрации на суффозионную и оползневую устойчивость грунтового массива дренирующего склона.

Ключевые слова: комплексная переменная, комплекс Жуковского, конформные отображения, полуобратное гидромеханическое решение, участок высачивания, гидродинамическая сетка фильтрации, дренирующий склон

DOI: 10.31857/S2686740020010046

Как известно, одной из основных причин возникновения опасных геофизических склоновых явлений, таких как оползни, обвалы, сели и др., является водонасыщение проницаемых склонов и негативное гидродинамическое воздействие на них потока подземных (грунтовых) вод. Множественность различных форм и очертаний естественных склонов и подстилающих их непроницаемых грунтов – водоупора (скальных и полускальных пород, плотных глин и суглинков), затрудняет принятие однозначных граничных условий при гидромеханическом рассмотрении указанной задачи. В этих условиях наиболее приемлемым является использование полуобратного гидромеханическое метода на основе комплекса Н.Е. Жуковского [1–3], позволяющего получить точные решения для большого числа (семейства) задач с различными граничными очертаниями и отдельными, наперед заданными параметрами потока. Указанный полуобратный метод широко используется при рассмотрении задач свободной фильтрации из водотоков различного профиля (см. [4–7] и др.), однако для решения задач безнапорной фильтрации из прилегающих грунтовых массивов в дренирующие русла он не получил еще должного развития [3, 8].

Ниже рассматривается геофизическая задача высачивания на дренирующий склон AE фильтрующегося через участок AB потенциального потока подземных вод по подстилаемой криволинейной поверхности водоупора AD (рис. 1).

Решение указанной задачи получаем полуобратным методом путем последовательных конформных отображений области комплексного потенциала $W = \psi + i\varphi$, где ψ и φ – функция тока и напорная функция соответственно (рис. 2а), на область комплекса Н.Е. Жуковского $\theta = \theta_1 + i\theta_2$ (рис. 3а) [1–7]. В последней величине θ_2 и θ_1 – координаты указанной комплексной области, зада-

[1]*Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук, Нальчик, Россия*
[2]*Институт водных проблем Российской академии наук, Москва, Россия*
**E-mail: anaha13@mail.ru*
***E-mail: belvv@bk.ru*

ющие линии равного давления и ортогональные им линии, значения которых

$$\theta_2 = \varphi - y; \quad \theta_1 = x + \psi, \tag{1}$$

где x и y – текущие координаты физической области течения (рис. 1).

В области комплексного потенциала $W = \psi + i\varphi$ (рис. 2а) кривая AB соответствует участку высачивания склона, а в области комплекса Жуковского $\theta = \theta_1 + i\theta_2$ (рис. 3а) область фильтрации заключена между прямой AC – горизонтальной полуосью $0x$ и кривой AD, соответствующей поверхности водоупора.

Значения W, ψ, φ, а также удельного фильтрационного расхода q являются "приведенными" величинами к условным линейным размерам:

$$W = \frac{W_n}{k}, \quad \psi = \frac{\psi_n}{k}, \quad \varphi = \frac{\varphi_n}{k}, \quad q = \frac{q_n}{k}, \tag{2}$$

где k – коэффициент фильтрации грунта дренирующего склона, а символы с индексами n являются действительными значениями этих величин.

Примем следующие граничные условия расчетной схемы области фильтрации $ABCD$ (рис. 1):

1) решение задачи рассматривается в плоскопараллельной постановке;

2) функция тока ψ возрастает от нулевого значения $\psi = 0$ на линии водоупора AD до максимальной величины $\psi = q$ на депрессионной поверхности BC, в том числе и по высоте участка высачивания AB;

3) напорная функция φ на участке высачивания AB и поверхности депрессии BC возрастает линейно $\varphi = y$;

4) значения напорной функции φ по линиям депрессионной поверхности BC и водоупора AD при $x \to \infty$ также $\varphi \to \infty$;

5) высота h участка высачивания AB принята равной $h = 1$ (в усл. ед.);

6) поверхность водоупора AD непроницаема и является линией тока $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$.

В рассматриваемой задаче очертания линий водоупора AD, участка высачивания AB и депрессионной поверхности BC определяются заданными значениями фильтрационного расхода q, заложения L участка высачивания AB, а также формами областей комплексного потенциала $W = \psi + i\varphi$ (рис. 2а) и комплекса Жуковского $\theta = \theta_1 + i\theta_2$ (рис. 3а). Изложенное предопределяет использование полуобратного метода с получением точного решения для большого числа (семейства) задач.

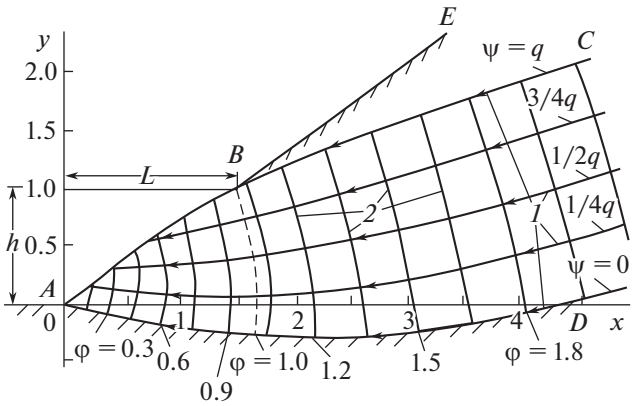

Рис. 1. Расчетная схема высачивания подземных вод через дренирующий склон с квадратичной гидродинамической сеткой фильтрационного потока. Кривые *1* – линии тока, *2* – линии равных напоров.

Аналитическую взаимосвязь между комплексными областями $W = \psi + i\varphi$ и $\theta = \theta_1 + i\theta_2$ устанавливаем путем последовательных конформных отображений их на связующую полуплоскость $\varsigma = \xi + i\eta$ (рис. 2е, рис. 3з) посредством промежуточных комплексных областей $W_1 = \psi_1 + i\varphi_1$, $N = N_1 + iN_2$, $t = t_1 + it_2$, $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$ (рис. 2б–д) и $S = S_1 + iS_2$, $J = J_1 + iJ_2$, $\overline{J} = \overline{J}_1 + i\overline{J}_2$, $\delta = \delta_1 + i\delta_2$, $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$, $\tau = \tau_1 + i\tau_2$, $\overline{\tau} = -\tau_1 + i\tau_2$ (рис. 3б–3ж).

При этом используем следующие отображающие функции [7, 9, 10]:

$$W_1 = \frac{\pi W}{2q}, \quad N = \sin W_1, \quad t = \sqrt{N^2 - b^2},$$
$$\varepsilon = t + \frac{b(a+b)}{t + \sqrt{t^2 + b^2 - a^2}}, \tag{3}$$

$$S = \theta^2, \quad J = S - d^2, \quad \overline{J} = -J_1 + iJ_2, \quad \delta = \sqrt{\overline{J}},$$
$$\gamma = \pi\left(\frac{\delta}{d} - \frac{1}{2}\right), \quad \tau = \sin\gamma, \tag{4}$$
$$\overline{\tau} = -\tau_1 + i\tau_2, \quad \varsigma = (\overline{\tau} + 1)\frac{(a+b)^2}{2},$$

в которых значение $b > 0$ задается, а величины a и d равны соответственно

$$a = t_B = \sqrt{ch^2\frac{\pi h}{2q} - b^2}, \quad d = L + q. \tag{5}$$

Следует отметить, что в процессе указанных отображений кривая AB области комплексного потенциала $W = \psi + i\varphi$ (рис. 2а) получает в промежуточной области $t = t_1 + it_2$ очертание четверти эллипса (рис. 2г), а кривая AD области комплекса Жуковского $\theta = \theta_1 + i\theta_2$ (рис. 3а) в проме-

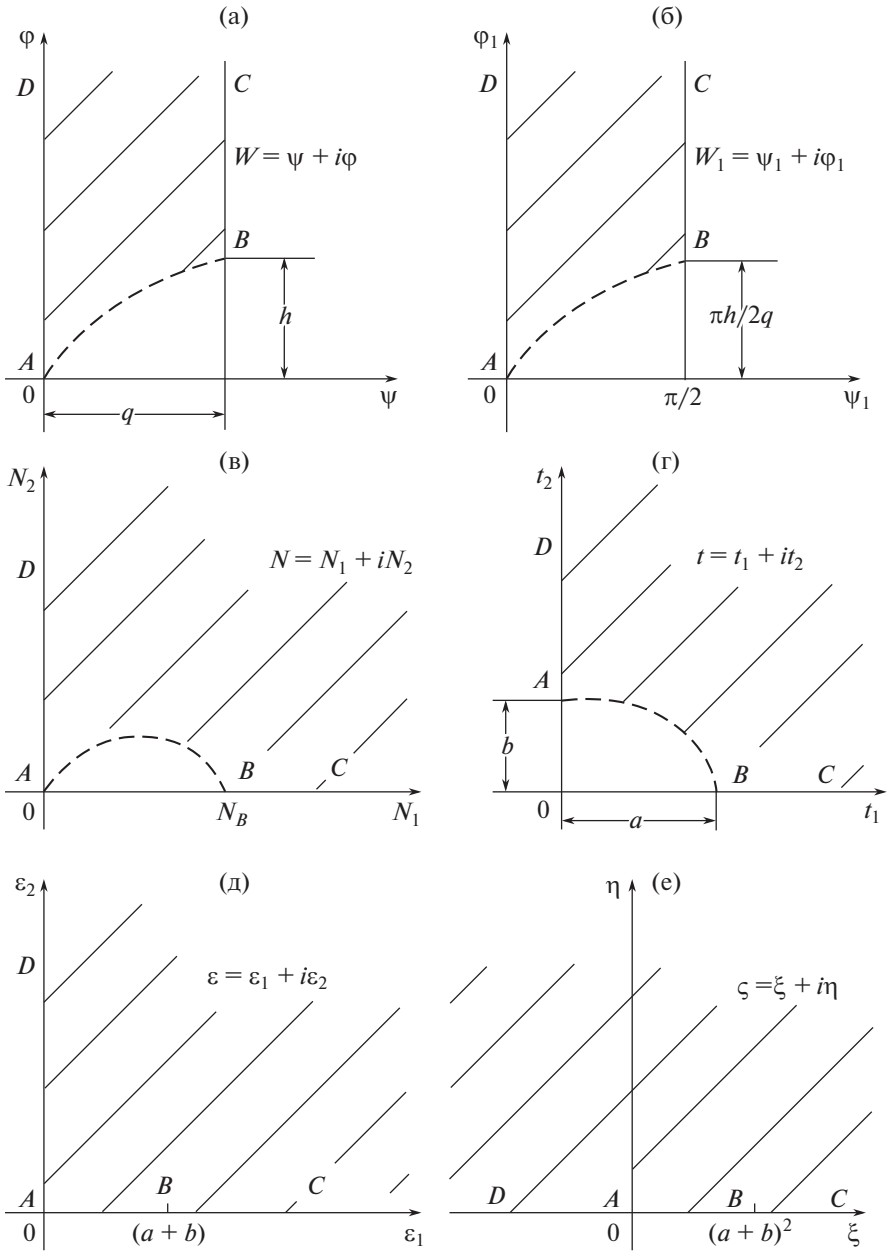

Рис. 2. Схема последовательных конформных отображений области комплексного потенциала $W = \psi + i\varphi$ на комплексную связующую полуплоскость $\varsigma = \xi + i\eta$.

жуточной области $\overline{J} = \overline{J}_1 + i\overline{J}_2$ соответствует уравнению $\overline{J}_2 = 2d\sqrt{d^2 - \overline{J}_1}$ [10] (рис. 3г).

После изложенных конформных отображений и последующих преобразований, разделяя действительную и мнимую части итоговых аналитических выражений, окончательно получим значения функции тока ψ и напорной функции φ в виде

$$\psi = \frac{2q}{\pi}\arcsin\frac{2N_1}{M}, \quad \varphi = \frac{2q}{\pi}\operatorname{Arch}\frac{M}{2}, \tag{6}$$

где $M = \sqrt{(1+N_1)^2 + N_2^2} + \sqrt{(1-N_1)^2 + N_2^2}$,

в которых

$$N_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{A_3^2 + B_3^2} + A_3}{2}}, \quad N_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{A_3^2 + B_3^2} - A_3}{2}},$$

$$A_3 = t_1^2 - t_2^2 + b^2, \quad B_3 = 2t_1t_2,$$

$$t_1 = \frac{a\varepsilon_1 + bA_2}{a+b}, \quad t_2 = \frac{a\varepsilon_2 + bB_2}{a+b},$$

$$A_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} + A_1}{2}}, \quad B_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} - A_1}{2}},$$

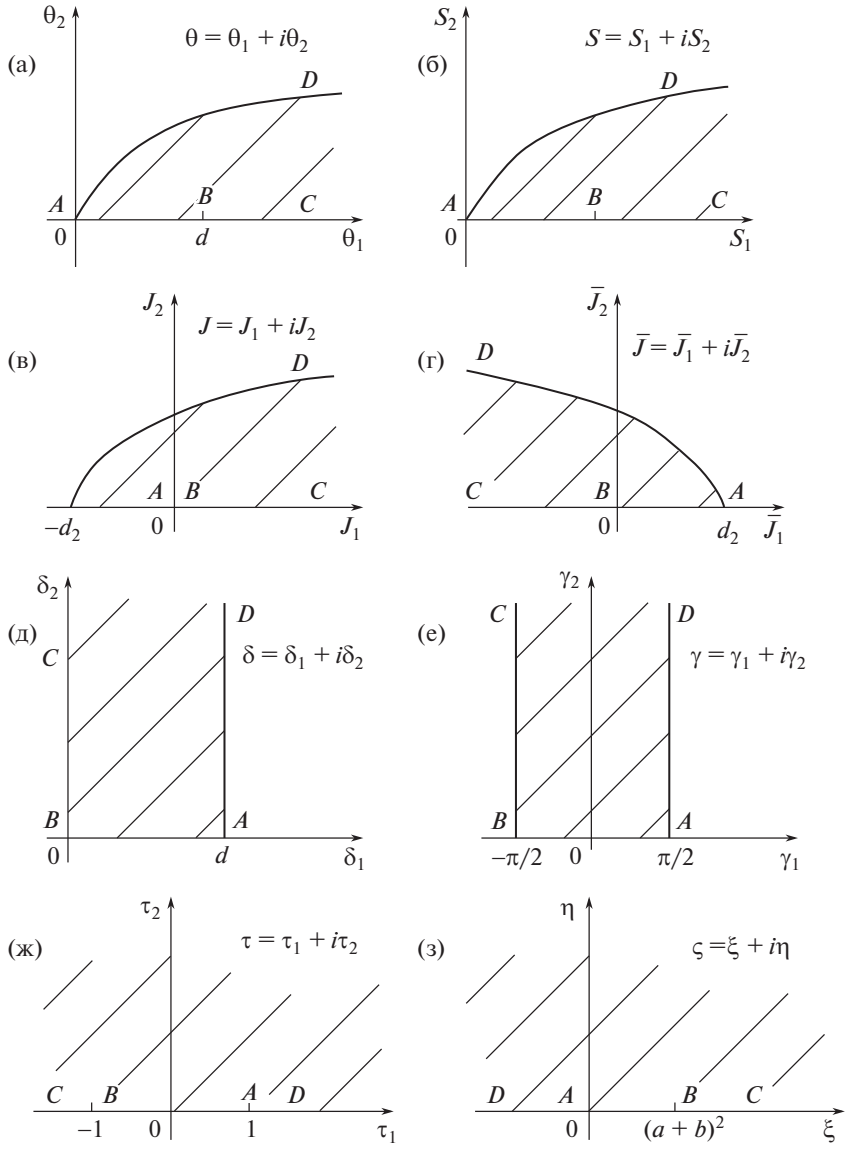

Рис. 3. Схема последовательных конформных отображений области комплекса Жуковского $\theta = \theta_1 + i\theta_2$ на комплексную связующую полуплоскость $\varsigma = \xi + i\eta$.

$$A_1 = \varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 - (a+b)^2, \quad B_1 = 2\varepsilon_1\varepsilon_2,$$

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}+\xi}{2}}, \quad \varepsilon_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}-\xi}{2}}, \tag{7}$$

$$\xi = \frac{1}{2}(a+b)^2(\bar{\tau}_1+1), \quad \eta = \frac{1}{2}(a+b)^2\bar{\tau}_2,$$

$$\bar{\tau}_1 = -\sin\gamma_1 \times \mathrm{ch}\gamma_2, \quad \bar{\tau}_2 = \cos\gamma_1 \times \mathrm{sh}\gamma_2,$$

$$\gamma_1 = \pi\left(\frac{\delta_1}{d} - \frac{1}{2}\right), \quad \gamma_2 = \frac{\pi\delta_2}{d},$$

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{\bar{J}_1^2+\bar{J}_2^2}+\bar{J}_1}{2}}, \quad \delta_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{\bar{J}_1^2+\bar{J}_2^2}-\bar{J}_1}{2}},$$

$$\bar{J}_1 = -J_1, \quad \bar{J}_2 = J_2, \quad J_1 = S_1 - d^2,$$

$$J_2 = S_2, \quad S_1 = \theta_1^2 - \theta_2^2, \quad S_2 = 2\theta_1\theta_2.$$

Полученные расчетные зависимости позволяют определять очертания линий водоупора AD, участка высачивания AB и депрессионной поверхности BC подземных вод, высачивающихся через дренирующий склон AE, а также все необходимые параметры фильтрационного потока с построением гидродинамической сетки фильтрации. При этом в зависимости от задаваемых параметров h, L, q и величины b получаем решения множества (семейства) различных геофизических задач дренирующего склона.

На рис. 1 приведены результаты решения рассматриваемой задачи применительно для частного случая при исходных данных: $h = 1$, $L = 1.5$,

$q = 0.6$, $b = 0.8$ с построением гидродинамической сетки фильтрационного потока, высачивающегося через дренирующий склон, в котором ортогональность пересекающихся линий и квадратичность ячеек (размерами $0.25q$) указанной гидродинамической сетки фильтрации свидетельствует о строгости используемого гидромеханического решения. Полученные результаты имеют важное значения для оценки величины и направления гидродинамического давления фильтрационного потока при расчетах устойчивости дренирующих склонов, а также суффозионной устойчивости грунтов. В частности, в рассматриваемом случае наблюдается наибольшая концентрация гидродинамического давления фильтрационного потока в нижней части дренирующего склона AE с направлением потока, близким к горизонтальному (с некоторым отрицательным уклоном), а наибольшее "сдвигающее" усилие (с направлением, приближающимся к уклону склона) фильтрационный поток получает в верхней части участка высачивания AB, где и следует ожидать первоначального развития эрозионных процессов с оползневым отрывом грунтового массива склона.

Таким образом, в работе получено точное полуобратное гидромеханическое решение для семейства геофизических задач дренирующего склона на основе теории функции комплексного переменного с использованием метода последовательных конформных отображений. При этом установлена аналитическая взаимосвязь между областями комплексного потенциала и комплекса Жуковского, позволяющая определять необходимые параметры области фильтрации. Приводится пример расчета с построением ортогональной и квадратичной гидродинамической сетки фильтрационного потока.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ведерников В.В.* Теория фильтрации и ее применение в области ирригации и дренажа. М.; Л.: Госстройиздат, 1939. 248 с.
2. *Павловский Н.Н.* Собр. соч. Т. 2. Движение грунтовых вод. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. 771 с.
3. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
4. *Анахаев К.Н.* Гидромеханический расчет свободной фильтрации из водотоков криволинейного профиля со смещенным тальвегом // ДАН. 2004. Т. 395. № 6. С. 761–766.
5. *Анахаев К.Н.* Свободная фильтрация из водотоков // Известия РАН. МЖГ. 2004. № 5. С. 94–99.
6. *Анахаев К.Н.* Строгое решение задачи свободной фильтрации из водотоков полуобратным методом // Прикладна гідромеханіка. Киев. 2008. Т. 10 (82). № 1. С. 80–85.
7. *Анахаев К.Н.* Развитие методов решения задач механики со специальными функциями. Нальчик, 2016. 252 с.
8. *Базанов М.И.* Исследование фильтрации для случая притока воды к осушительным каналам // Прикладная математика и механика. ОТН АН СССР. 1938. Т. 2. В. 2. С. 223–241.
9. *Лаврик В.И., Фильчакова В.П., Яшин А.А.* Конформные отображения физико-топологических моделей. Киев.: Наукова думка, 1990. 374 с.
10. *Лаврик В.И., Савенков В.Н.* Справочник по конформным отображениям. Киев: Наукова думка, 1970. 252 с.

THE EXACT SEMI-RETURN DECISION FOR FAMILY OF GEOPHYSICAL PROBLEMS OF THE DRAINING SLOPE

K. N. Anakhaev[1,2], V. V. Belikov[2]

[1]*Institute of Applied Mathematics and Automation, Kabardino-Balkarian Scientific Center, Russian Academy of Sciences, Nalchik, Russian Federation*

[2]*Water Problems Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS N.F. Morozov July 8, 2019

Received July 29, 2019

One of the main reasons for emergence of the dangerous geophysical slope phenomena is water saturation of slopes and negative hydrodynamic impact of a stream of underground waters on them. In work the exact semi-return hydromechanical decision for family of geophysical problems of the draining slope on the basis of the theory of function complex variable is received. The method of consecutive conformal displays established the analytical interrelation between areas of complex potential and N.E. Zhukovsky's complex allowing to determine all necessary parameters of area of filtration. The example of calculation with definition of outlines of lines of a water emphasis, the site of a vysachivaniye, depressionny surface and also lines of currents and equal pressures of an orthogonal and square hydrodynamic grid of a filtrational stream, (ekvipotentsialy) with construction, leaving through the draining slope is given. Short assessment of the impact of filtration on suffozionny and landslide stability of the soil massif of the draining slope is given.

Keywords: a complex variable, Zhukovsky's complex, conformal displays, the semi-return hydromechanical solution, the site of a vysachivaniye, a hydrodynamic grid of filtration draining a slope