

УДК 532.546

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ГРУНТОВЫХ ВОД В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЕРЕМЫЧКЕ С ЭКРАНОМ

© 2020 г. Э. Н. Береславский^{1,*}, Я. М. Далингер^{1,**}, Л. М. Дудина^{1,***}

Представлено академиком РАН Н.Ф. Морозовым 30.09.2019 г.

Поступило 23.09.2019 г.

После доработки 23.09.2019 г.

Принято к публикации 30.09.2019 г.

В рамках плоской установившейся фильтрации несжимаемой жидкости по закону Дарси дается точное аналитическое решение задачи о течении в прямоугольной перемычке с экраном при наличии испарения со свободной поверхности грунтовых вод. Отмечаются предельные случаи рассматриваемого движения — фильтрация в безнапорном пласте к несовершенной галерее, а также течение при отсутствии испарения.

Ключевые слова: фильтрация, испарение, перемычка, грунтовые воды, свободная поверхность, метод Полубариновой-Кочиной, комплексная скорость, конформные отображения, дифференциальные уравнения класса Фукса

DOI: 10.31857/S2686740020010058

Решение задачи о притоке жидкости к несовершенной скважине с затопленным фильтром (т.е. осесимметричной задачи) в точной гидродинамической постановке связано с большими математическими трудностями (особенно для течений со свободной поверхностью) и до настоящего времени отсутствует [1–6] (здесь не рассматриваются многочисленные численные и приближенные решения). Поэтому в качестве первого приближения к решению этой проблемы были рассмотрены [1, 5–8] ее плоские аналоги — задачи о притоке жидкости к прямоугольной перемычке с экраном и к несовершенной прямолинейной галерее, которые дают определенное качественное представление о возможной зависимости фильтрационных характеристик от степени несовершенства скважины. В работе [9] приводится точное аналитическое решение задачи о движении грунтовых вод в безнапорном пласте к несовершенной галерее при наличии испарения со свободной поверхности. А также приближенное решение задачи в случае, когда область течения слева ограничивается некоторой эквипотенциалью, определяемой из решения. Показано, что карти-

на течения вблизи непроницаемого экрана существенно зависит не только от несовершенства галереи, но и от наличия испарения, что сильно отражается на расходе галереи и ординате точки выхода кривой депрессии на непроницаемую стенку.

В представленной работе дается точное решение задачи о фильтрации в прямоугольной перемычке с экраном при наличии испарения со свободной поверхности грунтовых вод. В этом случае, как и в [9] (в отличие от [7, 8]), в области годографа скорости потока возникают не прямолинейные, а круговые многоугольники, что не позволяет воспользоваться классической формулой Кристоффеля–Шварца. Влияние испарения со свободной поверхности изучается с применением метода П.Я. Полубариновой-Кочиной [1–6]. С помощью разработанных для областей специального вида [10–12] способов конформного отображения круговых многоугольников [13] решается смешанная многопараметрическая краевая задача теории аналитических функций. Учет характерных особенностей рассматриваемого течения позволяет получить решение через элементарные функции, что делает их использование наиболее простым и удобным. Приведены результаты численных расчетов и дан гидродинамический анализ влияния всех физических параметров модели на фильтрационные характеристики. Полученные результаты решения плоской задачи дают по крайней мере некоторое качественное

¹Санкт-Петербургский государственный университет гражданской авиации, Санкт-Петербург, Россия

*E-mail: eduber@mail.ru

**E-mail: liliya_shuvalova@mail.ru

***E-mail: iakovdalinger@gmail.com

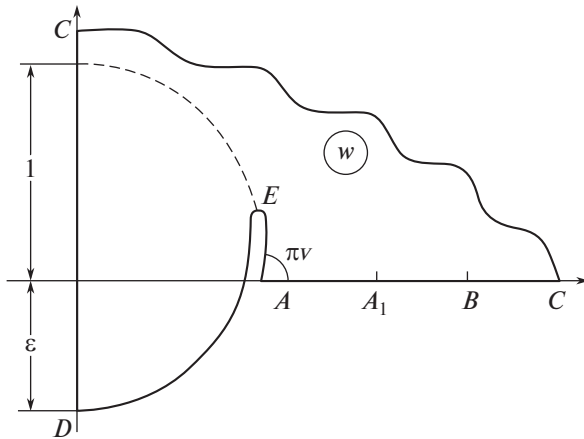


Рис. 2. Область комплексной скорости w .

до сих пор не существует какого-либо эффективного способа их фактического нахождения.

Обратимся к области комплексной скорости w , соответствующей граничным условиям (1), которая изображена на рис. 2. Эта область, представляющая собой круговой четырехугольник $ABCDE$ с разрезом с вершиной в точке E (соответствующей точке перегиба кривой депрессии) и углом $\pi\nu$ при вершине A , принадлежит классу круговых многоугольников в полярных сетках и была исследована ранее [13]. Важно подчеркнуть, что по-

добные области, несмотря на свой частный вид, однако, весьма типичны и характерны для многих задач подземной гидромеханики: при фильтрации из каналов, оросителей и водоемов, в течениях пресных вод над покоящимися солеными водами, в задачах обтекания шпунта Жуковского при наличии соленых подпорных вод (см., например, [11–13, 15]).

Замена переменных $\zeta = \text{th}^2 t$ переводит верхнюю полуплоскость ζ в горизонтальную полуплоскость $\text{Re} t > 0$, $0 < \text{Im} t < 0.5\pi$ параметрической плоскости t при соответствии точек $t_A = \infty$, $t_D = 0$, $t_C = 0.5\pi$, $t_B = \text{arcth}\sqrt{b} + 0.5\pi i$,

$$t_{A1} = \text{arcth}\sqrt{a_1} + 0.5\pi i \quad (1 < a_1 < b < \infty),$$

а интегралы Y уравнения (3), которые построены по методике [13], преобразуют к виду

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{\text{ch}t \text{ch} \nu t + C \text{sh}t \text{sh} \nu t}{\text{ch}^{1+\nu} t}, \\ Y_2 &= \frac{\text{ch}t \text{sh} \nu t + C \text{sh}t \text{ch} \nu t}{\text{ch}^{1+\nu} t}, \end{aligned} \quad (4)$$

где C ($C \neq 1$) — неизвестная подходящая константа.

Принимая во внимание соотношение (2) и учитывая, что $w = \frac{d\omega}{d\zeta}$, придем к искомым зависимостям

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= iM \frac{\sqrt{\varepsilon}(\text{ch}t \text{ch} \nu t + C \text{sh}t \text{sh} \nu t) + i(\text{ch}t \text{sh} \nu t + C \text{sh}t \text{ch} \nu t)}{\Delta(t)}, \\ \frac{dz}{dt} &= -\frac{M}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\text{ch}t \text{ch} \nu t + C \text{sh}t \text{sh} \nu t - i\sqrt{\varepsilon}(\text{ch}t \text{sh} \nu t + C \text{sh}t \text{ch} \nu t)}{\Delta(t)}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\Delta(t) = \sqrt{[(a_1 - 1)\text{sh}^2 t + a_1][(b - 1)\text{sh}^2 t + b]},$$

где $M > 0$ — масштабная постоянная моделирования.

Можно проверить, что функции (5) удовлетворяют граничным условиям (1), переформулированным в терминах функций $\frac{d\omega}{dt}$ и $\frac{dz}{dt}$ и, таким образом, являются параметрическим решением исходной краевой задачи. Запись представлений (5) для разных участков границы полуполосы с последующим интегрированием по всему контуру области параметрической переменной t приводит к замыканию области течения и, тем самым, служит контролем вычислений.

В результате получаем выражения для задаваемых величин: ширины L перемычки, уровней во-

ды в верхнем H и нижнем H_2 бьефах и длины H_1 фильтра

$$\begin{aligned} \int_0^\infty X_{DA}(t) dt &= L, \quad \int_{\text{arcth}\sqrt{a_1}}^\infty Y_{AA_1}(t) dt = H, \\ \int_0^{0.5\pi} [\Phi_{DC}(t) + Y_{DC}(t)] dt + H_1 &= H_2, \\ \int_0^{\text{arcth}\sqrt{b}} Y_{CB}(t) dt &= H_1, \end{aligned} \quad (6)$$

искомых координат точек свободной поверхности AD

$$x(t) = -\int_0^t X_{DA}(t) dt, \quad y(t) = H_0 - \int_0^t Y_{DA}(t) dt \quad (7)$$

Таблица 1. Результаты расчетов величин Q и H_0 при варьировании ϵ , H и L

ϵ	Q	H_0	H	Q	H_0	L	Q	H_0
0.1	1.3937	2.3003	2.5	0.5624	1.4074	1.5	1.6261	2.1424
0.2	1.3423	2.1544	3.0	1.1554	1.7750	1.7	1.8970	1.3492
0.3	1.2839	2.0179	3.5	1.5715	2.0883	2.0	1.1554	1.7755
0.4	1.2218	1.8920	4.5	2.6811	3.3097	2.5	0.7585	1.5045
0.5	1.1554	1.7755	5.0	2.9726	3.7528	2.9	0.4863	1.3727

и выражений для фильтрационного расхода Q и ординаты точки выхода свободной поверхности на экран

$$Q = \int_0^{\operatorname{arcth}\sqrt{b}} \Psi_{CB}(t)dt, \quad H_0 = H - \int_0^{\infty} \Phi_{DA}(t)dt. \quad (8)$$

Для контроля расчетов служат другие выражения для величин Q , H_0 и L :

$$\begin{aligned} Q &= -\epsilon L + \int_{\operatorname{arcth}\sqrt{a_1}}^{\infty} \Psi_{AA_1}(t)dt, \\ H_0 &= H_2 - \int_0^{0.5\pi} \Phi_{DC}(t)dt, \\ H_0 &= H_1 + \int_0^{0.5\pi} Y_{DC}(t)dt, \\ L &= \int_{\operatorname{arcth}\sqrt{b}}^{\operatorname{arcth}\sqrt{a_1}} X_{BA_1}(t)dt, \end{aligned} \quad (9)$$

а также выражение

$$\int_0^{\infty} \Phi_{DA}(t)dt - \int_0^{0.5\pi} \Phi_{DC}(t)dt + \int_{\operatorname{arcth}\sqrt{b}}^{\operatorname{arcth}\sqrt{a_1}} \Phi_{BA_1}(t)dt = 0, \quad (10)$$

непосредственно вытекающее из граничных условий (1).

В формулах (5)–(10) подынтегральные функции – выражения правых частей равенств (3) на соответствующих участках контура вспомогательной области t .

Предельные случаи:

Таблица 2. Результаты расчетов величин Q и H_0 при варьировании H_1 и H_2

H_1	Q	H_0	H_2	Q	H_0
0.9	1.1120	1.8292	1.09	1.3965	1.5533
1.0	1.1554	1.7755	1.19	1.3627	1.5775
1.1	1.1928	1.7161	1.29	1.2425	1.7051
1.2	1.2235	1.6494	1.39	1.1598	1.7695
1.3	1.2460	1.5728	1.40	1.1634	1.7694

1) при $L \rightarrow \infty$, т.е. при слиянии точек A_1 и A , в плоскости t , т.е. при $a_1 \rightarrow 1$ ($\operatorname{arcth} a_1 = \infty$), перемишка вырождается в полубесконечный слева безнапорный пласт. Таким образом, получается точное решение о течении грунтовых вод к несовершенной галерее, исследованное ранее [9];

2) при $\epsilon \rightarrow 0$, т.е. при малых значениях интенсивности испарения, получаются результаты работ [7, 8].

3. Представления (5)–(10) содержат четыре неизвестные постоянные M , C , a_1 и b . Параметры a_1 , b ($1 < a_1 < b < \infty$), C ($C \neq 1$) определяются из уравнений (6) для задаваемых величин H_1 , H_2 ($H_1 \leq H_2 < H$) и L , постоянная моделирования M при этом находится из второго уравнения (6), фиксирующего уровень H воды в верхнем бьефе перемишки. После определения неизвестных постоянных последовательно находятся фильтрационный расход Q и ордината H_0 точки выхода кривой депрессии на непроницаемый участок DC по формулам (8) и координаты точек свободной поверхности DA по формулам (7).

На рис. 1 изображена картина течения, рассчитанная при $\epsilon = 0,5$, $H = 3$, $L = 2$, $H_1 = 1.0$, $H_2 = 1.4$ (базовый вариант [9]). Результаты расчетов влияния определяющих физических параметров ϵ , H , H_1 , H_2 и L на величины Q и H_0 приведены в табл. 1, 2. На рис. 3 и 4 представлены зависимости расхода Q (кривые 1) и ординаты H_0 точки выхода кривой депрессии на экран (кривые 2) от параметров H_1 и H_2 . Анализ расчетов данных таблиц и графиков позволяет сделать следующие выводы:

1) уменьшение интенсивности испарения ϵ и увеличение напора H сопутствуют увеличению расхода Q и ординаты H_0 точки выхода кривой депрессии на экран;

2) уменьшение заглубления экрана H_1 и увеличение уровня воды в нижнем бьефе H_2 сопровождаются уменьшением расхода Q и увеличением ординаты H_0 ;

3) с ростом ширины перемишки L расход Q и ордината H_0 точки выхода свободной поверхности на экран уменьшаются.

Из табл. 2 и рис. 3, 4 следует, что уменьшение параметров H_1 и H_2 , соответственно, в 1.44 и 1.28 раза

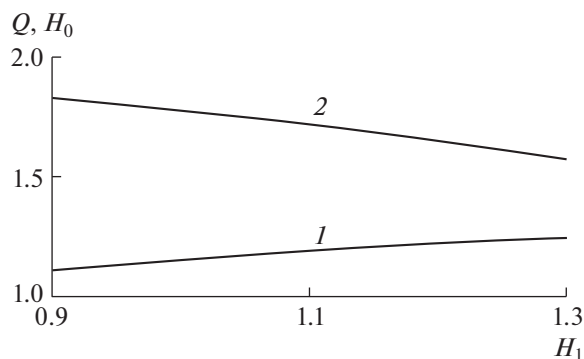


Рис. 3. Зависимость расхода перемычки Q (1) и ординаты H_0 (2) точки выхода свободной поверхности от длины фильтра H_1 .

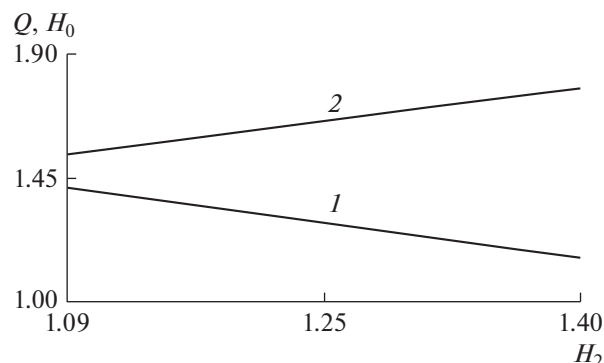


Рис. 4. Зависимость расхода перемычки Q (1) и ординаты H_0 (2) точки выхода свободной поверхности от уровня воды в нижнем бьефе H_2 .

влечет изменение величины Q на 20% (при фиксировании H_1) и на 12% (при фиксировании H_2). Отмеченные закономерности приводят к заключению о том, что расход перемычки зависит от величины понижения уровня в несколько большей степени, чем от длины фильтра (или от несовершенства скважины или колодца).

Для базового варианта почти все зависимости величин Q и H_0 от параметров ϵ , H , H_1 , H_2 и L близки к линейным.

Сравнение точных значений, полученных для базового варианта $Q = 1.155$ и $H_0 = 1.776$, с приближенными значениями $Q = 1.141$ и $H_0 = 1.768$ для базового варианта [9], где область течения слева ограничивалась эквипотенциалом, показывает, что относительная погрешность вычислений весьма мала и составляет всего 0.5 и 1.3% соответственно.

Сопоставление точного значения расхода $Q = 1.16$, полученного для базового варианта, с приближенным значением $Q = 1.26$, которое вытекает при применении обобщенной формулы И.А. Чарного [1, с. 267] для обычной прямоугольной перемычки (без экрана) при наличии испарения

$$Q = -\frac{\epsilon L}{2} + \frac{\kappa(H^2 - H_2^2)}{2L},$$

приводит к погрешности 8.3%.

Для сравнения с данными $H = 1$, $H_1 = 0.05$, $H_2 = 0.238$, $L = 4$ работы [7] при отсутствии испарения, т.е. при $\epsilon = 0$, для которых по приближенным формулам в полуобратной постановке получены значения $Q = 0.118$, $H_0 = 0.29$, рассмотрим вариант $\epsilon = 0.1$, $H = 1$, $H_1 = 0.05$, $H_2 = 0.238$, $L = 4$, приводящий к точным значениям $Q = 0.42$, $H_0 = 0.75$. Здесь относительные погрешности вычислений составляют 71 и 61% соответственно.

Следовательно, как и в [9], испарение существенно влияет на картину течения.

4. Разработана методика построения точного аналитического решения задачи о движении в жидкости в прямоугольной перемычке с экраном при наличии испарения со свободной поверхности грунтовых вод. Исследование показывает, что схема фильтрации в прямоугольной перемычке с непроницаемым экраном, во-первых, весьма схожа с рассмотренной ранее [9] задачей о движении грунтовых вод к несовершенной галерее, причем одна из них является предельной по отношению к другой. Во-вторых, картина течения вблизи экрана существенно зависит не только от размера фильтра, но и от наличия испарения, что сильно отражается на величине расхода и ординате точки выхода кривой депрессии на экран. Полученные результаты дают некоторое представление (по крайней мере качественно) о возможной зависимости характеристик движения при рассмотрении задачи фильтрации уже к несовершенной скважине или трубчатому колодцу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
2. Аравин В.И., Нумеров С.Н. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. М.: Гостехиздат, 1953. 616 с.
3. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917–1967) / Под. ред. П.Я. Полубариновой-Кочиной. М.: Наука, 1967. 545 с.
4. Михайлов Г.К., Николаевский В.Н В кн.: Механика в СССР за 50 лет. М.: Наука, 1970. Т. 2. С. 585–648.
5. Полубаринова-Кочина П.Я., Пряжгинская В.Г., Эмих В.Н. Математические методы в вопросах орошения. М.: Наука, 1969. 414 с.
6. Кочина П.Я. Избранные труды. Гидродинамика и теория фильтрации. М.: Наука, 1991. 351 с.

7. *Пряжинская В.Г.* Движение грунтовых вод в прямоугольной перемычке с непроницаемой вертикальной стенкой // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1964. № 4. С. 41–49.
8. *Полубаринова-Кочина П.Я., Постнов В.А., Эмих В.Н.* Установившаяся фильтрация к несовершенной галерее в безнапорном пласте // Изв. АН СССР. МЖГ. 1967. № 4. С. 97–100.
9. *Береславский Э.Н., Дудина Л.М.* О движении грунтовых вод к несовершенной галерее при наличии испарения со свободной поверхности // Вестник СПбГУ. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2017. № 4. Т. 4 (62). С. 654–663.
10. *Береславский Э.Н., Кочина П.Я.* О некоторых уравнениях класса Фукса в гидро- и аэромеханике // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 5. С. 3–7.
11. *Кочина П.Я., Береславский Э.Н., Кочина Н.Н.* Аналитическая теория линейных дифференциальных уравнений класса Фукса и некоторые задачи подземной гидромеханики. Препринт № 567. М.: Ин-т проблем механики. РАН, 1996. Ч. 1. 122 с.
12. *Береславский Э.Н., Кочина П.Я.* О дифференциальных уравнениях класса Фукса, встречающихся в некоторых задачах механики жидкостей и газов // Изв. РАН. МЖГ. 1997. № 5. С. 9–17.
13. *Береславский Э.Н.* Об интегрировании в замкнутой форме некоторых дифференциальных уравнений класса Фукса, встречающихся в гидро-аэромеханике // ДАН. 2009. Т. 428. № 4. С. 439–443.
14. *Голубев В.В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 436 с.
15. *Береславский Э.Н., Лихачева Н.В.* Математическое моделирование фильтрации из каналов и оросителей // Вестник СПбГУ. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр. 2012. В. 3. С. 10–22.

MODELING MOTION OF SOIL WATER IN A RECTANGULAR LINK WITH SCREEN

E. N. Bereslavskii¹, I. M. Dalinger¹, and L. M. Dudina¹

¹*Saint-Petersburg State University of Civil Aviation, Saint-Petersburg, Russian Federation*

Received September 23, 2019

Within the framework of flat steady-state filtration of non-compressible liquid according to Darcy's law, an accurate analytical solution is given to the problem of flow in a rectangular bridge with a screen in the presence of evaporation from the free surface of groundwater. The limit cases of the movement in question are noted – filtration in a non-pressure formation to an imperfect gallery, as well as flow in the absence of evaporation.

Keywords: filtration, evaporation, web, ground water, free surface, Polubarinova-Kochina method, complex velocity, conformal mappings, differential equations of the Fuchs class