ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2020, том 490, с. 73–78

МЕХАНИКА

УДК 534.1

УСТОЙЧИВОСТЬ БАЛКИ БЕРНУЛЛИ–ЭЙЛЕРА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДВИЖУЩЕГОСЯ ТЕПЛОВОГО ИСТОЧНИКА

© 2020 г. Академик РАН Н. Ф. Морозов[2,3], член-корреспондент РАН Д. А. Индейцев[1,2], А. В. Лукин[1,*], И. А. Попов[1], О. В. Привалова[1], Л. В. Штукин[1,2]

Поступило 26.11.2019 г.
После доработки 26.11.2019 г.
Принято к публикации 06.12.2019 г.

В представленной работе решена задача о распространении волны прогиба в балке Бернулли–Эйлера при движении теплового источника и проведен анализ влияния тепловых изгибающего момента и продольной силы. Установлено, что сосредоточенный изгибающий момент, движущийся вместе с границей нагретой области, определяет форму волны прогиба, но не может привести к значительному росту ее амплитуды. Показано, что среднее значение продольной сжимающей силы линейно растет во времени при равномерном движении источника нагрева. Выявлены значения исходных параметров – скорости движения источника и температуры, при достижении которых возможна потеря устойчивости и значительный рост прогиба.

Ключевые слова: устойчивость, балка Бернулли–Эйлера, нестационарные упругие волны, температурные воздействия

DOI: 10.31857/S2686740020010162

В настоящее время растущую актуальность приобретают задачи динамики деформируемых элементов конструкций при лазерных термооптических воздействиях. Вот некоторые из областей техники и технологии, где такие задачи встречаются: задачи неразрушающего контроля оборудования и конструкций [1]; определение физико-механических свойств материалов [2]; изучение геометрических и физических параметров объектов и структур на нано- и микромасштабном уровне; биомедицина [3]; микромеханические актуаторы, использующие оптический метод сообщения упругому элементу температурных деформаций [5, 6]; влияние лазерного излучения на деформации поверхности микромеханических зеркал [7]; волоконно-оптические сенсоры, работающие в авторезонансном режиме при оптическом возбуждении [4]; метод лазерной термооптической частотной подстройки микромеханического резонатора и управления его нелинейной амплитудно-частотной характеристикой [8]; термооптическое возбуждение многомодового параметрического резонанса в графеновых мембранах [9].

В работе [10] показано, что в общем случае напряженно-деформированное состояние, вызванное нагревом, определяется продольной сжимающей силой P_T и изгибающим моментом M_T:

$$P_T = Eb\alpha_T \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \theta dz, \quad M_T = Eb\alpha_T \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} dz.$$

Рассмотрена задача об импульсном нагреве по всей поверхности балки, что позволяет учитывать только продольную сжимающую силу и не учитывать действие изгибающего момента.

В работе [11] показано, что при движении источника нагрева на границе нагретой и холодной частей стержня возникает сосредоточенный изгибающий момент, движущийся вместе с источником нагрева. Исследовано влияние изгибающего момента на динамику возникающей волны прогиба.

В настоящей работе рассмотрено одновременное влияние продольной силы и изгибающего момента на характер возникающей волны прогиба.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Два тепловых источника движутся вдоль балки от ее середины к концам со скоростью v (рис. 1).

[1]*Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия*
[2]*Институт проблем машиноведения Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия*
[3]*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия*
**E-mail: lukin_av@spbstu.ru*

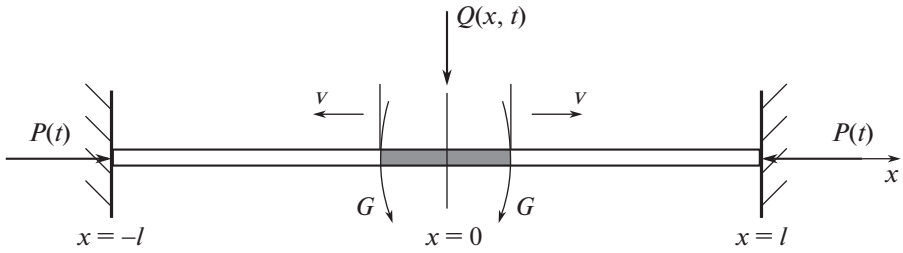

Рис. 1. Балка при действии движущегося источника нагрева.

Отсутствие отдачи тепла позволяет считать, что отрезок стержня длиной $2l_\Theta = 2vt$ остается нагретым до максимальной температуры достаточно длительное время. Полагаем, как и в [11], что действие движущегося теплового источника приводит к появлению сосредоточенных изгибающих моментов, движущихся вдоль стержня со скоростью движения источника нагрева. В отличие от [11], учтем изменение во времени продольной сжимающей нагрузки вследствие теплового расширения в нагретой области.

В работе [11] рассмотрена задача о нагреве тонкого стержня лазерным импульсом и показано, что прогрев по толщине происходит достаточно быстро по сравнению с характерным временем изменения прогиба. Это означает, что можно полагать распределение температуры по длине стержня

$$\Theta(x,t) = \Theta^* H(d + l_\theta - x),$$

где Θ^* – среднее значение температуры по толщине в прогретом участке стержня, $l_\Theta = vt$ – путь, пройденный источником нагрева, d – ширина пятна.

С другой стороны, в [11] показано, что наибольший градиент температуры будет вблизи движущейся границы нагретого и холодного участков. Это приводит к появлению сосредоточенных изгибающих моментов, приложенных на границе нагретого и холодного участков стержня, движущихся вдоль стержня вместе с этой границей.

Уравнения, описывающие динамическое поведение исследуемого стержня, состоят из системы уравнений продольных колебаний

$$\begin{gathered} -\frac{\partial N}{\partial x} + \rho\ddot{u} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{ES} N + \propto \Theta(x,t), \end{gathered} \tag{1}$$

уравнения изгибных колебаний

$$RJw'''' - (N(x,t)w')' + \rho\ddot{w} + kw - F(x,t) = 0, \tag{2}$$

граничных условий (на левом конце – середина стержня – условия симметрии, правый конец защемлен)

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad w'(0,t) = 0,$$
$$w'''(0,t) = 0, \quad w(l,t) = 0, \quad w'(l,t) = 0$$

и нулевых начальных условий:

$$u(x,0) = 0, \quad \dot{u}(x,0) = 0; \quad w(x,0) = 0, \quad \dot{w}(x,0) = 0.$$

В уравнениях колебаний $\Theta(x, t) = \Theta^* H(d + l_\theta - x)$ – распределение температуры вдоль стержня, $F(x, t)$ – распределенная поперечная нагрузка, связанная с изгибающим моментом G (считаем его постоянным).

Уравнения (1), описывающие продольные деформации, могут быть решены независимо от уравнений изгиба. Решение этой задачи может быть найдено методом двух аппроксимаций [14] в виде рядов по собственным формам. Полученное решение для продольной силы имеет вид

$$N(x,t) = -\alpha\Theta^* ES\frac{(d + vt)}{l} + R(x,t),$$

где $R(x, t)$ – колебательная составляющая, содержащая гармоники с собственными частотами продольных колебаний.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛНЫ ПРОГИБА

При нулевых начальных условиях наличие продольной силы не приведет к появлению прогиба. Однако, как это показано в [11], начальный прогиб появляется вследствие действия сосредоточенного изгибающего момента на границе прогретого и холодного участков стержня.

Высокочастотная составляющая продольной силы может привести к возникновению параметрического возбуждения поперечных колебаний. Однако значительные амплитуды параметрических колебаний возможны только при условии возникновения параметрического резонанса, что возможно только при весьма жестких условиях на соотношение между собственными частотами поперечных и продольных колебаний и, в конечном счете, на геометрию рассматриваемого стержня. Подробнее о возможности возбуждения параметрического резонанса в подобной ситуации указано в работе [12]. Исходя из этого, будем учитывать

в продольной силе только ее медленную составляющую $N(x, t) = -\alpha\Theta^* ES\dfrac{(d + vt)}{l}$.

Зная зависимость продольной силы $N(t)$ от времени, решаем далее задачу о распространении волны изгиба на ограниченном интервале времени.

Согласно [13], прогиб $w(x, t)$ отыскиваем на переменном интервале $l_w(t)$, $0 < x \le l_w < l$, в виде

$$w(x,t) = \beta(t)w_1(x) = \\ = \beta(t)\left(1 + \cos\frac{\pi x}{l_w}\right)H(l_w - x), \tag{5}$$

выбрав в качестве формы функцию, удовлетворяющую граничным условиям. При этом считаем, что $l_\theta < l_w$. Зависимость $l_w(t)$ пока неизвестна и подлежит определению.

Применяя опять процедуру Галёркина, приходим к дифференциальному уравнению относительно амплитуды прогиба $\beta(t)$:

$$\ddot\beta + \Omega^2\beta = f(t), \\ \beta(0) = 0, \quad \dot\beta(0) = 0, \tag{6}$$

где обозначено

$$\Omega^2 = \lambda^2\left(\left(\frac{l}{l_w}\right)^4 + \frac{k}{\rho\lambda^2} - P_0\frac{(d + vt)}{l}\left(\frac{l}{l_w}\right)^2\right),$$

$$f(t) = D\frac{1}{l_w^2}\sin\frac{\pi(d + vt)}{l_w},\ D = \frac{2}{3}\frac{\pi}{\rho}G,\ P_0 = \frac{\alpha\Theta_* ES}{P_э},$$

$\lambda^2 = \dfrac{EJ}{3\rho}\left(\dfrac{\pi}{l}\right)^4$ – частота поперечных колебаний,

$P_э = EJ\left(\dfrac{\pi}{l}\right)^2$ – критическая сила для защемленного по концам стержня длиной $2l$.

Решение уравнения (6) при однородных начальных условиях принимает вид

$$\beta(t) = D\frac{(\Omega\sin(\psi + \omega t) - \Omega\sin\psi\cos\Omega t - \omega\cos\psi\sin\Omega t)}{l_w^2\Omega(\Omega^2 - \omega^2)}, \tag{7}$$

где $\omega = \dfrac{\pi v}{l_w}$, $\psi = \dfrac{\pi d}{l_w}$.

В случае, когда $\Omega^2 - \omega^2 = 0$, решение для $\beta(t)$ конечно и равно

$$\beta(t) = D\frac{(\Omega t\cos(\psi + \Omega t) - \cos\psi\sin\Omega t)}{-2l_w^2\Omega^2}.$$

Длину переменного интервала $l_w(t)$ будем отыскивать, используя критерий максимальности энергии упругой деформации:

$$\int_0^{l_w} EJ(w'')^2dx = \max, \tag{8}$$

что приводит к нелинейному уравнению относительно l_w и t

$$\Phi(l_w, t) = -3\beta + 2l_w\frac{\partial\beta}{\partial l_w} = 0. \tag{9}$$

Для удобства проведения вычислений введены безразмерные величины: $\tau = \lambda t$ – безразмерное время, $s(\tau) = \dfrac{l_w(\tau)}{l}$ – безразмерная длина переменного интервала, $\nu = \dfrac{v}{\lambda l}$ – безразмерная скорость,

$$\gamma = \frac{d}{l},\ \psi = \frac{\pi\gamma}{s},\ r(t) = \frac{vt}{l} = \nu\tau$$

и безразмерные частоты

$$\tilde\Omega(\tau) = \frac{\Omega(t)}{\lambda} = \sqrt{\left(\frac{1}{s^4(\tau)} + \frac{k}{\rho\lambda^2} - \frac{P_0(\gamma + r(\tau))}{s^2(\tau)}\right)},$$

$$\tilde\omega(\tau) = \frac{\omega(t)}{\lambda} = \frac{\pi\nu}{s(\tau)}.$$

При этом получим

$$\beta(\tau) = C\frac{(\tilde\Omega\sin(\psi + \tilde\omega\tau) - \tilde\Omega\sin\psi\cos\tilde\Omega\tau - \tilde\omega\cos\psi\sin\tilde\Omega\tau)}{s^2\tilde\Omega(\tilde\Omega^2 - \tilde\omega^2)}, \tag{10}$$

где $C = \dfrac{D}{l^2\lambda^2}$.

Нелинейное уравнение $\Phi(s, \tau) = 0$ решаем численно следующим образом: фиксируем $s = s_*$ ($0 < s_* < 1$, строим зависимость $\Phi(s_*, \tau) = 0$ и отыскиваем первый корень этого уравнения $\tau = \tau_*$. Таким образом, находим зависимость $s = s(\tau)$, а далее последовательно вычисляем $\tilde\Omega(\tau)$, $\tilde\omega(\tau)$, $\beta(\tau)$ и прогиб в любой момент времени τ и в любом сечении s.

На рис. 2 показаны зависимости длины интервала $s(\tau)$, полученные из условия (9) при различных значениях параметров.

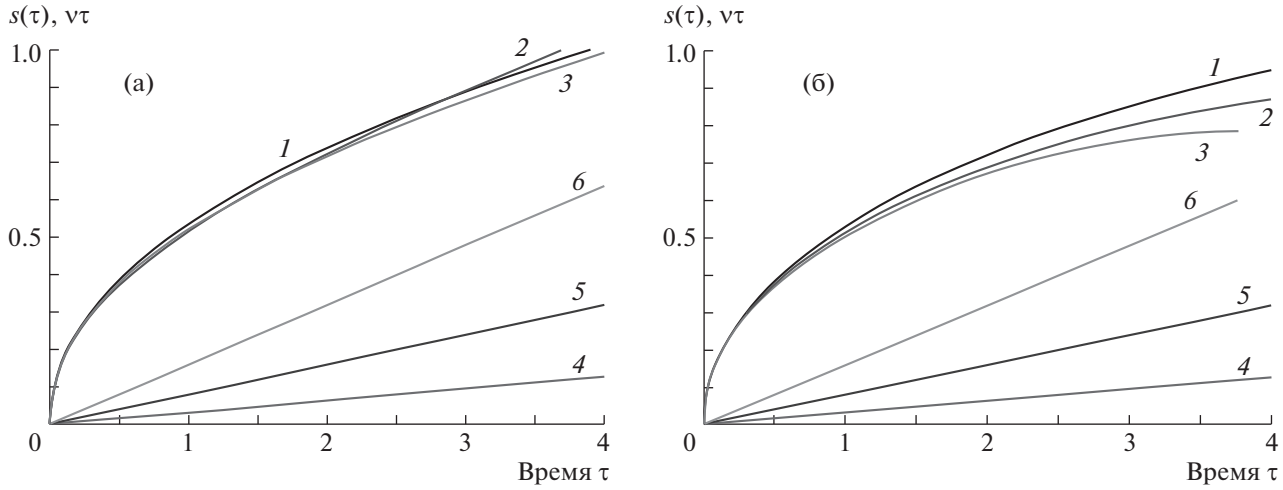

Рис. 2. Зависимость длины переменного интервала от времени. а – продольная сила $P_0 = 0$, б – продольная сила $P_0 = 3$. *1, 2, 3* – длины интервалов $s(\tau)$ при соответствующих скоростях $\nu = \frac{0.1}{\pi}$, $\nu = \frac{0.25}{\pi}$, $\nu = \frac{0.5}{\pi}$, *4, 5, 6* – путь $\nu\tau$, пройденный нагрузкой при тех же скоростях.

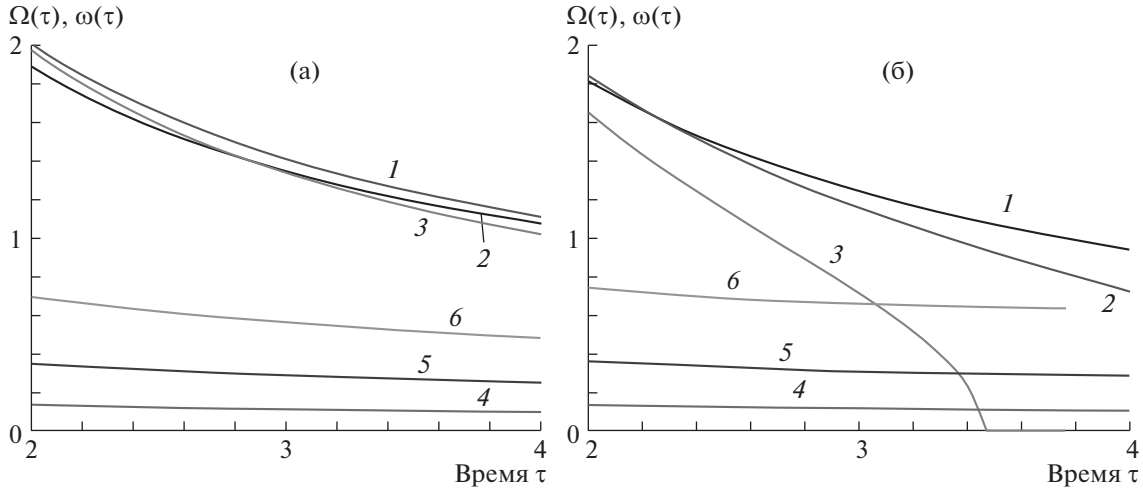

Рис. 3. Зависимости частот $\tilde{\Omega}$ и $\tilde{\omega}$ от времени τ. а – продольная сила $P_0 = 0$, б – продольная сила $P_0 = 3$. *1, 2, 3* – частота $\tilde{\Omega}(\tau)$ при соответствующих скоростях $\nu = \frac{0.1}{\pi}$, $\nu = \frac{0.25}{\pi}$, $\nu = \frac{0.5}{\pi}$, *4, 5, 6* – частота $\tilde{\omega}(\tau)$ при тех же значениях скорости.

Из рис. 2 видно, что характер зависимости длины интервала от времени имеет вид $\sqrt{t}$, что соответствует известным результатам [13]. Температура (продольная сила) и скорость движения источника достаточно слабо влияют на зависимость длины переменного интервала от времени.

На рис. 3 представлены зависимости частот $\tilde{\Omega}(\tau)$ и $\tilde{\omega}(\tau)$ от времени для разных значений продольной силы и скорости движения.

Видно, что при отсутствии продольной силы скорость движения нагрузки мало влияет на величину частоты $\tilde{\Omega}(\tau)$, однако наличие продольной силы может привести к ситуации, когда $\tilde{\Omega}(\tau)$ достигает нулевого значения.

На рис. 4 показано изменение во времени прогиба в центре балки при различных параметрах.

Наличие продольной силы, как следует из рис. 4, может привести к значительному росту прогиба, при этом наибольший рост прогиба наблюдается при тех же значениях параметров, для которых $\tilde{\Omega}(\tau)$ стремится к нулю.

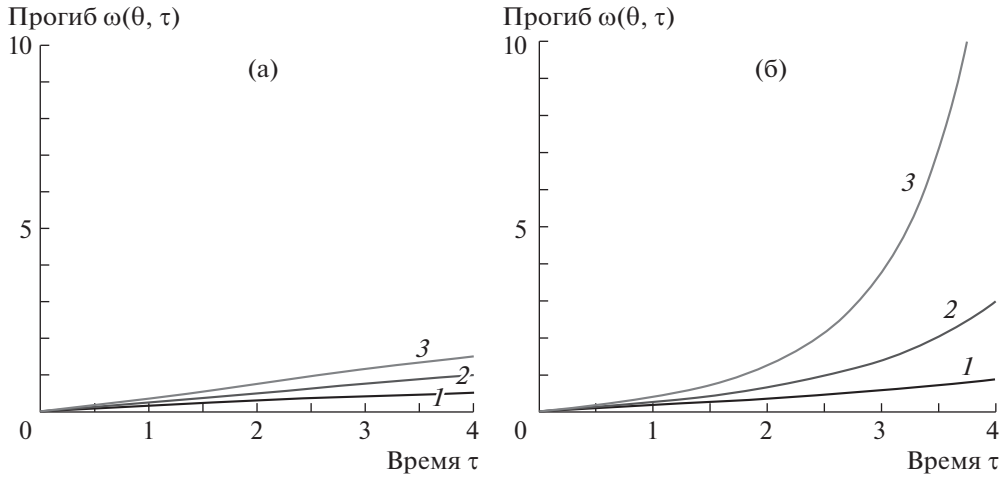

Рис. 4. Изменение амплитуды прогиба в центре балки от времени. а – продольная сила $P_0 = 0$, б – продольная сила $P_0 = 3$. *1, 2, 3* – прогиб в центре балки при соответствующих скоростях $\nu = \frac{0.1}{\pi}$, $\nu = \frac{0.25}{\pi}$, $\nu = \frac{0.5}{\pi}$.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

Решена задача о распространении волны прогиба при движении теплового источника и проведен анализ влияния тепловых изгибающего момента и продольной силы.

Сосредоточенный изгибающий момент, движущийся вместе с границей нагретой области, определяет форму волны прогиба, но не может привести к значительному росту ее амплитуды.

В работе показано, что среднее значение продольной сжимающей силы линейно растет во времени при равномерном движении источника нагрева. Выявлены значения исходных параметров – скорости движения источника и температуры, при достижении которых возможна потеря устойчивости и значительный рост прогиба.

Для последующего анализа посткритической динамики следует учитывать нелинейное слагаемое в уравнении изгиба, обусловленное дополнительным растяжением, возникающим вследствие удлинения стержня при его изгибе.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа проводилась при поддержке гранта РФФИ (проект 17–01–00414).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Муратиков К.Л.* Теория и методы лазерной диагностики материалов, основанные на генерации акустических и тепловых волн. Диссертация д.ф.-м.н. Физ.-техн. ин-т им. А.Ф. Иоффе РАН. 2008.
2. *Pan Y., Rossignol C., Audoin B.* Acoustic Waves Generated By a Laser Line Pulse in Cylinders; Application to the Elastic Constants Measurement // J. Acoust. Soc. Am. 2004. № 115.
3. *Champion A., Bellouard Y.* Direct Volume Variation Measurements in Fused Silica Specimens Exposed to Femtosecond Laser // Optical Materials Express. 2012. V. 2. № 6.
4. *Zook J.D., et al.* Optically Excited Self-Resonant Microbeams // Sensors and Actuators. A. 1996. № 52.
5. *Phinney L.M., et al.* Damage of MEMS Thermal Actuators Heated By Laser Irradiation / Proc. SPIE. 2005. V. 5716.
6. *Serrano J.R., Phinney L.M.* Displacement and Thermal Performance of Laser-Heated Asymmetric MEMS Actuators // J. Microelectromechanical Systems. 2008. V. 17. № 1.
7. *Mai A., et al.* In Situ Bow Change of Al-alloy MEMS Micromirrors During 248-nm Laser Irradiation // J. Micro/Nanolith. MEMS MOEMS. 2016. V. 15.
8. *Yang T., Bellouard Y.* Laser-Induced Transition between Nonlinear and Linear Resonant Behaviors of a Micromechanical Oscillator // Physical Review Applied. 2017. №. 7.
9. *Dolleman R.J.* Opto-thermally Excited Multimode Parametric Resonance in Graphene Membranes // Nature Scientific Reports. 2018. № 8.
10. *Daining Fang, Soh A.K.* Laser-induced Vibrations of Microbeams under Different Boundary Conditions // Intern. J. Solids and Structures 45 (2008) 1993–2013.
11. *Морозов Н.Ф., Индейцев Д.А., Лукин А.В., Попов И.А., Привалова О.В., Штукин Л.В.* Устойчивость балки Бернулли-Эйлера в связанных электрических и тепловых полях // ДАН. 2018. Т. 481. № 6. С. 619–624.

12. *Морозов Н.Ф., Товстик П.Е.* О динамической потере устойчивости стержня при продольной нагрузке, меньшей эйлеровой // ДАН. 2013. Т. 453. № 3. С. 282–285.
13. *Слепян Л.И.* Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972.
14. *Фридман В.М.* Теория упругих колебаний. Уравнения и методы. СПб.: Наука, 2014. 254 с.

STABILITY OF THE BERNOULLI-EULER BEAM UNDER ACTION OF MOVING HEAT SOURCE

Academician of the RAS N. F. Morozov[2,3], Corresponding Member of the RAS D. A. Indeitsev[1,2], A. V. Lukin[1], I. A. Popov[1], O. V. Privalova[1], and L. V. Shtukin[1,2]

[1]*Peter the Great Saint-Petersburg Polytechnic University, Saint-Petersburg, Russian Federation*
[2]*Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, Saint-Petersburg, Russian Federation*
[3]*Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, Russian Federation*

Received November 26, 2019

In the present work, the problem of the propagation of a deflection wave in a Bernoulli–Euler beam during the movement of a heat source is investigated, and the influence of thermal bending moment and longitudinal force is analyzed. It was determined that a concentrated bending moment moving together with the boundary of the heated region determines the shape of the deflection wave, but cannot lead to a significant increase in its amplitude. It is shown that the average value of the longitudinal compressive force increases linearly in time with uniform motion of the heating source. The values of the initial parameters – the velocity of the source and the temperature, at which a loss of stability and a significant increase in the deflection can take place are revealed.

Keywords: stability, Bernoulli-Euler beam, non-stationary elastic waves, temperature loads