ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2020, том 490, с. 66–69

МЕХАНИКА

УДК 532.517

ЗАДАЧА О ДЕФОРМАЦИИ ВЯЗКОГО СЛОЯ

© 2020 г. Е. Н. Журавлева[1,2,*], член-корреспондент РАН В. В. Пухначев[1,2,**]

Поступило 24.10.2019 г.
После доработки 24.10.2019 г.
Принято к публикации 01.11.2019 г.

Рассматривается осесимметричное движение вязкой несжимаемой жидкости в слое, ограниченном твердой плоскостью и параллельной ей свободной поверхностью. В задаче имеется три режима движения: стабилизация к покою, разрушение за конечное время и промежуточный автомодельный режим, в котором вязкий слой неограниченно расширяется за бесконечное время.

Ключевые слова: уравнения Навье–Стокса, свободные границы, теорема сравнения, функционал Ляпунова, разрушение решения

DOI: 10.31857/S2686740020010228

1. Ниже r, φ, z обозначают цилиндрические координаты в R^3, t – время, $\mathbf{u} = (u^r, u^\varphi, u^z)$ – вектор скорости, p – давление, ν – коэффициент кинематической вязкости, $\rho = \mathrm{const}$ – плотность жидкости. Предполагается, что внешние массовые силы отсутствуют. Рассматривается осесимметричное решение уравнений Навье–Стокса

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} = -\rho^{-1}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{u}, \quad \nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \tag{1}$$

в слое $\Omega_T = \{r, z, t\colon r > 0, 0 < z < s(t), 0 < t < T\}$. Это означает, что $u^\varphi = 0$ и функции u^r, u^z, p не зависят от φ. Известно [1, 2], что система (1) обладает семейством решений вида

$$u^r = -rv(z,t), \quad u^z = 2\int_0^z v(y,t)dy, \quad p = h(z,t). \tag{2}$$

Обозначим через $l = s(0)$ начальную толщину слоя и введем безразмерные переменные, выбирая в качестве масштабов длины, времени, скорости и давления величины l, $l^2\nu^{-1}$, νl^{-1}, $\rho\nu^2 l^{-2}$ соответственно, сохранив за новыми переменными их прежние обозначения. Вследствие (1), (2) функция v удовлетворяет уравнению

$$v_t = v_{zz} + v^2 - 2v_z\int_0^z v(y,t)dy \tag{3}$$

в полосе $\omega_T = \{z, t\colon 0 < z < s(t), 0 < t < T\}$.

Далее предполагается, что плоскость $z = s(t)$ является свободной поверхностью. Это требует выполнения условий

$$\frac{ds}{dt} = 2\int_0^s v(z,t)dz, \quad v_z(s,t) = 0, \quad 0 \le t \le T. \tag{4}$$

Первое условие (4) означает, что скорость перемещения свободной поверхности в направлении внешней нормали совпадает с нормальной скоростью жидкости, а второе условие обеспечивает отсутствие касательных напряжений на свободной поверхности.

Условие отсутствия нормальных напряжений, в силу представления (2), сводится к равенству $h(s,t) = 0$. Ему можно удовлетворить апостериори, поскольку давление в решении системы (1) определяется с точностью до аддитивной функции времени.

Перейдем к формулировке краевого условия на плоскости $z = 0$. Полагая

$$v(0,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{5}$$

мы приходим к равенству $\mathbf{u} = 0$ при $z = 0$. Это означает, что на плоскости $z = 0$ удовлетворяется условие прилипания, и эта плоскость может быть принята за твердую поверхность. Дополнив соотношения (3)–(5) начальными условиями

$$v(z,0) = v_0(z), \quad 0 \le z \le 1, \quad s(0) = 1, \tag{6}$$

[1]*Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия*
[2]*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия*
**E-mail: zhuravleva_e@mail.ru*
***E-mail: pukhnachev@gmail.com*

мы получаем формулировку задачи: найти функции $v(z,t)$ и $s(t)$, чтобы выполнялись соотношения (3)–(6). Решение задачи интерпретируется как движение вязкой жидкости в слое, который ограничен твердой плоскостью и параллельной ей плоской свободной поверхностью.

2. Задача с неизвестной границей (3)–(6) ранее не рассматривалась. Плоский аналог задачи изучался в работах [3, 4]. В статье [3] найдено автомодельное решение этой задачи. В работе [4] численно был обнаружен эффект разрушения решения. Он проявляется в том, что свободная граница уходит на бесконечность за конечное время. Подобные решения уравнений идеальной жидкости были построены Л.В. Овсянниковым [5] и М.С. Лонге-Хиггинсом [6]. Оказалось, что невязкая асимптотика дает главный член особенности в поведении функции $s(t)$ при приближении к моменту катастрофы [4]. В книге [2] и статьях [3, 7] исследована задача о движении вязкой полосы, ограниченной двумя свободными границами.

Целью настоящей работы является получение достаточных условий существования решения задачи (3)–(6) в целом по времени и условий разрушения решения за конечное время. Качественное поведение ее решения иллюстрируется вычислениями.

3. Далее предполагается, что начальная функция v_0 удовлетворяет условиям гладкости и согласования,

$$v_0(z) \in C^{2+\beta}[0,1], \quad 0 < \beta < 1, \qquad v_0(0) = 0, \quad v_0'(1) = 0. \tag{7}$$

Предложение 1. *Пусть выполнены условия* (7). *Тогда задача* (3)–(6) *имеет единственное решение* $v(z,t) \in C^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{\omega}_T)$, $s(t) \in C^{2+\beta/2}[0,T]$, *если T достаточно мало.*

Доказательство предложения 1 проводится по методике, изложенной в монографии [8]. Его утверждение носит локальный характер. Нелокальные результаты достигаются с помощью дополнительных условий, накладываемых на начальную функцию v_0.

Сначала рассмотрим случай, когда начальная функция v_0 отрицательна, $v_0 = -u_0$ и $0 < u_0 \le a$, $z \in [0,1]$. Перейдем в задаче (3)–(6) к новой искомой функции $u = -v$:

$$u_t = u_{zz} - u^2 + 2u_z \int_0^z u(y,t)dy, \quad (z,t) \in \omega_T, \tag{8}$$

$$u(0,t) = 0, \quad \frac{ds}{dt} = -2\int_0^s u(z,t)dz, \qquad u_z(s,t) = 0, \quad 0 \le t \le T; \qquad u(z,0) = u_0(z), \quad u \le z \le 1. \tag{9}$$

Ввиду положительности функции u_0, этим же свойством обладает решение задачи (8), (9). Этот факт вытекает из принципа максимума [9], примененного к уравнению (8). Более того, имеют место оценки $0 \le u \le a$, $(z,t) \in \omega_T$. Данное решение описывает сжатие слоя, которое продолжается неограниченное время. Мы предполагаем, что функция u_0 удовлетворяет условиям гладкости и согласования, индуцированным соотношениями (7).

Предложение 2. *В этих условиях задача* (8), (9) *имеет, и притом единственное, решение* $u(z,\ t) \in C^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{\omega}_T)$, $s(t) \in C^{2+\beta/2}[0,T]$ *при любом* $T > 0$. *Справедлива оценка*

$$s(t) \ge \exp(-16a/\pi^3) \quad \textit{при} \quad t \ge 0, \qquad \textit{где} \quad a = \max u_0(z), \quad z \in [0,1].$$

Двусторонняя оценка функции u позволяет воспользоваться для доказательства разрешимости задачи методикой, изложенной в монографии [8]. Оценка снизу толщины слоя следует из неравенства $u \le f \equiv a\exp\left(-\frac{\pi^2 t}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{2s}\right)$. В свою очередь, это неравенство основано на теореме сравнения [9] функции f и решения задачи (8), (9). Полученная оценка имеет принципиальное значение. Из нее следует, что вследствие действия вязкости предельная толщина слоя при $t \to \infty$ положительна. В этом состоит отличие изучаемой задачи от задачи деформации невязкого слоя, где с ростом t его толщина асимптотически стремится к нулю.

4. Предположим теперь, что начальная функция v_0 положительна. В зависимости от ее свойств, здесь возможны три ситуации: разрушение решения за конечное время, стабилизация движения к состоянию покоя при $t \to \infty$ и автомодельный режим, в котором слой неограниченно расширяется за бесконечное время.

Ниже формулируются достаточные условия для реализации первого из указанных режимов и дается оценка времени жизни решения. Наши построения основаны на наличии в задаче (3)–(6) функционала Ляпунова

$$L_t[v] = \int_0^{s(t)} \left(\frac{v^3}{3} - \frac{v_z^2}{2}\right)dz \tag{10}$$

(здесь нижний индекс t отмечает зависимость значений функционала L_t от времени).

Предложение 3. *Предположим, что существует классическое решение* (v, s) *задачи в области* ω_T. *Пусть выполнены условия*

$$v_0 \geq 0, \quad z \in [0,1]; \quad \int_0^1 \left[\frac{v_0^3}{3} - \frac{(v_0')^2}{2}\right] dz \equiv L_0 > 0. \quad (11)$$

Тогда функционал L_t *является неубывающей функцией* t *на отрезке* $[0, T]$.

Для доказательства вычислим производную $\frac{dL_t}{dt}$ и учтем, что в силу принципа максимума и первого условия (11) всюду в области ω_T выполнено неравенство $v \geq 0$. Имеем:

$$\frac{dL_t}{dt} = \int_0^s \left[(v^2 + v_{zz})^2 + vv_z^2 + \frac{2}{3}v^4\right] dz \geq 0, \quad (12)$$

причем равенство достигается лишь в случае $v = 0$.

Введем обозначения $x = \frac{z}{s(t)}$, $w(x,t) = v(z,t)$, $I(t) = \int_0^1 w^2(x,t)\,dx$, $I_0 = I(0)$.

Предложение 4. *Предположим, что выполнены условия* (11). *Тогда время жизни* t_* *решения задачи* (3)–(6) *оценивается сверху величиной* $t_* = 3I_0^{-1/2}$.

Доказательство предложения 4 базируется на вытекающем из соотношений (10)–(12) неравенстве $L_t[v] > 0$ при $0 < t < T$ и тождестве, которому удовлетворяет решение задачи (3)–(6):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^s v^2 dz = \int_0^s (2v^3 - v_z^2) dz, \quad 0 < t < T.$$

Эти соотношения обеспечивают оценку

$$\frac{d}{dt}\int_0^z v^2 dz > \frac{8}{3}\int_0^z v^3 dz, \; t \in (0, T).$$

Отсюда и из определения функции $I(t)$ мы выводим дифференциальное неравенство $\frac{dI}{dt} > \frac{2I^{3/2}}{3}$, интегрируя которое, мы приходим к желаемой оценке величины t_*.

5. Ниже приводятся результаты численного решения задачи (3)–(6). Введем новую пространственную переменную ζ (лагранжеву координату) и новую искомую функцию $V(\zeta, t) = v[z(\zeta, t)]$ с помощью соотношений

$$z_t = 2\int_0^z v(y,t)dy, \quad t > 0; \qquad z = \zeta, \quad t = 0. \quad (13)$$

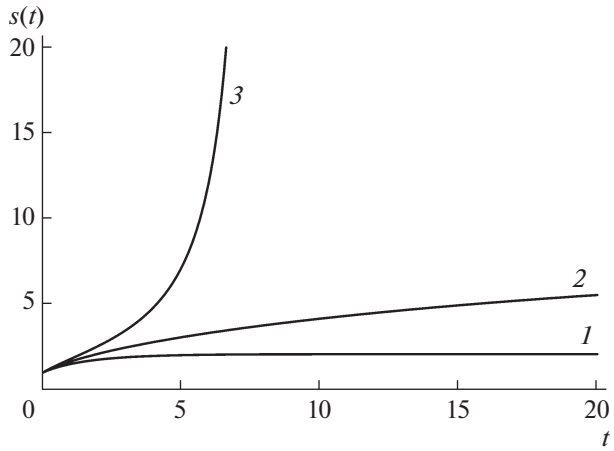

Рис. 1. Изменение толщины слоя с течением времени: *1* – стабилизация к покою ($c = 0.6$); *2* – автомодельное решение; *3* – коллапс решения ($c = 0.75$).

В результате область ω_T переходит в прямоугольник $\Pi_T = \{\zeta, t: 0 < \zeta < 1, 0 < t < T\}$, а исходная задача преобразуется к виду

$$V_t = \lambda^{-1}(\lambda^{-1}V_\zeta)_\zeta + V^2, \quad \lambda_t = 2\lambda V, \quad (\zeta, t) \in \Pi_T, \quad (14)$$

$$V(\zeta, 0) = v_0(\zeta), \quad \lambda(\zeta, 0) = 1, \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \quad (15)$$

$$V(0,t) = 0, \quad V_\zeta(1,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (16)$$

Дополнительная искомая функция λ имеет смысл деформации: $\lambda = x_\zeta$. Толщина слоя s выражается формулой $s(t) = \int_0^1 \lambda(\zeta, t)d\zeta$. Задача (14)–(16) решалась методом конечных разностей. Расчеты проводились с начальной функцией $v_0 = c\sin\left(\frac{\pi\zeta}{2}\right)$, $c = \text{const}$. На рис. 1 приведены графики зависимости $s(t)$ для значений $c = 0.6$ (линия *1*) и $c = 0.75$ (линия *3*). Мы видим, что в первом случае со временем движение стабилизируется к покою, несмотря на то, что начальная функция v_0 положительна. Второй случай демонстрирует коллапс решения. Разделяющая эти два графика кривая *2* соответствует автомодельному решению задачи, найденному в работе [10]. В этом решении $s = b^{-1/2}(t + b)^{1/2}$, $b = \text{const}$. Исходная задача (3)–(6) решалась также методом Галёркина. Приближенное решение искалось в виде

$$V_N = \sum_{k=1}^N a_k(t)\sin\left[\frac{\pi(2k-1)z}{s(t)}\right], \quad N = 1, 2, \ldots \quad (17)$$

Функции s и a_k $(k = 1, 2, \ldots, N)$ удовлетворяют системе обыкновенных уравнений, которая здесь не выписывается. Оказалось, что для получения приемлемой точности достаточно взять решение (17)

с $N = 4$. Численные решения, полученные методом Галёркина и конечно-разностным методом, хорошо согласуются друг с другом.

Суммируя сказанное, мы можем заключить, что эффект разрушения решения за конечное время имеет пороговый характер. Условие отрицательности начальной функции не является необходимым для существования решения при любом $t > 0$. Помимо режима, в котором толщина слоя стремится к положительной постоянной, имеется близкий к автомодельному режим с асимптотикой толщины слоя $s = \left(\frac{t}{b}\right)^{1/2} + O(t^{-1/2})$ при $t \to \infty$. Вычисления показали, что этот режим обладает малым запасом устойчивости.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Настоящая работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 19–01–00096).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мелешко С.В., Пухначев В.В.* Об одном классе частично инвариантных решений уравнений Навье–Стокса // ПМТФ. 1999. Т. 40. № 2. С. 24–33.
2. *Andreev V.K., Kaptsov O.V., Pukhnachov V.V., Rodionov A.A.* Applications of Group-Theoretical Methods in Hydrodynamics. Kluwer Academic Publishers, 1998. 412 p.
3. *Pukchnachov V.V.* On a Problem of Viscous Strip Deformation with a Free Boundary // C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. 1. 1999. V. 328. P. 357–362.
4. *Журавлева Е.Н.* Численное исследование точного решения уравнений Навье–Стокса, описывающего движение жидкости со свободной границей // ПМТФ. 2016. Т. 57. № 3. С. 9–15.
5. *Овсянников Л.В.* Общие уравнения и примеры. В кн.: Задача о неустановившемся движении жидкости со свободной границей. Н.: Наука, 1967. С. 5–75.
6. *Longuet-Higgins M.S.* A Class of Exact, Time-Dependent, Free-Surface Flows // J. Fluid Mech. 1972. V. 55. № 3. P. 529–543.
7. *Galaktionov V.A., Vazquez J.L.* Blow-up of a Class of Solutions with Free Boundaries for the Navier–Stokes Equations // Adv. Diff. Eq. 1999. V. 4. P. 297–321.
8. *Ладыженская О.В., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
9. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968. 427 с.
10. *Лаврентьева О.М.* Течение вязкой жидкости в слое на вращающейся плоскости // ПМТФ. 1989. № 5. С. 41–48.

PROBLEM ON A VISCOUS LAYER DEFORMATION

E. N. Zhuravleva[1,2] and Corresponding Member of the RAS V. V. Pukhnachev[1,2]

[1]*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation*

[2]*Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation*

Received October 24, 2019

The axisymmetric motion of a viscous incompressible fluid in a layer bounded by a solid plane and a free boundary parallel to it is considered. There are three regimes of motion in the problem: stabilization to rest, collapse in a finite time, and an intermediate self-similar regime in which a viscous layer expands unlimitedly in an infinite time.

Keywords: Navier–Stokes equations, free boundaries, comparison theorem, Lyapunov functional, collapse of solution