ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2020, том 491, с. 62–65

МЕХАНИКА

УДК 551

О ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ФОРМУЛИРОВКЕ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

© 2020 г. Э. В. Теодорович*

Представлено академиком РАН В.П. Масловым 27.08.2019 г.
Поступило 30.08.2019 г.
После доработки 30.08.2019 г.
Принято к публикации 01.11.2019 г.

Рассматривается уравнение Навье–Стокса при наличии внешней регулярной и случайной силы. Статистическое решение описывается в терминах характеристического функционала, подчиняющегося уравнению в функциональных производных. Получены представления для поправок к вязкости и дисперсии внешних случайных сил за счет турбулентного перемешивания. Найдена связь между вершинами трех различных типов, позволяющая учесть вклад вершин всех типов в физические характеристики турбулентности.

Ключевые слова: характеристический фунционал, уравнение в функциональных производных, функция Грина, парная корреляционная функция поля скоростей, поправки к вязкости и дисперсии внешних случайных сил, вершины трех типов

DOI: 10.31857/S2686740020010204

1. Сформулированная в работе [1] теорема об эквивалентности статистической динамики классической системы некоторой квантовой теории поля позволяет использовать при построении статистической теории турбулентности мощные математические методы, развитые для описания квантованных полей вне рамок теории возмущений. В квантовой теории поля подобный подход был предложен Ю. Швингером [2], положившим в основу построения теории квантованных полей метод характеристического (производящего) функционала, получившего для него уравнение в функциональных (вариационных) производных, решение которого представимо в виде функционального интеграла (континуального интеграла, интеграла по траекториям), соответствующего усреднению классической величины по квантовым флуктуациям (см. [3]). В применении к теории турбулентности авторы в основном ограничивались формулировкой задачи в терминах характеристического функционала [4, 5]. В данной работе приводится дальнейшее развитие указанного подхода.

2. В основе рассмотрения лежит уравнение Навье–Стокса при наличии внешней случайной $X(1)$ и регулярной $f(1)$ силы, записанное в виде

$$L[u] = L^{(0)}(1,2)u(2) + \frac{1}{2}V(1|2,3)u(2)u(3) = X(1) + f(1) \quad (1)$$

(подробное пояснение обозначений см., например, в [6]). Внешняя случайная сила $X(1)$, являющаяся аналогом силы Ланжевена в теории случайных процессов, моделирует возникновение стохастичности за счет развития неустойчивости крупномасштабных течений жидкости. Для этой силы принимается, что она подчиняется центрированному нормальному распределению с парной корреляционной функцией $D^{(0)}(1,2)$.

Характеристический функционал (ХФ) случайного поля скоростей определяется соотношением

$$\Phi[\eta(1), f(1)] = \langle \exp\{\imath\eta(1)\cdot u(1; X, f)\}\rangle, \quad (2)$$

где $u(1:X,f)$ – решение уравнения Навье–Стокса, а усреднение осуществляется по реализациям внешней случайной силы $X(1)$.

Далее выполним переход к новым функциональным переменным

$$\hat{\eta}(1) = \frac{\delta \ln \Phi[\eta, f]}{\imath\delta\eta(1)}, \quad \hat{f}(1) = \frac{\delta \ln \Phi[\eta, f]}{\imath\delta f(1)}. \quad (3)$$

При $\eta \to 0$ получим $\hat{\eta}(1) \to \langle u(1)\rangle$.

Переход к новым функциональным переменным осуществляется с помощью функционального преобразования Лежандра путем введения нового функционала

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, Москва, Россия
**E-mail: teodor@ipmnet.ru*

$$\Psi[\hat{\eta}, \hat{f}] = -\ln \Phi[\eta, f] + \imath\eta\hat{\eta} + \imath f\hat{f}. \tag{4}$$

В этом случае

$$\frac{\delta\Psi}{\imath\delta\hat{\eta}(1)} = \eta(1), \quad \frac{\delta\Psi}{\imath\delta\hat{f}(1)} = f(1),$$
$$\frac{\delta\hat{\eta}(1)}{\imath\delta\eta(2)} = \frac{\delta^2 \ln\Phi}{\imath\delta\eta(1)\imath\delta\eta(2)} = C(1,2), \tag{5}$$
$$\frac{\delta\hat{f}(2)}{\delta\eta(1)} = \frac{\delta\hat{\eta}(1)}{\delta f(2)} = G(1,2),$$

где $C(1, 2)$ – парная корреляционная функция (дисперсия) поля скоростей, функция $G(1, 2)$ описывает отклик среднего поля скорости в пространственно-временной точке 1 на действие силового источника, локализованного в точке 2, иными словами, является функцией (тензором) Грина.

Для дальнейшего анализа рассмотрим смешанные функциональные производные функционала Ψ

$$\frac{\delta^2\Psi}{\delta\eta(2)\imath\delta\hat{\eta}(1)} = \frac{\delta\hat{\eta}(3)}{\delta\eta(2)}\frac{\delta^2\Psi}{\delta\hat{\eta}(3)\imath\delta\hat{\eta}(1)} + \frac{\delta\hat{f}(3)}{\delta\eta(2)}\frac{\delta^2\Psi}{\delta\hat{f}(3)\imath\delta\hat{\eta}(1)} = \delta(1-2), \tag{6}$$

$$\frac{\delta^2\Psi}{\delta\eta(2)\delta\hat{f}(1)} = \frac{\delta\hat{\eta}(3)}{\delta\eta(2)}\frac{\delta^2\Psi}{\delta\hat{\eta}(3)\delta\hat{f}(1)} + \frac{\delta\hat{f}(3)}{\delta\eta(2)}\frac{\delta^2\Psi}{\delta\hat{f}(3)\delta\hat{f}(1)} = 0. \tag{7}$$

С учетом следующего из анализа диаграммных рядов теории возмущений равенства нулю функциональных производных функционала Ψ только по полям $\hat{\eta}$, из (6) получим

$$\frac{\delta^2\Psi}{\imath\delta\hat{f}(1)\delta\hat{\eta}(2)} = G^{-1}(1,2), \tag{8}$$

где G^{-1} – обратная функция Грина.

Уравнение (7) примет вид $C(1,1')G^{-1}(1',2) - G(1,1')D(1',2) = 0$ или

$$C(1,2) = G(1,1')G(2,2')D(1',2'),$$
$$D(1,2) = \frac{\delta^2\Psi}{\imath\delta\hat{f}(1)\imath\delta\hat{f}(2)}. \tag{9}$$

Это уравнение имеется в работе Швингера [2], а в статистической теории турбулентности уравнение (9) впервые было получено Уайлдом [7] путем анализа рядов теории возмущений с использованием техники фейнмановских диаграмм. Функцию $D(1, 2)$ в уравнении Уайлда (9) следует интерпретировать как парную корреляционную функцию эффективных случайных сил.

3. До сих пор уравнения Навье–Стокса (1) нами не было использовано, а рассматривались только соотношения, вытекающие из возможности статистического описания системы в терминах характеристического функционала. Функционал $\Psi[\hat{\eta}, \hat{f}]$ поля скоростей, подчиняющегося уравнениям (1), является решением уравнения в функциональных производных [6, 8]

$$L^{(0)}(1,2)\hat{\eta}(2) + \frac{1}{2}V(1\,|\,2,3)\left[\hat{\eta}(2)\hat{\eta}(3) + \frac{\delta\hat{\eta}(3)}{\imath\delta\eta(2)}\right] = \frac{\delta\Psi}{\imath\delta\hat{f}(1)} + \imath D^{(0)}(1,2)\hat{f}(2). \tag{10}$$

Для нахождения уравнений для функций G^{-1} и D подействуем на уравнение (10) оператором $\frac{\delta}{\delta\hat{\eta}(2)}$. Используя (8), получим

$$\frac{\delta^2\Psi}{\imath\delta\hat{f}(1)\delta\hat{\eta}(2)} = G^{-1}(1,2) = L^{(0)}(1,2) - \Sigma(1,2), \tag{11}$$

где $\Sigma(1,2) = \Sigma^{(0)}(1,2) + \Sigma^{(1)}(1,2)$,

$$\Sigma^{(0)}(1,2) = -V(1|2,3)\hat{\eta}(3),$$
$$\Sigma^{(1)}(1,2) = -\frac{1}{2}V(1|3,4)\frac{\delta C(3,4)}{\delta\hat{\eta}(2)}. \tag{12}$$

Уравнение (11) можно переписать в виде

$$G(1,2) = G^{(0)}(1,2) + G^{(0)}(1,1')\Sigma(1',2')G(2',2), \tag{13}$$

где $G^{(0)}$ – функция Грина линейного уравнения

$$L^{(0)}(1,1')G^{(0)}(1',2) = \delta(1-2).$$

Уравнение (13) является аналогом уравнения Дайсона в квантовой теории поля, а величина Σ – аналогом “оператора собственной энергии”.

При действии на (10) оператором $\frac{\delta}{\imath\delta\hat{f}(2)}$ и учитывая (9), найдем

$$\frac{\delta^2\Psi}{\delta\hat{f}(2)\delta\hat{f}(1)} = D(1,2) = D^{(0)}(1,2) + D^{(1)}(1,2),$$
$$D^{(1)}(1,2) = -\frac{1}{2}V(1|3,4)\frac{\delta C(3,4)}{\imath\delta\hat{f}(2)}. \tag{14}$$

Из (11) и (14) следует, что величины $\Sigma(1,2)$ и $D^{(1)}(1,2)$ необходимо интерпретировать соответственно как обусловленные влиянием турбулентного перемешивания поправки к вязкости жидкости и корреляционной функции внешних случайных сил.

Для нахождения явного вида величин $\Sigma^{(1)}$ и $D^{(1)}$ согласно (12) и (14) необходимо знать функциональные производные C по полям $\hat{\eta}$ и $\hat{f}$, что может быть осуществлено, если сначала найти производные функции Грина путем дифференцирования тождества $G(1,1')G^{-1}(1',2) = \delta(1-2)$ и затем использовать уравнение Уайлда (9). Соответствующий расчет дает

$$\Sigma^{(1)}(1,2) = V(1|3,4))\Big[G(3,3')C(4,4')\Gamma(3'|4',2) - \\ -\frac{1}{2}G(3,3')G(4,4')\Gamma(3',4'|2)\Big], \tag{15}$$

$$D^{(1)}(1,2) = V(1|3,4)\Big[G(3,3')C(4,4')\Gamma(2,3'|4') - \\ -\frac{1}{2}G(3,3')G(4,4')\Gamma(2,3',4')\Big], \tag{16}$$

где были введены три новые функции

$$\Gamma(1|2,3) = \frac{\delta^3\Psi}{\delta\hat{f}(1)\imath\delta\hat{\eta}(2)\imath\delta\hat{\eta}(3)} = \frac{\delta G^{-1}(1,2)}{\imath\delta\hat{\eta}(3)} = \\ = V(1|2,3) - \frac{\delta\Sigma^{(1)}(1,2)}{\imath\delta\hat{\eta}(3)}, \tag{17а}$$

$$\Gamma(1,2|3) = \frac{\delta^3\Psi}{\delta\hat{f}(1)\delta\hat{f}(2)\imath\delta\hat{\eta}(3)} = \frac{\delta D(1,2)}{\imath\delta\hat{\eta}(3)} = \\ = \frac{\delta G^{-1}(1,2)}{\delta\hat{f}(3)} = -\frac{\delta\Sigma^{(1)}(1,2)}{\delta\hat{f}(3)}, \tag{17б}$$

$$\Gamma(1,2,3) = \frac{\delta^3\Psi}{\delta\hat{f}(1)\delta\hat{f}(2)\delta\hat{f}(3)} = \frac{\delta D^{(1)}(1,2)}{\delta\hat{f}(3)}, \tag{17в}$$

называемые в диаграммной технике вершинами и интерпретируемые в квантовой теории поля как величины, описывающие соответственно процессы слияния двух квантов в один, распад одного кванта на два и порождение трех квантов внешним полем (вершины первого, второго и третьего типов). На необходимость учета вершин всех трех типов впервые было указано в работе [1] (см. также [6, 8]). Из формул (15), (16) можно видеть, что формула для $D^{(1)}$ может быть получена, если в формуле для $\Sigma(1)$ сделать замену $\Gamma(3'|4',2) \to \Gamma(2,3'|4')$ и $\Gamma(3',4'|2) \to \Gamma(2,3',4')$.

4. Система уравнений (9), (13), (15), (16) является точным следствием определения (12) и уравнения для ХФ (10). При выводе этих уравнений никакие приближения или дополнительные предположения феноменологического характера не были использованы. Однако эта система не является замкнутой, так как содержит три неизвестные функции Γ, для которых в свою очередь можно получить уравнения, содержащие моменты более высокого порядка ("четырехвостые диаграммы"), т.е. возникает цепочка уравнений в чем-то аналогичная цепочке уравнений Фридмана–Келлера при традиционной формулировке статистической теории турбулентности в терминах статистических моментов и в рассматриваемом случае также возникает проблема замыкания системы полученных уравнений.

Функциональная формулировка позволяет исключить из системы вершины второго и третьего типов, выразив их через вершину первого типа.

Для нахождения дополнительных соотношений, связывающих вершины разных типов, подействуем на уравнения (6), (7) оператором функционального дифференцирования $\dfrac{\delta}{\imath\delta\hat{f}(4)}$ и получим

$$C(2,3)\Gamma(4|3,1) + G(2,3)\Gamma(4,3|1) = 0, \tag{18}$$

$$C(2,3)\Gamma(4,1|3) + G(2,3)\Gamma(4,1,3) = 0. \tag{19}$$

Используя уравнение Уайлда (9), приходим к представлению вершин второго и третьего типов через вершину первого типа

$$\Gamma(4,1|2) = -\Gamma(4|1',2)G(1',1'')D(1'',1), \\ \Gamma(4,1,2) = -\Gamma(4,2|1')G(1',1'')D(1'',1) = \\ = \Gamma(4|1',2')G(1',1'')D(1'',1)G(2',2'')D(2'',2). \tag{20}$$

Подстановка полученных соотношений в (15) и (16) дает

$$\Sigma^{(1)}(1,2) = \frac{3}{2}V(1|3,4))G(3,3')C(4,4')\Gamma(3'|4',2), \tag{21}$$

$$D^{(1)}(1,2) = \frac{3}{2}V(1|3,4)C(3,3')C(4,4')\Gamma(2|3',4'). \tag{22}$$

5. Простейшим способом замыкания системы уравнений (7), (12)–(14) является использование низшего приближения теории возмущений для вершин [1, 7–9]

$$\Gamma(1|2,3) = V(1|2,3), \quad \Gamma(1,2|3) = \Gamma(1,2,3) = 0. \tag{23}$$

Приближению (23) соответствует известное в квантовой теории поля и успешно применяемое в ряде других областей математической физики так называемое "однопетлевое приближение" (one-loop approximation), в котором учитывается вклад всех диаграмм теории возмущений, не содержащих пересекающихся петель. Однако в этом приближении согласно (16) оказывается, что поправка к корреляционной функции внешних случайных сил $D^{(1)}$ равна нулю, поскольку она выражается через вершины второго и третьего типов. Кроме того, в приближении (23) полученные строго соотношения для вершин (20) не выполняются. Учет вклада вершин всех трех типов приводит к уточнению значений коэффициентов в уравнениях для величин, определяющих статистические свойства турбулизованной жидкости.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках государственного задания № АААА-А17-117021310375-7.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Martin P.C., Siggia E.D., Rose H.A.* // Phys. Rev. A. 1973. V. 8. № 1. P. 427–437.
2. *Schwinger J.* // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1951. V. 37. P. 452–455.
3. *Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.* Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984.
4. *Hopf E.* // J. Ratl. Mech. Anal. 1952. V. 1. P. 87–123.
5. *Lewis R.M., Kraichnan R. H.* // Comm. on Pure and Appl. Math. 1962. V. XV. P. 397–411.
6. *Теодорович Э.В.* // Успехи механики. 1990. Т. 13. № 1. С. 81–121.
7. *Wyld H.W.* // Ann. Phys. 1961. V. 14. № 2. P. 143–165.
8. *Teodorovich E.V.* // J. Phys.: Conf. Ser. 2019. 1250. 012002.
9. *Теодорович Э.В.* // ПММ. 2013. Т. 77. Вып. 1. С. 27–37.

ON FUNCTIONAL FORMULATION OF THE STATISTICAL THEORY OF TURBULENCE

E. V. Teodorovich

A.Yu. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS V.P. Maslov

The Navier–Stokes equation with the presence of external regular and random forces is considered. The statistical solution is described in terms of characteristic functional obeyed the equation in functional derivatives. Representations for corrections toviscosity and external random force variance due to turbulent mixing are obtained. It was found a relation between the vertices of three different types that enables one to account for contribution of all type vertices to physical characteristics of turbulence.

Keywords: characteristic functional, equation in functional derivatives, Green's function, variance of velocity field, corrections to viscosity and variance of external random forces, vertices of three types