ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2020, том 491, с. 30–33

МЕХАНИКА

УДК 514.85, 531.62

О ДВИЖЕНИИ НЕГОЛОНОМНОГО ШАРА ЧАПЛЫГИНА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ, ЗАДАЧЕ ГРИОЛИ И ЭФФЕКТЕ БАРНЕТТА–ЛОНДОНА

© 2020 г. А. В. Борисов[1], А. В. Цыганов[2,*]

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 18.11.2019 г.
Поступило 12.12.2019 г.
После доработки 12.12.2019 г.
Принято к публикации 16.12.2019 г.

Рассматривается движение неголономного шара Чаплыгина на плоскости в постоянном магнитном поле при учете диэлектрических и ферромагнитных свойств шара. Получено обобщение интегрируемого случая В.В. Козлова в задаче о движении симметричного твердого тела вокруг неподвижной точки в постоянном магнитном поле и предъявлен новый частный интегрируемый случай такого движения.

Ключевые слова: магнитное поле, неголономная механика, шар Чаплыгина, задача Гриоли, эффект Барнетта–Лондона

DOI: 10.31857/S2686740020020078

ВВЕДЕНИЕ

Пусть на фазовом пространстве $\mathcal{M}$, $\dim \mathcal{M} = 6$, с координатами $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ и $M = (M_1, M_2, M_3)$ заданы уравнения движения

$$\dot{M} = (M + B\gamma + \alpha)\times\omega + \left(C\omega - \frac{\partial V}{\partial\gamma}\right)\times\gamma, \qquad \dot{\gamma} = \gamma\times\omega, \tag{1}$$

где компоненты вектора $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ произвольные пока функции от γ и M, B и C – симметричные числовые матрицы, α – постоянный (числовой) вектор, а потенциал $V(\gamma)$ – функция от координат γ.

Если $C = 0$ и

$$\omega = AM, \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

то уравнения (1) являются уравнениями Кирхгофа, т.е. гамильтоновыми уравнениями. В задаче Гриоли эти уравнения описывают динамику электрически заряженного твердого тела (диэлектрика), которое является гиростатом при $\alpha \neq 0$, вокруг неподвижной точки в постоянном магнитном поле и в некотором потенциальном поле. В этом случае матрица B описывает распределение зарядов [1, 2]. Эти же уравнения возникают и при описании динамики подводного движетеля, и в этом случае B описывает плавучесть, см. [7].

Если $\alpha = 0$, $B = 0$ и

$$\omega = AM,$$

то уравнения (1) являются негамильтоновыми уравнениями, описывающими вращения твердого тела (ферромагнетика) вокруг неподвижной точки в постоянном магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона и в потенциальном поле (см. [6, 8] и Приложение D в книге [2]). В этом случае матрица C описывает анизотропию ферромагнетика.

Если $\alpha = 0$ и $B = C = 0$ и

$$\omega = A_\gamma M, \quad A_\gamma = A + \frac{dA\gamma\otimes\gamma A}{g^2}, \qquad g = \sqrt{1 - d(\gamma, A\gamma)}, \tag{3}$$

где $d > 0$ – параметр, то уравнения (1) являются конформно-гамильтоновыми уравнениями, описывающими неголономное движение шара Чаплыгина по плоскости [3].

Естественным образом возникает вопрос о движении шара Чаплыгина в магнитном поле, когда шар сделан из диэлектрического $B \neq 0$ или ферромагнитного $C \neq 0$ материала.

[1] *Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская область, Россия*
[2] *Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия*
******E-mail: andrey.tsiganov@gmail.com*

В данной работе мы подставим $\omega = A_\gamma M$ в уравнения (1) и посмотрим, какие свойства неголономных систем сохранятся при добавлении гиростатического момента, магнитного поля и учета эффекта Барнетта–Лондона. Эту подстановку $\omega = A_\gamma M$ также можно рассматривать как наложение неголономных связей на известные динамические системы, описывающие движение твердого тела в магнитном поле.

1. ТВЕРДОЕ ТЕЛО И ШАР ЧАПЛЫГИНА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Уравнения движения (1) задают векторное поле X

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i, \quad i = 1, 2, \ldots, 6, \quad x = (\gamma, M).$$

Два геометрических первых интеграла поля X зависят только от формы уравнений (1)

$$J_1 = (\gamma, \gamma), \quad J_2 = (\gamma, M + \alpha) + \frac{1}{2}(\gamma, B\gamma) \tag{4}$$

и не зависят от выбора функции ω, потенциала V и матрицы C.

При $\omega = AM$ векторное поле $X(1)$ обладает инвариантной мерой

$$\mu = d\gamma dM,$$

только если

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

При $\omega = A_g M$, т.е. в неголономном случае, инвариантная мера существует

$$\mu = g^{-1} d\gamma dM,$$

только если диагональные матрицы A и C связаны соотношением Клебша

$$\frac{c_2 - c_3}{a_1} + \frac{c_3 - c_1}{a_2} + \frac{c_1 - c_2}{a_3} = 0. \tag{6}$$

Таким образом, векторное поле X (1) обладает двумя первыми интегралами движения и инвариантной мерой только при наложении дополнительных условий на матрицу C.

Механическая энергия

$$H = \frac{1}{2}(\omega, M) + V(\gamma)$$

и при $\omega = AM$, и при $\omega = A_g M$ сохраняется, если матрица B и вектор α произвольны

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ b_{1,3} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix}, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3);$$

а матрица C пропорциональна единичной матрице:

$$C = \lambda E, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

С точки зрения физики это вполне очевидно, так как в случае диэлектрика магнитные силы не совершают работу, и поэтому полная механическая энергия сохраняется. Для ферромагнетика это происходит только в изотропном случае $B = \lambda E$.

Подставляя полученные условия в первое из уравнений движения (1), после перестановки слагаемых получим стандартные уравнения Кирхгофа вне зависимости от выбора вектора ω:

$$\begin{aligned} \dot{M} &= (M + B\gamma + \alpha) \times \omega + \left(C\omega - \frac{\partial V}{\partial \gamma}\right) \times \gamma = \\ &= (M + B\gamma + \alpha) \times \omega + \left(\lambda\omega - \frac{\partial V}{\partial \gamma}\right) \times \gamma = \\ &= (M + (B - \lambda E)\gamma + \alpha) \times \omega - \frac{\partial V}{\partial \gamma} \times \gamma. \end{aligned}$$

Это приведение уравнений, описывающих динамику ферромагнетика, к стандартным уравнениям Кирхгофа было получено В.В. Козловым в [6].

Таким образом, если механическая энергия сохраняется, то уравнения Кирхгофа (1) при $\omega = AM$ являются гамильтоновыми, а при $\omega = A_\gamma M$ "неголономные уравнения Кирхгофа" (1) являются конформно-гамильтоновыми.

Квадрат кинетического момента, т.е. функция

$$M^2 = (M, M) = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2$$

является первым интегралом уравнений (1) при $V(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = 0$, только если вектор $\alpha = 0$, а матрицы A, B и C связаны друг с другом.

При $\omega = AM$ матрица C должна удовлетворять условию (5), а матрица B иметь вид

$$B = \begin{pmatrix} \frac{a_2c_2 - a_3c_3}{a_2 - a_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_3c_3 - a_1c_1}{a_3 - a_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a_1c_1 - a_2c_2}{a_1 - a_2} \end{pmatrix}.$$

При $\omega = A_\gamma M$, т.е. в неголономном случае, матрица C должна удовлетворять условию (6), а матрица B иметь вид

$$B = \frac{a_2c_2 - a_3c_3}{a_2 - a_3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

с точностью до перестановки индексов.

Таким образом, квадрат кинетического момента сохраняется только при условии существования инвариантной меры (5), (6) и при специальном виде матрицы B, описывающей распределение электрических зарядов.

В частном случае динамически симметричного тела, например, при $a_1 = a_2$, уравнения движения (1) с $\omega = AM$ обладают инвариантной мерой $\mu = d\gamma dM$, только если

$$C = \begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & 0\\ c_{12} & c_{22} & 0\\ 0 & 0 & c_{33}\end{pmatrix}. \tag{7}$$

При $V = f(\gamma_3)$ уравнения движения (1) также обладают линейным по импульсам первым интегралом

$$K = M_3 - c_{13}\gamma_1 - c_{23}\gamma_2 + (c_{11} - b_2)\gamma_3,$$

если вектор $\alpha = (0, 0, \alpha_3)$, матрица C произвольна:

$$C = \begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{12} & c_{22} & c_{23}\\ c_{13} & c_{23} & c_{33}\end{pmatrix},$$

а матрица B имеет вид

$$B = \begin{pmatrix}b_1 + c_{22} & 0 & 0\\ 0 & b_1 + c_{22} & 0\\ 0 & 0 & b_3 + c_{33}\end{pmatrix} - C.$$

Таким образом, существование первого интеграла, линейного по M в общем случае, не связано с существованием инвариантной меры (7), в отличие от первых интегралов, квадратичных по M. При $\omega = A_\gamma M$, т. е. в неголономном случае, первого интеграла, линейного по M, не существует.

В частном случае полностью динамически симметричного тела при $a_1 = a_2 = a_3$ поле X (1) обладает инвариантной мерой

$$\mu = d\gamma dM$$

и при $\omega = AM$, и при $\omega = A_\gamma M$, без ограничения на вид матрицы C.

При $\omega = AM = aM$, $\alpha = 0$ и $V = 0$ уравнения (1)

$$a^{-1}\dot{M} = B\gamma\times M + CM\times\gamma, \quad a^{-1}\dot{\gamma} = \gamma\times M$$

зависят от двух симметричных матриц B и C. Выбором координат приведем матрицу C к диагональному виду

$$C = \mathrm{diag}(c_1, c_2, c_3).$$

В этом случае существует квадратичный первый интеграл

$$F_1 = \lambda_1 M_1^2 + \lambda_2 M_2^2 + \lambda_3 M_3^2,$$

который зависит от произвольных чисел $\lambda_k \in \mathbb{R}$ при условии

$$B = \begin{pmatrix}\frac{\lambda_2c_3 - \lambda_3c_2}{\lambda_2 - \lambda_3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\lambda_1c_3 - \lambda_3c_1}{\lambda_1 - \lambda_3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\lambda_1c_2 - \lambda_2c_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\end{pmatrix}.$$

При наложении дополнительных условий векторное поле X остается интегрируемым в квадратурах, т.е. существует еще один интеграл движения.

В первом случае, который является обобщением случая В.В. Козлова [6], дополнительное условие имеет вид

$$(\lambda_2 - \lambda_3)c_1 + (\lambda_3 - \lambda_1)c_2 + (\lambda_1 - \lambda_2)c_3 = 0.$$

Если, например,

$$c_1 = \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)c_2 - (\lambda_1 - \lambda_2)c_3}{\lambda_2 - \lambda_3},$$

то

$$B = \frac{\lambda_2c_3 - \lambda_3c_2}{\lambda_2 - \lambda_3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

а дополнительный первый интеграл равен

$$F_2 = (M, M) - 2(M, C\gamma) + \left(\frac{\mathrm{tr}(C - B)}{\mathrm{tr}\Lambda}\right)^2 \det\Lambda(\gamma, \Lambda^{-1}\gamma).$$

При $B = 0$, т.е. когда $c_k = \lambda_k$, эти интегралы были найдены в работе [6], а в работе [5] найдено преобразование координат, связывающее данную систему с системой Клебша. При $B \neq 0$ подобное преобразование также существует.

Во втором случае интегрируемости в квадратурах дополнительное условие имеет вид

$$(\lambda_2 - \lambda_3)\lambda_1c_1 + (\lambda_3 - \lambda_1)\lambda_2c_2 + (\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_3c_3 = 0.$$

Если, например,

$$c_1 = \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)\lambda_2c_2 - (\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_3c_3}{\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_3)},$$

то

$$B = \frac{\lambda_2 c_3 - \lambda_3 c_2}{\lambda_2 - \lambda_3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} +$$

$$+\frac{c_2 - c_3}{(\lambda_2 - \lambda_3)\lambda_1}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & (\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_3 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda_1 - \lambda_3)\lambda_2\end{pmatrix},$$

а второй интеграл движения при этом равен

$$F_2 = (M, M) - 2(M, C\gamma) + \frac{\mathrm{tr}(C - B)}{\mathrm{tr}\Lambda^{-1}}(C\gamma, \Lambda^{-1}\gamma).$$

Можно предположить, что существует преобразование координат, связывающее этот второй случай интегрируемости со второй известной интегрируемой системой на алгебре $e^*(3)$, т.е. с системой Стеклова–Ляпунова. Исследованию этого нового случая интегрируемости будет посвящена отдельная публикация.

В неголономном случае, т.е. при $\omega = A_\gamma M$, аналогов квадратичных по M первых интегралов $F_{1,2}$ нет ни в случае В.В. Козлова, ни в полученном нами втором случае.

Итак, мы получили ряд новых результатов для движения шара Чаплыгина в магнитном поле в предположении, что шар сделан из диэлектрического $B \neq 0$ и ферромагнитного $C \neq 0$ материала. Аналогичным образом можно изучать и различные обобщения движения шара Чаплыгина [4, 9] и другие неголономные системы.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19–71–30012).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Богоявленский О.И.* Опрокидывающиеся солитоны. Нелинейные интегрируемые уравнения. М.: Наука, Гл. ред. мат. лит., 1991. 320 с.
2. *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Динамика твердого тела. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. 384 с.
3. *Борисов А.В., Мамаев И.С., Цыганов А.В.* Неголономная динамика и пуассонова геометрия // УМН. 2014. Т. 69. № 3. С. 87–144.
4. *Bizyaev I.A., Borisov A.V., Mamaev I.S.* Different Models of Rolling for a Robot Ball on a Plane as a Generalization of the Chaplygin Ball Problem // Regul. Chaotic Dyn. 2019. V. 24. №. 5. P. 560–582.
5. *Веселова Л.Е.* О двух задачах динамики твердого тела // Вестник МГУ. Сер. Математика, механика. 1986. Т. 5. С. 90–91.
6. *Козлов В.В.* К задаче о вращении твердого тела в магнитном поле // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1985. № 6. С. 28–33.
7. *Marsden J.E., Ratiu T.S.* Introduction to mechanics and symmetry. N.Y.: Springer-Verlag, 1994.
8. *Самсонов В.А.* О вращении твердого тела в магнитном поле // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1984. № 6. С. 32–34.
9. *Tsiganov A.V.* Hamiltonization and Separation of Variables for a Chaplygin Ball on a Rotating Plane // Regul. Chaotic Dyn. 2019. V. 24. № 2. P. 171–186.

ON THE MOTION OF A NONHOLONOMIC CHAPLYGIN SPHERE IN A MAGNETIC FIELD, GRIOLI’S PROBLEM, AND THE BARNETT–LONDON EFFECT

A. V. Borisov[a] and A. V. Tsiganov[b]

[a] *Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Moscow Region, Russian Federation*

[b] *Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

In this paper, we consider the motion of a nonholonomic Chaplygin sphere on a plane in a constant magnetic field under the assumption that the sphere has dielectric and ferromagnetic properties. We also obtain a generalization of the integrable case due to V.V. Kozlov in the problem of the motion of a symmetric rigid body about a fixed point in a constant magnetic field, and present a new particular integrable case of such motion.

Keywords: magnetic field, nonholonomic mechanics, Chaplygin sphere, Grioli’s problem, Barnett–London effect