ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2020, том 491, с. 34–36

МЕХАНИКА

УДК 531.36

О ЛИНЕЙНЫХ ИНВАРИАНТНЫХ СООТНОШЕНИЯХ В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ СВЯЗКИ ДВУХ ТЕЛ

© 2020 г. А. А. Буров[1,2,*]

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 20.01.2020 г.
Поступило 21.02.2020 г.
После доработки 21.02.2020 г.
Принято к публикации 22.03.2020 г.

Рассматривается задача о свободном движении двух тел, соединенных парой сферических шарниров. Указываются условия существования инвариантных соотношений, аналогичных интегралу Гесса.

Ключевые слова: динамика систем твердых тел, инвариантные соотношения, частные интегралы, интеграл Гесса

DOI: 10.31857/S268674002002008X

О с н о в н ы е о б о з н а ч е н и я и у р а в н е н и я д в и ж е н и я. Рассматривается пара твердых тел $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$, имеющих пару общих точек – P и Q, в которых помещены идеальные сферические шарниры (рис. 1). Пусть A и B – центры масс этих тел, $Aa_1a_2a_3$ и $Bb_1b_2b_3$ – связанные с соответствующим телом системы координат, оси которых направлены вдоль его главных центральных осей инерции, $\omega_a = (\omega_{a1}, \omega_{a2}, \omega_{a3})$ и $\omega_b = (\omega_{b1}, \omega_{b2}, \omega_{b3})$ – векторы угловых скоростей соответствующих тел, $\mathbf{A} = \mathrm{diag}(A_1, A_2, A_3)$ и $\mathbf{B} = \mathrm{diag}(B_1, B_2, B_3)$ – главные центральные тензоры инерции, m_a и m_b – массы тел $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$, $\mathbf{r}_{AP} = \overrightarrow{AP}$, $\mathbf{r}_{AQ} = \overrightarrow{AQ}$, $\mathbf{r}_{BP} = \overrightarrow{BP}$, $\mathbf{r}_{BQ} = \overrightarrow{BQ}$. Здесь и далее для каждой подсистемы уравнений все векторы даются в проекциях на оси подвижной системы координат, связанной с соответствующим телом. Пусть $\mathbf{v}_a$ и $\mathbf{v}_b$ – скорости центров масс рассматриваемых тел, $\mathbf{F}_a$ и $\mathbf{F}_b$ – равнодействующие приложенных к соответствующим телам активных сил, $\mathbf{M}_a$ и $\mathbf{M}_b$ – моменты внешних активных сил, действующих на тела, относительно их центров масс, $\mathbf{R}_P$ и $\mathbf{R}_Q$ – реакции в точках P и Q. Реактивные моменты в этих точках предполагаются пренебрежимо малыми.

Описание движения тела $\mathscr{A}$ сводится к описанию движения его центра масс A и движения вокруг его центра масс. Динамические уравнения в осях, связанных с этим телом, записываются как

$$m_a\left(\frac{d}{dt}\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_a \times \boldsymbol{\omega}_a\right) = \mathbf{R}_P + \mathbf{R}_Q + \mathbf{F}_a, \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_a = \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_a \times \boldsymbol{\omega}_a + \mathbf{r}_P \times \mathbf{R}_P + \mathbf{r}_Q \times \mathbf{R}_Q + \mathbf{M}_a. \quad (2)$$

Эти уравнения, как обычно, должны быть дополнены кинематическими уравнениями Эйлера и Пуассона:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}_a = \mathbf{v}_a + \mathbf{r}_a \times \boldsymbol{\omega}_a, \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\alpha}_a = \boldsymbol{\alpha}_a \times \boldsymbol{\omega}_a, \quad \frac{d}{dt}\boldsymbol{\beta}_a = \boldsymbol{\beta}_a \times \boldsymbol{\omega}_a, \quad \frac{d}{dt}\boldsymbol{\gamma}_a = \boldsymbol{\gamma}_a \times \boldsymbol{\omega}_a, \quad (4)$$

где $\mathbf{r}_a = \overrightarrow{AO}$ – радиус-вектор точки A относительно начала абсолютной системы координат $Ox_1x_2x_3$, $\boldsymbol{\alpha}_a$, $\boldsymbol{\beta}_a$, $\boldsymbol{\gamma}_a$ – единичные векторы этой системы координат, заданные своими проекциями на связанные с телом $\mathscr{A}$ подвижные оси. Уравнения движения для тела $\mathscr{B}$ получаются из (1)–(4) заменой индекса a на индекс b.

Таким образом, имеется система с семью степенями свободы. В зависимости от действующих на нее внешних сил и моментов она может обладать теми или иными первыми интегралами. В дальнейшем для упрощения изложения предполагается, что внешние силы и моменты отсутствуют: $\mathbf{F}_a = \mathbf{F}_b = 0$, $\mathbf{M}_a = \mathbf{M}_b = 0$. В этом случае сохраняется вектор количества движения, центр масс системы в целом движется равномерно и прямо-

[1] *Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” Российской академии наук, Москва, Россия*
[2] *Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия*
**E-mail: jtm@narod.ru*

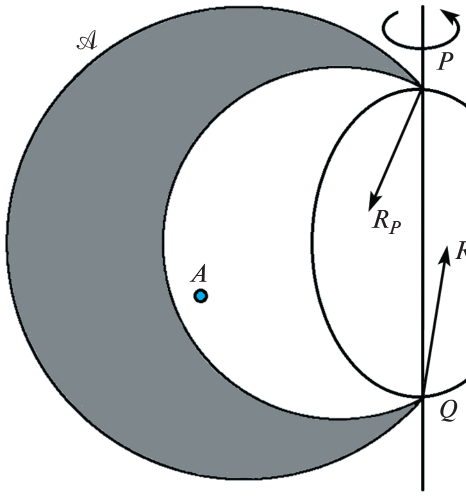

Рис. 1.

линейно. Без нарушения общности можно выбрать такую абсолютную систему отсчета, в которой положение центра масс остается неизменным. Кроме того, в этом случае сохраняется вектор момента количества движения, что позволяет выбрать абсолютную систему отсчета так, что направление вектора момента количеств движения совпадает с одной из ее осей. Наконец, сохраняется полная энергия системы. Таким образом, для интегрирования уравнений движения недостает, вообще говоря, одного дополнительного интеграла. Если одно из тел динамически симметрично и ось динамической симметрии совпадает с осью PQ, то система называется гиростатом. В этом случае, согласно Н.Е. Жуковскому и В. Вольтерра [1, 2], уравнения движения вполне интегрируемы.

Частные интегралы уравнений движения. Пусть оси связанной с телом $\mathcal{A}$ подвижной системы отсчета $Aa_1a_2a_3$ направлены по его главным центральным осям инерции. Обозначим A_1, A_2, A_3 его главные центральные моменты инерции. Без нарушения общности можно считать, что $A_1^{-1} > A_2^{-1} > A_3^{-1}$. Рассмотрим функции

$$F_\varepsilon = (A_1^{-1} - A_2^{-1})^{1/2} A_1\omega_{a1} + \varepsilon(A_2^{-1} - A_3^{-1})^{1/2} A_3\omega_{a3}, \quad \varepsilon = \pm 1. \tag{5}$$

Утверждение.

$$\left[\frac{dF_\varepsilon}{dt}\right]_{(2)} = 0 \tag{6}$$

на поверхности

$$F_\varepsilon = 0 \tag{7}$$

при выполнении условий

$$\begin{aligned} &\varepsilon(A_1^{-1} - A_2^{-1})^{1/2} p_1 - (A_2^{-1} - A_3^{-1})^{1/2} p_3 = 0, \quad p_2 = 0, \\ &\varepsilon(A_1^{-1} - A_2^{-1})^{1/2} q_1 - (A_2^{-1} - A_3^{-1})^{1/2} q_3 = 0, \quad q_2 = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

т.е. $F_\varepsilon = 0$ — *частные интегралы уравнений движения, аналогичные интегралу Гесса* [3].

Доказательство сводится к непосредственному вычислению.

Соотношения (8) задают пару фиксированных в теле $\mathcal{A}$ осей, описываемых уравнениями

$$\begin{aligned} &a_1 = (A_2^{-1} - A_3^{-1})^{1/2}\lambda_\varepsilon, \quad a_2 = 0, \\ &a_3 = \varepsilon(A_1^{-1} - A_2^{-1})^{1/2}\lambda_\varepsilon, \quad \lambda_\varepsilon \in \mathbf{R}. \end{aligned} \tag{9}$$

Замечание 1. Добавление внешнего силового поля силовых полей доставляет условие

$$(A_1^{-1} - A_2^{-1})^{1/2} M_1 + \varepsilon(A_2^{-1} - A_3^{-1})^{1/2} M_3 = 0, \tag{10}$$

дополнительное по отношению к условию (8).

Замечание 2. В приведенном рассуждении ничего не изменится, если заменить тело $\mathcal{A}$ на тело $\mathcal{B}$. Таким образом, частные интегралы вида (7) при выполнении условий вида (8) как для каждого из тел $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ по отдельности, так и для обоих тел сразу. В последнем случае одна из осей (9) для тела $\mathcal{A}$ должна совпадать с одной из осей (9) для тела $\mathcal{B}$.

Замечание 3. Равенство (7) означает, что вектор кинетического момента K_a тела $\mathcal{A}$, вычисленный относительно центра масс этого тела, во все время движения ортогонален вектору $f_a = ((A_1^{-1} - A_2^{-1})^{1/2}, 0, (A_2^{-1} - A_3^{-1})^{1/2})^T$, фиксированному в теле $\mathcal{A}$. При выполнении надлежащих условий такое же замечание справедливо и для тела $\mathcal{B}$.

Замечание 4. Для системы тяжелых твердых тел, связанных в цепочку, частные интегралы типа Гесса найдены в [4] (см. также [5]). Неинтегрируемость уравнений движения изучаемой связки двух тел доказана в [6].

Замечание 5. Случаи существования инвариантных соотношений представляют интерес как с чисто математической точки зрения [7–10], так и с точки зрения его приложений в механике [11–15].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жуковский Н.Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. I, II, III // Журн. Русского физ.-хим. об-ва. 1885. Т. 17. С. 81–113, 145–199, 231–280.
2. *Volterra V.* Sur la théorie des variations des latitudes // Acta Math. 1899j. V. 22. P. 201–358.
3. *Hess W.* Über die Euler'schen Bewegungsgleichungen und über eine neue paticuläre Lösung des problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt // Mathematische Annalen. June 1890. Bd. 37. H. 2. S. 153–181.

4. *Горр Г.В., Рубановский В.Н.* Об одном новом классе движений системы тяжелых шарнирно связанных тел // Прикладная математика и механика. 1988. Т. 52. Вып. 5. С. 707–712.
5. *Буров А.А.* О частных интегралах в задаче о движении тела, подвешенного на струне // Известия АН СССР. МТТ. 1987. № 2. С. 84.
6. *Ивин Е.А.* К вопросу об интегрируемости задачи о движении по инерции связки двух твердых тел // Вестник МГУ. Сер. Математика, механика. 1986. № 2. С. 63–66.
7. *Dragović V., Gagić B.* An L-A pair for the Hess–Apel'rot system and a new integrable case for the Euler-Piisson equations on SO(4) × SO(4) // Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A. 2001. V. 131. № 4. P. 845–855.
8. *Беляев А.В.* Аналитические свойства решений задачи о движении тяжелого твердого тела в случае Гесса // Укр. матем. вестн. 2005. Т. 2. № 33. С. 297–317.
9. *Беляев А.В.* Об общем решении задачи о движении тяжелого твердого тела в случае Гесса // Матем. сб. 2015. Т. 206. № 5. С. 5–34.
10. *Бизяев И.А., Борисов А.В., Мамаев И.С.* Случай Гесса–Аппельрота и квантование числа вращения // Нелинейная динамика. 2017. Т. 13. № 3. С. 433–452.
11. *Козлов В.В., Онищенко Д.А.* Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа // ДАН СССР. 1982. Т. 266. № 6. С. 1298–1300.
12. *Довбыш С.А.* О сепаратрисе неустойчивого положения равновесия волчка Гесса–Аппельрота // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 4. С. 632–642.
13. *Żołądek H.* Perturbations of the Hess–Appelrot and the Lagrange cases in the rigid body dynamics // J. Geometry and Physics. 2019. V. 142. P. 121–136.
14. *Бизяев И.А., Борисов А.В., Мамаев И.С.* Система Гесса–Аппельрота и ее неголономные аналоги // Тр. МИАН. 2016. Т. 294. С. 268–292.
15. *Burov A., Guerman A., Nikonov V.* Asymptotic Invariant Surfaces for Non-Autonomous Pendulum-Type Systems, Regular and Chaotic Dynamics. 2020. V. 25. № 1. P. 121–130.

ON LINEAR INVARIANT RELATIONS IN THE PROBLEM OF MOTION OF A BUNDLE OF TWO BODIES

A. A. Burov[a,b]

[a] *Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*
[b] *National Research University "Higher School of Economics", Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

The problem of free motion of two bodies connected by a pair of spherical hinges is considered. Conditions for the existence of invariant relations analogous to the Hess integral are specified.

Keywords: multi-body system mechanics, invariant relations, partial integrals, Hess integral