ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2020, том 491, с. 12–17

ФИЗИКА

УДК 537.52; 537.31; 536.97

К РАСЧЕТУ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ СЛАБОИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

© 2020 г. В. Л. Красовский[1,*]

Представлено академиком РАН Л. М. Зелёным 16.01.2020 г.
Поступило 16.01.2020 г.
После доработки 16.01.2020 г.
Принято к публикации 22.02.2020 г.

Представлены анализ и решение интегрального уравнения Больцмана для определения функции распределения электронов в слабом электрическом поле. Решение, основанное на простой модели столкновений с нейтральными частицами газа, сопоставляется с известным решением соответствующего приближенного дифференциального уравнения Фоккера–Планка. Существенное отличие двух подходов проявляется в поведении электронной функции распределения при скоростях электронов, сравнимых с тепловой скоростью атомов газа. В результате проведенных расчетов определены ядра интегральных уравнений Больцмана, необходимые для решения подобных и других задач физической кинетики в рамках принятой модели столкновений.

Ключевые слова: плазма, кинетическая теория, уравнение Больцмана, интеграл столкновений

DOI: 10.31857/S2686740020020169

Определение проводимости слабоионизованного газа на основе кинетической теории предполагает расчет функции распределения электронов в электрическом поле.

Вид распределения заряженных частиц по скоростям находится путем решения кинетического уравнения, причем интеграл столкновений электронов с нейтральными частицами обычно аппроксимируется дифференциальным выражением в рамках диффузионного приближения Фоккера–Планка [1–9]. Существует, однако, важная в практическом отношении и довольно простая модель элементарного акта соударения электрона с атомом или молекулой газа, для которой применимость диффузионного приближения оправдана не в полной мере. Это хорошо известная модель столкновений жестких упругих сфер [1–9]. При соударении электрона с тяжелой нейтральной частицей энергия и абсолютная величина скорости электрона мало изменяются из-за малого отношения масс $\frac{m}{M} \ll 1$. Малость изменения физической величины лежит в основе приближения Фоккера–Планка. Однако несмотря на малое изменение модуля скорости, изменение направления движения электрона вовсе не обязательно мало [3], что, строго говоря, противоречит условиям применимости диффузионного приближения. Поэтому представляет интерес сравнить решение кинетического уравнения Фоккера–Планка с интегралом столкновений в виде дифференциального выражения [2–9] с решением кинетического уравнения Больцмана с интегралом столкновений более общего вида. Как известно, расчет интеграла столкновений Больцмана в общем случае влечет за собой большие математические трудности [6–9]. Вместе с тем, как показано ниже, в рамках модели “упругих сфер” расчет интеграла столкновений, а с ним и решение уравнения Больцмана, значительно упрощается.

В работе представлено решение кинетического уравнения Больцмана для электронов в газе при наличии слабого электрического поля и проведено сравнение с соответствующим решением, основанным на фоккер-планковском приближении [1–9]. В стационарном состоянии функция распределения электронов $f(v,\theta)$ в постоянном однородном электрическом поле E_0 определяется решением кинетического уравнения вида (см., например, [6, 7])

$$-\frac{e}{m}E_0\left(z\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{1-z^2}{v}\frac{\partial f}{\partial z}\right) = St = S^+(v,z) - S^-(v,z), \quad (1)$$

где v – абсолютное значение скорости электрона, $z = \cos\theta$ – косинус угла между векторами скорости и поля. Интеграл столкновений учитывает приток электронов в некоторую точку простран-

[1] *Институт космических исследований Российской академии наук, Москва, Россия*
**E-mail: vkrasov@iki.rssi.ru*

ства скоростей S^+ и их убыль S^- в этой точке за счет столкновений. Общий вид $S^\pm$ хорошо известен [5–9]. В модели упругого удара электрона с твердым шариком (атомом или молекулой) радиуса R эффективное сечение рассеяния электрона равно постоянной $\sigma = \frac{R^2}{4}$. При этом средняя длина свободного пробега электрона является также постоянной величиной $\lambda = \frac{1}{\pi N R^2}$, где N – концентрация нейтрального газа. Постоянную $\sigma = \frac{1}{4\pi\lambda N}$ можно вынести за знак интегрирования в интегралах $S^\pm$, что значительно упрощает их расчет. Для записи уравнения (1) в более компактном виде будем использовать его в безразмерном виде с единицами измерения скоростей v и V и функций распределения электронов $f(v,z)$ и частиц газа $F(V)$:

$$[v] = [V] = V_T, \quad [f] = n_0/V_T^3, \quad [F] = N/V_T^3, \tag{2}$$

где V_T – тепловая скорость частиц газа, n_0 – концентрация электронов и $T = MV_T^2 = mv_T^2$ – температура плазмы. Так как в слабоионизованной плазме $n_0 \ll N$, столкновениями электронов с ионами и между собой можно пренебречь. Распределения электронов и нейтральных частиц в состоянии равновесия являются максвелловскими и в принятых единицах измерения имеют вид

$$f_M(v) = \left(\frac{\mu}{2\pi}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\mu v^2}{2}\right),$$
$$F_M(V) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{V^2}{2}\right), \tag{3}$$

где отношение масс обозначено $\mu = \frac{m}{M}$. С учетом сказанного, уравнение (1) принимает вид

$$-\frac{E}{\mu}\left(z\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{1-z^2}{v}\frac{\partial f}{\partial z}\right) + S^- = S^+. \tag{4}$$

Здесь напряженность поля характеризуется безразмерным параметром $E = \frac{e\lambda E_0}{T}$, а интегралы $S^\pm$ определены выражениями [6–9]

$$S^- = \int d^3V \int \left(\frac{d\Omega}{4\pi}\right) u f(\mathbf{v}) F(\mathbf{V}), \tag{5}$$

$$S^+ = \int d^3V \int \left(\frac{d\Omega}{4\pi}\right) u f(\mathbf{v}') F(\mathbf{V}'). \tag{6}$$

Хотя эти выражения многократно описаны в литературе, стоит все же пояснить еще раз смысл переменных, входящих в интегралы. Здесь $\mathbf{v}$ и $\mathbf{V}$ – скорости электрона и нейтральной частицы после столкновения, а $\mathbf{v}'$ и $\mathbf{V}'$ – соответствующие значения до столкновения. Внутренний интеграл представляет собой усреднение по углам рассеяния $d\Omega = d\alpha d\beta \sin\alpha$, где α – угол между векторами $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{V}$ и $\mathbf{u}' = \mathbf{v}' - \mathbf{V}'$, а величина под знаком интеграла u равна модулю вектора $\mathbf{u}$. Нелишне вспомнить также, что законы сохранения импульса и энергии при упругом ударе дают лишь четыре уравнения для шести неизвестных, определяющих векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{V}$ при шести известных значениях $\mathbf{v}'$ и $\mathbf{V}'$ до удара. Однако дефицит двух связей компенсируется усреднением в (5) и (6) по двум переменным α и β, связанным со скоростями.

В правой части (5) функцию f можно вынести за знак интеграла. Благодаря этому вычисление S^- сильно упрощается по сравнению с расчетом интеграла S^+, который требует значительно больших усилий. Убыль электронов S^- не зависит от углов рассеяния. Поэтому интеграл по телесному углу Ω равен единице. В результате выражение (5) сводится к виду

$$S^- = f(v,\theta)\int_0^\infty dV\, V^2 F(V) \int_0^\pi d\xi \sin\xi \,\times$$
$$\times \int_0^{2\pi} d\eta \sqrt{v^2 + V^2 - 2vV[\cos\theta\cos\xi + \sin\theta\sin\xi\cos(\eta-\psi)]}, \tag{7}$$

где компоненты векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{V}$ были предварительно представлены в сферических координатах в пространстве скоростей (v,θ,ψ) и (V,ξ,η) соответственно.

Внутренний двойной интеграл не зависит от параметра θ, благодаря чему интегрирование становится элементарным, если положить $\theta = 0$ (можно воспользоваться также известной формулой интегрирования по телесному углу, приведенной в справочниках по интегралам). В итоге получаем

$$S^-(v,\theta) = \left(\frac{2\pi}{3v}\right) f(v,\theta) \int_0^\infty dV\, V F(V) \left[(v+V)^3 - |v-V|^3\right]. \tag{8}$$

Наконец, подставляя максвелловское распределение (3) для функции распределения частиц нейтрального газа, приходим к окончательному результату

$$S^{-}(v,\theta) = \left(\frac{4\pi}{v}\right) f(v,\theta)\times \times\left(vF(v) + \left(\frac{1}{4\pi}\right)(1+v^2)\operatorname{erf}\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right)\right), \tag{9}$$

где $F(V) = F_M(V)$, и

$$\operatorname{erf}(x) \equiv \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)\int_0^x dt\exp(-t^2)$$

есть интеграл вероятностей. Таким образом, в рамках принятой модели столкновений интеграл S^{-} вычисляется строго, и нет смысла обращаться к каким-либо приближенным методам, включая приближение Фоккера–Планка.

Процедура решения уравнения (4) предполагает разложение левой и правой частей по полиномам Лежандра [1–3]:

$$f(v,z) = f_0(v) + f_1(v)z + \sum_{n=2}^{\infty} f_n(v)P_n(z), \tag{10}$$

$$S^{\pm}(v,z) = S_0^{\pm}(v) + S_1^{\pm}(v)z + \sum_{n=2}^{\infty} S_n^{\pm}(v)P_n(z), \tag{11}$$

где $z \equiv \cos\theta$. Полагая электрическое поле сколь угодно слабым, рассмотрим решение уравнения в линейном приближении по параметру E. В старшем порядке теории возмущений ($E = 0$) изотропная часть функции распределения есть просто максвелловское распределение (3), $f_0 = f_M(v)$. Поправка к f_0, как и высшие гармоники в разложении (10), $f_n(v)$ при $n \geq 2$, равны нулю в рамках линейной теории. Для удобства введем в рассмотрение функцию $G(v)$

$$G(v) \equiv \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} v^2}{ve^{-v^2/2} + (1+v^2)I(v)}, \quad I(v) \equiv \int_0^v dx\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \tag{12}$$

график которой показан на рис. 1.

Тогда с учетом (9) уравнение (4) переходит в простое по виду интегральное уравнение для функции $f_1(v)$, т.е. для соответствующего коэффициента в разложении (10),

$$Ef_M(v) + \frac{f_1(v)}{G(v)} = \frac{1}{v}S_1^{+}(v), \tag{13}$$

где первый член в левой части является источником возмущения функции распределения в слабом поле. Анализ решения этого уравнения, обсуждаемый ниже, показал, что его правая часть мала. Физически это означает, что приток электронов в некоторую точку пространства скоростей S_1^{+} не играет существенной роли в общем балансе

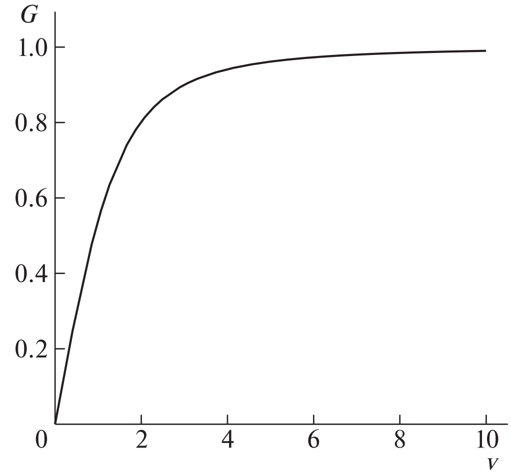

Рис. 1. Зависимость функции G от безразмерной скорости электрона согласно определению (12).

числа частиц в этой точке. Учитывая это и полагая $S_1^{+} = 0$ в (13), приходим к очень простому результату

$$f_1(v) = -Ef_M(v)G(v) = = -E\left(\frac{\mu}{2\pi}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{\mu v^2}{2}\right)G(v). \tag{14}$$

Эта функция распределения отличается дополнительным множителем $G(v)$ как от формулы (17) из статьи Давыдова [3], так и от соответствующих выражений из других литературных источников [5–9]. Отличие хорошо видно на рис. 2, где показаны зависимости от скорости соответствующих функций при частном значении параметра $\mu = \dfrac{1}{1836}$, для простоты без постоянного коэффициента $-E\left(\dfrac{\mu}{2\pi}\right)^{3/2}$. В отличие от [3], при $v = 0$ функция $f_1(v)$ обращается в нуль согласно (14), как и должно быть, поскольку находящийся в состоянии покоя электрон не может давать вклад в плотность потока (или в плотность тока). Вместе с тем наличие дополнительного множителя $G(v)$ в (14) малосущественно при расчете плотности тока путем интегрирования, по крайней мере, в пределе $\mu \to 0$,

$$\frac{j}{en_0V_T} = -\frac{4\pi}{3}\int_0^{\infty} dvv^3 f_1(v), \tag{15}$$

так как функция $G(v)$ заметно отличается от единицы лишь при скоростях меньших или порядка единицы (в единицах V_T), т.е. в узкой области в масштабе тепловой скорости электронов $v_T = \left(\dfrac{M}{m}\right)^{1/2} V_T$. Поэтому, если пренебречь поправками, обуслов-

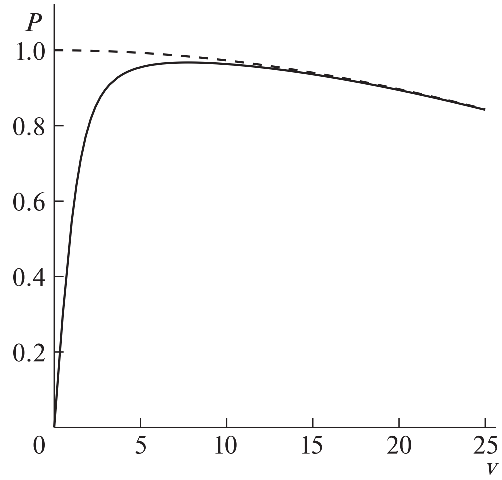

Рис. 2. Функция $P(v) \equiv G(v)\exp\left(-\frac{\mu v^2}{2}\right)$, определяющая зависимость функции распределения $f_1(v)$ от безразмерной скорости электрона v согласно равенству (14). Для сравнения штриховой линией показана соответствующая функция без множителя $G(v)$. Очевидна разница в поведении функций при скоростях электронов, сравнимых с тепловой скоростью нейтральных частиц.

ленными конечностью параметра $\mu = \frac{m}{M} \ll 1$, результат интегрирования полностью совпадает с известным выражением Лоренца [1, 3, 4]

$$j = j_0 = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{e\lambda E_0}{T}\right)(en_0 v_T). \quad (16)$$

Рассмотрим теперь насколько оправдано пренебрежение правой частью в (13). При решении этого интегрального уравнения удобно оперировать не самой функцией распределения $f_1(v)$, а вспомогательной функцией $y_1(v) \equiv \frac{f_1(v)}{f_M(v)}$.

Попутно заметим, что при решении интегральных кинетических уравнений (или интегро-дифференциальных в более общем случае в приложении к другим задачам кинетической теории в рамках принятой модели столкновений) удобнее записывать уравнения для функции $y(v,\theta) \equiv \frac{f(v,\theta)}{f_M(v)}$, что связано, в частности, с математической техникой расчета интеграла $S^+(v,\theta)$.

Для решения уравнения (13) необходимо привести интеграл $S_1^+(v)$ к более простому виду. С этой целью в интеграле (6) следует перейти от интегрирования по углам рассеяния к интегрированию по аргументам функции распределения электронов $f(\mathbf{v}') = f(\mathbf{v}' \equiv A, \cos\theta' \equiv q)$. Закон сохранения энергии при абсолютно упругом ударе позволяет перейти от функции $f(A,q)$ к $y(A,q)$ под знаком интеграла. При этом вместо $F(\mathbf{V}') = F(V')$ в интеграл (6) будет входить $F(V) = F_M(V)$. Далее путем изменения порядка интегрирования вычисления интегралов от алгебраических функций, не зависящих от переменной A, и замены функции распределения частиц газа на максвелловское распределение (3) пятикратный интеграл (6) сводится к обыкновенному. Здесь, опуская подробные математические выкладки, достаточно привести окончательный результат расчета коэффициента S_1^+ первой гармоники в разложении по полиномам Лежандра (11), который необходим для решения уравнения (13):

$$S_1^+(v) = \left(\frac{2\pi}{3}\right)\frac{f_M(v)}{v^2}\int_0^\infty dA y_1(A) K_1(A,v). \quad (17)$$

В пределе $\mu \to 0$ ядро K_1 имеет вид

$$K_1 = bF(a)(b^2 + 3a^2 + 2a^2b^2) - aF(b)\times \\ \times(a^2 + 3b^2 + 2a^2b^2) - ab(3a^2 + 3b^2 + 2a^2b^2)Z(a,b), \quad (18)$$

с обозначениями, введенными для краткости записи:

$$a \equiv \frac{|A - v|}{2}, \quad b \equiv \frac{A + v}{2},$$
$$Z(a,b) \equiv \left(\frac{1}{4\pi}\right)\left[\operatorname{erf}\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\right].$$

Чтобы исключить из (13) постоянный множитель E, далее используется функция

$$g_1(v) \equiv -\frac{y_1(v)}{E} = -\frac{f_1(v)}{Ef_M(v)},$$

для которой это уравнение в комбинации с (17) принимает вид

$$g_1(v) = G(v)\left[1 + \left(\frac{2\pi}{3v^3}\right)\int_0^\infty dA g_1(A) K_1(A,v)\right]. \quad (19)$$

Это интегральное уравнение не содержит параметров E и μ. Его решение определяет возмущение функции распределения электронов слабым электрическим полем $\delta f(v,\theta) = -Ef_M(v)g_1(v)\cos\theta$ как малую анизотропную добавку к равновесному изотропному распределению в пределе $E \to 0$, $\mu \to 0$. Решение без интегрального члена уже рассмотрено выше. Выясним, насколько велики поправки, обусловленные наличием интеграла в (19).

Простейший способ решения интегральных уравнений – метод итераций. Применительно к уравнению (19) он приводит к решению в виде ряда

$$g_1(v) = G(v)[1 - J_1(v) + J_2(v) + (\ldots)], \quad (20)$$

где

$$J_1(v) = -\left(\frac{2\pi}{3}\right)\frac{1}{v^3}\int_0^\infty dAG(A)K_1(A,v), \qquad (21)$$

$$J_2(v) = \left(\frac{2\pi}{3}\right)^2\frac{1}{v^3}\int_0^\infty dAG(A)K_1(A,v)\times \\ \times\frac{1}{A^3}\int_0^\infty dxG(x)K_1(x,A). \qquad (22)$$

Хотя такой подход в общем случае не всегда ведет к успеху, как оказалось, ряд (20) быстро сходится. Интегрирование в (21) и (22) с ядром (18) проведено с помощью вычислительной техники. Как результат, поведение функций $J_1(v)$ и $J_2(v)$, увеличенных в 10 и 100 раз соответственно, показано на рис. 3. Максимальное значение первой поправки равно $J_1(0) = 0.0894$. Максимум функции J_2 намного меньше. Если скорость электрона значительно превышает тепловую скорость частиц газа ($v \gg 1$ с принятой единицей измерения V_T), то поправки к единице в (20) столь малы, что $g_1 = G$ с очень высокой точностью. При скоростях, сравнимых с тепловой скоростью атомов (или молекул газа), т.е. в узкой области в масштабе тепловой скорости электронов $v_T = \frac{V_T}{\mu^{1/2}}$, суммарная поправка не превышает 9%, т.е. $g_1 \approx G$. Если необходимо добиться большей точности, в формуле (14) функцию G следует заменить на функцию g_1 с учетом поправок J_1 и J_2 в (20).

Таким образом, вид функции $f_1(v)$ с хорошей точностью определен равенством (14). Это выражение является основным результатом расчета функции распределения в линейном приближении по полю в рамках принятой модели столкновений частиц как упругих шариков. Оно служит основой и для построения нелинейной теории методом малых возмущений, в частности, для расчета квадратичных по полю поправок к изотропной части распределения. Поэтому в качестве дополнения уместно привести аналог формулы (17) для изотропной части функции распределения $f_0(v) = f_M(v)y_0(v)$:

$$S_0^+(v) = 2\pi\frac{f_M(v)}{v}\times \\ \times\int_0^\infty dAAy_0(A)K_0(a,b)\left[1+\frac{\mu}{4}(8+v^2-A^2)\right], \qquad (23)$$

где

$$K_0(a,b) \equiv bF(a) - aF(b) - abZ(a,b), \qquad (24)$$

с обозначениями, введенными выше. Формула (23) необходима для расчета поправок к максвелловскому распределению порядка E^2. Она учитывает конечность отношения масс электрона и нейтральной частицы вплоть до членов первого порядка по параметру $\mu = \frac{m}{M}$. Необходимость учета слагаемого, пропорционального μ, отмечена, в частности, в [6]. Кроме того, выражения (17) и (23) применимы и для описания других кинетических явлений, например, для решения задачи о релаксации начального изотропного возмущения распределения электронов в результате столкновений или релаксации анизотропного возмущения функции распределения типа электронного пучка.

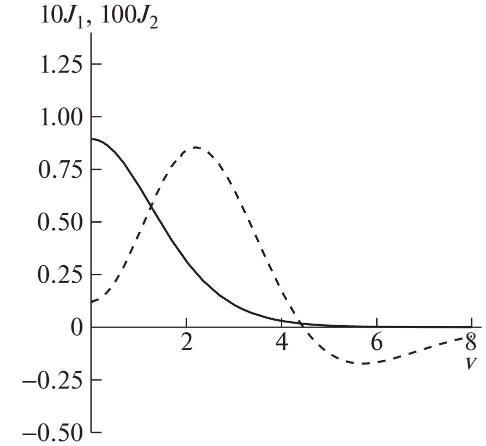

Рис. 3. Иллюстрация поведения функций, входящих в решение (20) интегрального уравнения (19). Штриховая линия показывает функцию $100J_2(v)$.

Резюмируя, отметим, как основной результат решения уравнения Больцмана, что анизотропная часть функции распределения электронов линейного приближения по полю отличается от соответствующего хорошо известного выражения [2–9] поведением при скоростях электронов, сравнимых с тепловой скоростью нейтральных частиц. С целью коррекции формулы для анизотропной добавки к равновесному распределению, рассчитанной с использованием приближения Фоккера–Планка [2–9], достаточно умножить ее на функцию $G(v)$, определенную выражением (12), что предполагает малость и отбрасывание интегрального члена в уравнении Больцмана. При необходимости большей точности, функцию G следует заменить на решение $g_1(v)$ интегрального уравнения (19), хотя это приводит лишь к относительно небольшой дополнительной коррекции. Подчеркнем еще раз основные допущения, использованные в расчетах, обсуждаемых выше. В интеграле столкновений учтены только соударения электронов с нейтральными частицами в рамках модели упругих шариков. Формула для возмущения функции распределения электронов электрическим полем получена в линейном приближении и, по существу, представляет собой предельное выражение, когда оба безразмерных параметра задачи E и μ стремятся к нулю. Наконец, конкретный вид функции $G(v)$ согласно ее определению (12) является в значительной степени проявлением максвелловского распределения нейтральных частиц, на которое электрическое поле не оказывает никакого влияния.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лорентц Г.А.* Теория электронов. М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1956.
2. *Druyvesteyn M.J.* // Physica. 1930. V. 10. P. 61; 1934. V. 14. P. 1003.
3. *Давыдов Б.И.* // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. № 5. С. 463.
4. *Шкаровский И., Джонстон Т, Бачинский М.* Кинетика частиц плазмы. М.: Атомиздат, 1969. Гл. 4. 396 с.
5. *Смирнов Б.М.* Физика слабоионизованного газа. М.: Наука, 1972. 416 с.
6. *Гуревич А.В., Шварцбург А.Б.* Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере. М.: Наука, 1973. 272 с.
7. *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 528 с.
8. *Райзер Ю.П.* Физика газового разряда. М.: Наука, 1979. 592 с.
9. *Голант В.Е., Жилинский А.П., Сахаров И.Е.* Основы физики плазмы. СПб: Лань, 2011.

ON THE CALCULATION OF THE ELECTRON DISTRIBUTION FUNCTION IN A WEAKLY IONIZED PLASMA IN AN ELECTRIC FIELD

V. L. Krasovsky[a]

[a] *Space Research Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS L.M. Zeleny

An analysis and solution of the integral Boltzmann equation to determine electron distribution function in a weak electric field are presented. The solution based on a simple model of electron collisions with neutral particles of a gas is compared with the well-known solution of the corresponding approximate differential Fokker–Plank equation. The essential difference between the two approaches is manifested in the behavior of the electron distribution function at electron velocities comparable with the thermal velocity of the atoms of the gas. As a result of the calculations carried out, kernels of the integral Boltzmann equations necessary for solving of similar and other problems of physical kinetics have been determined within the framework of the accepted model of collisions.

Keywords: plasma, kinetic theory, Boltzmann equation, collision integral