

УДК 531.011:521.1

ПЕРЕМЕННЫЕ ДЕЙСТВИЕ–УГОЛ В ОДНОМ ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ

© 2020 г. А. П. Маркеев^{1,2,*}

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 06.11.2019 г.

Поступило 11.11.2019 г.

После доработки 11.11.2019 г.

Принято к публикации 11.11.2019 г.

Рассматривается ограниченная задача трех тел (материальных точек), движущихся под действием ньютоновского гравитационного притяжения. Массы основных притягивающих точек равны, а сами точки движутся по круговым орбитам вокруг их общего центра масс. Третья точка имеет пренебрежимо малую массу и движется вдоль прямой, перпендикулярной плоскости орбит основных точек и проходящей через их центр масс. Задача о таком движении является интегрируемой. Для случая, когда движение третьей точки представляет собой колебания, в работе предложена процедура введения переменных действие–угол. В качестве примеров рассмотрены нелинейные колебания малой амплитуды и колебания с амплитудами, сколь угодно большими по сравнению с расстоянием между основными притягивающими точками.

Ключевые слова: ограниченная задача трех тел, уравнения Гамильтона, периодические движения, канонические преобразования

DOI: 10.31857/S2686740020020182

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим движение трех материальных точек P_i ($i = 1, 2, 3$), притягивающихся по закону Ньютона. Массы точек P_1 и P_2 предполагаем равными ($M_1 = M_2 = M$), а массу третьей точки P_3 считаем настолько малой по сравнению с M , что ее влиянием на движение точек P_1 и P_2 можно пренебречь. Будем предполагать, что точки P_1 и P_2 движутся по круговым орбитам вокруг их общего центра масс O . Угловая скорость Ω при таком движении равна $\frac{\sqrt{2\gamma M}}{\ell^{3/2}}$, где γ – универсальная гравитационная постоянная, а ℓ – диаметр окружности, по которой движутся точки P_1 и P_2 . Задача о движении точки P_3 под действием притяжения точек P_1 и P_2 допускает частное решение, для которого точка P_3 движется по прямой, перпендикулярной плоскости, в которой движутся точки P_1 и

P_2 , и проходящей через центр масс O этих точек [1, 2].

За координату, задающую положение точки P_3 на ее прямолинейной траектории, примем (см. рис. 1) величину q ($-\infty < q < \infty$, $\ell|q|$ – расстояние от точки P_3 до точки O).

В качестве независимой переменной, вместо времени t , возьмем безразмерную величину $v = \Omega t$.

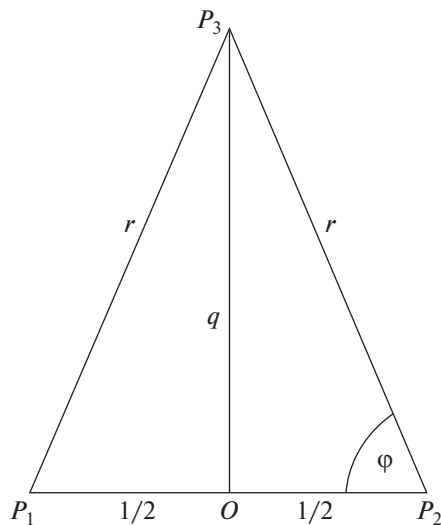


Рис. 1. К уравнениям движения.

¹ Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского
Российской академии наук, Москва, Россия

² Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет),
Москва, Россия

*E-mail: anat-markeev@mail.ru

Движение точки P_3 описывается системой двух канонических дифференциальных уравнений

$$\frac{dq}{dv} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dv} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad (1)$$

с функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{r} \quad \left(r = \frac{1}{2}\sqrt{1+4q^2}\right). \quad (2)$$

Уравнения (1) допускают интеграл энергии

$$H = h = \text{const} \quad (h \geq -2). \quad (3)$$

Движение системы с функцией Гамильтона (2) подробно изучено [1–5]. В частности показано, что при $h = -2$ точка P_3 находится в устойчивом положении равновесия $q = 0$, совпадающем с центром масс O точек P_1 и P_2 , а при $-2 < h < 0$ точка P_3 совершает периодические колебания в окрестности равновесия. При этом $-q_{\max} < q < q_{\max}$, где $q_{\max}$ — максимальное отклонение точки P_3 от положения равновесия:

$$q_{\max} = \frac{k\sqrt{1-k^2}}{1-2k^2}, \quad k = \sin \frac{\varphi_{\max}}{2}. \quad (4)$$

Здесь $\varphi_{\max}$ — максимальное значение угла φ , который составляет отрезок P_3P_2 с отрезком P_1P_2 (рис. 1). Очевидно, что $0 < \varphi_{\max} < \pi/2$, поэтому

$$0 < k < \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (5)$$

Постоянная h интеграла энергии (3) выражается через k по формуле

$$h = -2(1 - 2k^2). \quad (6)$$

Значения $h \geq 0$ отвечают неограниченным движением точки P_3 .

Работа посвящена случаю колебаний, когда выполняется условие (5). Основная цель состоит в нахождении переменных действие–угол I, w . Для случая нелинейных колебаний с амплитудой, малой по сравнению с расстоянием между точками P_1 и P_2 , замена переменных $q, p \rightarrow w, I$ получена в виде сходящихся рядов по параметру k ($0 < k \ll 1$). Найдено также выражение для функции Гамильтона через переменную I в случае больших амплитуд колебаний, когда $0 < \mu \ll 1$, где

$$\mu = \sqrt{1 - 2k^2}. \quad (7)$$

Ограниченной задаче трех точек в случае равных масс точек P_1 и P_2 в последние десятилетия уделялось очень большое внимание. Особенно много работ появилось после публикации статьи [6], в которой рассматривался случай эллиптической ограниченной задачи и показано существование движений, для которых величина $|q(t)|$ при-

нимает сколь угодно большие значения как при $q > 0$, так и при $q < 0$, но не имеет предела при $t \rightarrow \infty$ (осциллирующие движения точки P_3). К настоящему времени весьма подробно исследована задача о существовании, устойчивости и бифуркациях периодических движений (не только прямолинейных, но и произвольных пространственных) в круговой и эллиптической задачах, дан анализ возможности возникновения хаотических движений, рассмотрены обобщения классической задачи на случай, учитывающий световое давление, а также на случай, когда количество точек конечных масс больше двух. Обширная библиография упомянутых исследований содержится в публикациях [5–12].

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУНКЦИИ ГАМИЛЬТОНА. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННОЙ ДЕЙСТВИЕ

При помощи канонических преобразований приведем функцию Гамильтона (2) к форме, более удобной для целей нашего исследования. Первое преобразование $q, p \rightarrow \varphi, p_\varphi$ задается равенствами (смысл угла φ виден из рис. 1)

$$q = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi, \quad p = 2 \cos^2 \varphi p_\varphi. \quad (8)$$

Второе преобразование $\varphi, p_\varphi \rightarrow x, p_x$ задается формулами

$$\varphi = 2 \arcsin(kx), \quad p_\varphi = \frac{1}{2k} \sqrt{1 - k^2 x^2} p_x, \quad (9)$$

в которых величина k определена равенствами (4). В переменных x, p_x функция (2) записывается в виде

$$H = \frac{1}{2k^2} (1 - k^2 x^2) (1 - 2k^2 x^2)^4 p_x^2 - 2(1 - 2k^2 x^2). \quad (10)$$

Из интеграла (3) следует, что

$$p_x^2 = \frac{8k^4(1 - x^2)}{(1 - k^2 x^2)(1 - 2k^2 x^2)^4}. \quad (11)$$

В плоскости x, p_x фазовые траектории являются замкнутыми кривыми, окружающими точку $x = 0, p_x = 0$ и симметричными относительно осей x и p_x . Величина x меняется в интервале $(-1, 1)$, величина же $|p_x|$ может быть сколь угодно большой, если значение параметра k близко к $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Переменная действие I равняется поделенной на 2π площади, заключенной внутри фазовой траектории. Ввиду упомянутой симметрии и при учете выражения (11) имеем

$$I = I(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 p_x dx = \frac{4\sqrt{2}k^2}{\pi} \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-k^2x^2}(1-2k^2x^2)} dx. \quad (12)$$

Интеграл в (12) можно выразить через полные эллиптические интегралы 1-го, 2-го и 3-го родов. Получим

$$I(k) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} [K(k) - 2E(k) + \Pi(2k^2, k)]. \quad (13)$$

Здесь и далее используются общепринятые [13–15] обозначения для эллиптических интегралов и функций.

Функция (13) имеет обратную, так как $\frac{\partial I}{\partial k} \neq 0$. Действительно, воспользовавшись известными правилами дифференцирования полных эллиптических интегралов [14], из (13) получаем

$$\frac{\partial I}{\partial k} = \frac{2\sqrt{2}k}{\pi(1-2k^2)} [2E(k) - K(k) + \Pi(2k^2, k)]. \quad (14)$$

При выполнении неравенства (5) $\Pi(2k^2, k) > 0$, а $2E(k) > K(k)$. Поэтому $\frac{\partial I}{\partial k} > 0$.

Функция Гамильтона зависит только от одной переменной I :

$$H = -2(1 - 2k^2), \quad (15)$$

где $k = k(I)$ — функция, обратная функции $I(k)$ из (13). Частота колебаний ω вычисляется согласно равенствам

$$\omega = \frac{\partial H}{\partial I} = \frac{\partial H}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial I} = 8k \left(\frac{\partial I}{\partial k} \right)^{-1} = \frac{2\sqrt{2}\pi(1-2k^2)}{2E(k) - K(k) + \Pi(2k^2, k)}. \quad (16)$$

В переменных действие–угол I, w исходные уравнения движения (1) записываются в виде

$$\frac{dw}{dv} = \omega, \quad \frac{dI}{dv} = 0. \quad (17)$$

Частота (16) является монотонно убывающей функцией параметра k . При $0 < k < \frac{\sqrt{2}}{2}$ она удовлетворяет неравенству $0 < \omega < 2\sqrt{2}$. Наибольшее значение ω отвечает малым линейным колебаниям ($0 < k \ll 1$), при возрастании k частота убывает и при $k \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}$ стремится к нулю. График функции $\omega(k)$ приведен на рис. 2.

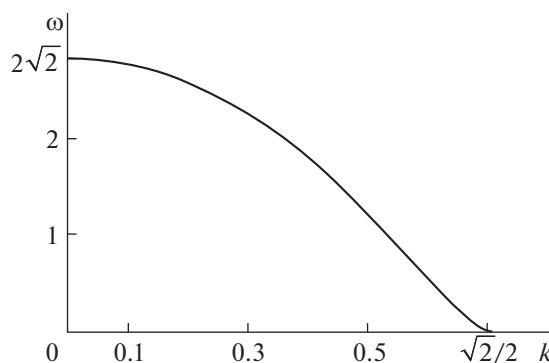


Рис. 2. Частота нелинейных колебаний ω как функция параметра k .

ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ $q, p \rightarrow w, I$

Сделаем еще одно каноническое преобразование $x, p_x \rightarrow u, p_u$ по формулам

$$x = \operatorname{sn}(u, k), \quad p_x = \frac{p_u}{\operatorname{cn}(u, k) \operatorname{dn}(u, k)}. \quad (18)$$

Функция Гамильтона (10) принимает вид

$$H = \frac{[1 - 2k^2 \operatorname{sn}^2(u, k)]^4}{2k^2 \operatorname{cn}^2(u, k)} p_u^2 - 2[1 - 2k^2 \operatorname{sn}^2(u, k)]. \quad (19)$$

Из интеграла энергии (3) следует, что

$$p_u^2 = \frac{8k^4 \operatorname{cn}^4(u, k)}{[1 - 2k^2 \operatorname{sn}^2(u, k)]^4}. \quad (20)$$

Отсюда и из уравнения $\frac{du}{dv} = \frac{\partial H}{\partial p_u}$ получаем

$$\left(\frac{du}{dv} \right)^2 = 8[1 - 2k^2 \operatorname{sn}^2(u, k)]^4. \quad (21)$$

Без ограничения общности будем считать, что при $v = 0$ выполнены условия $q = 0$, $p = 2\sqrt{2}k$. Тогда при $v = 0$ имеем $\varphi = 0$, $p_\varphi = \sqrt{2}k$; $x = 0$, $p_x = 2\sqrt{2}k^2$; $u = 0$, $p_u = 2\sqrt{2}k^2$. Из замен переменных (8), (9), (18) следуют равенства

$$q = \frac{k \operatorname{sn}(u, k) \operatorname{dn}(u, k)}{1 - 2k^2 \operatorname{sn}^2(u, k)}, \quad p = 2\sqrt{2}k \operatorname{cn}(u, k). \quad (22)$$

Полагая, что при $v = 0$ переменная w равна нулю, и опираясь на уравнения (17) и (21), получаем следующую зависимость между переменными u и w :

$$w = w(u, k) = \frac{\sqrt{2}\omega}{4} \int_0^u \frac{d\xi}{[1 - 2k^2 \operatorname{sn}^2(\xi, k)]^2}. \quad (23)$$

Несложно убедиться, что (помимо очевидного равенства $w(0, k) = 0$) справедливо равенство $w(4K(k), k) = 2\pi$. На рис. 3 показана зависимость

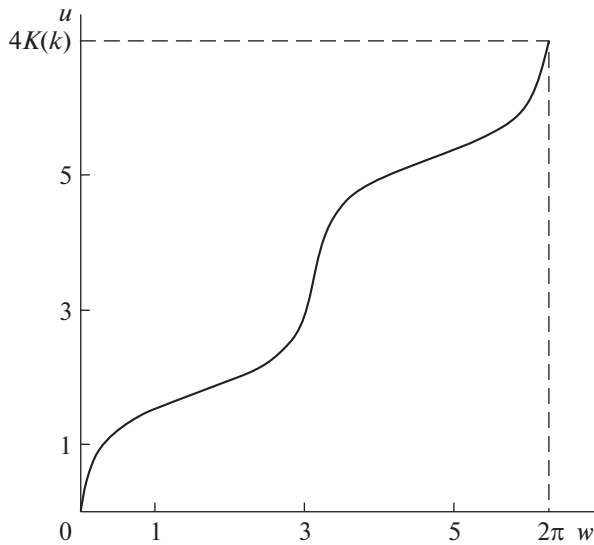


Рис. 3. Зависимость функции u от угловой переменной w при $k = 0.6$.

получаемой из (23) функции $u = u(w, k)$ от w для случая $k = 0.6$.

Справедлива следующая

Теорема. При помощи 2π -периодического по w унивалентного канонического преобразования, задаваемого равенствами (22), в которых величина u выражается через w посредством равенства (23), функция Гамильтона (2) приводится к виду (15), отвечающему переменным действие–угол I, w ; величина ω определяется по формуле (16), а k выражается через I согласно равенству (13).

Доказательство теоремы сразу следует из проведенных выше вычислений. Надо только показать, что замена переменных $q, p \rightarrow w, I$, определяемая равенствами (22), (23), является унивалентным каноническим преобразованием. Для этого достаточно убедиться, что якобиан функций q, p по переменным w, I равняется единице:

$$\frac{\partial(q, p)}{\partial(w, I)} = 1. \quad (24)$$

Но левую часть равенства (24) можно представить в виде произведения двух якобианов

$$\frac{\partial(q, p)}{\partial(w, I)} = \frac{\partial(q, p)}{\partial(u, k)} \frac{\partial(u, k)}{\partial(w, I)}.$$

Воспользовавшись теперь известными правилами дифференцирования эллиптических функций Якоби по аргументу u и модулю k и приняв во внимание, что $\frac{\partial k}{\partial w} = 0$, придем к соотношению

$$\frac{\partial(q, p)}{\partial(u, k)} = \left[\frac{\partial(u, k)}{\partial(w, I)} \right]^{-1} = 8\sqrt{2} k r^2,$$

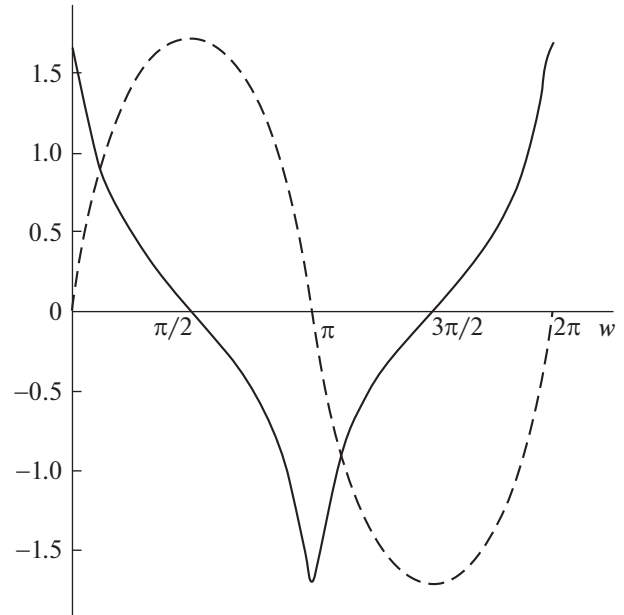


Рис. 4. Графики функций $q(w, k)$ (штриховая линия) и $p(w, k)$ (сплошная линия) при $k = 0.6$.

из которого следует справедливость равенства (24).

Замечание 1. Нетрудно проверить, что функции (23) являются решениями следующей (негамильтоновой) системы уравнений:

$$\frac{dq}{du} = \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + 4q^2) p, \quad \frac{dp}{du} = -\frac{2\sqrt{2}q}{\sqrt{1 + 4q^2}} \quad (25)$$

с начальными условиями $q(0) = 0$, $p(0) = 2\sqrt{2}k$.

Замечание 2. Если при помощи первого из уравнений (17) перейти к независимой переменной w , то исходные уравнения (1) запишутся в виде

$$\frac{dq}{dw} = \frac{1}{\omega} p, \quad \frac{dp}{dw} = -\frac{8q}{\omega (1 + 4q^2)^{3/2}}. \quad (26)$$

Решение $q = q(w, k)$, $p = p(w, k)$ этих уравнений с начальными условиями $q(0, k) = 0$, $p(0, k) = 2\sqrt{2}k$ задает описанное выше 2π -периодическое по w каноническое преобразование $q, p \rightarrow w, I$, вводящее переменные действие–угол.

На рис. 4 показаны графики функций $q = q(w, k)$ и $p = p(w, k)$ для случая $k = 0.6$.

О ЗАМЕНЕ $q, p \rightarrow w, I$ В СЛУЧАЕ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ ($0 < k \ll 1$)

При малых k частота колебаний (16) представляема сходящимся рядом вида

$$\omega = 2\sqrt{2}\left(1 - \frac{9}{4}k^2 - \frac{21}{64}k^4 + \frac{109}{256}k^6 + \frac{14859}{16384}k^8 + \frac{79653}{65536}k^{10} + \dots\right). \quad (27)$$

Из (23) и (27) можно найти функцию $u = u(w, k)$, обратную w , в виде ряда по степеням k . Подставив эту функцию в (22), найдем, что разложение для переменной q имеет следующую структуру:

$$q = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} c_{2(n+m)-1} k^{2(n+m)-1} \right) \sin(2n-1)w, \quad (28)$$

где $c_{2(n+m)-1}$ — не зависящие от k и w числовые коэффициенты. Если разложение (28) найдено, то разложение для p легко получается из (27) и первого из уравнений (26).

С погрешностью порядка k^{11} разложение (28) имеет вид

$$\begin{aligned} q = & k \sin w + k^3 \left(\frac{27}{16} \sin w + \frac{3}{16} \sin 3w \right) + \\ & + k^5 \left(\frac{839}{256} \sin w + \frac{33}{64} \sin 3w + \frac{29}{256} \sin 5w \right) + \\ & + k^7 \left(\frac{26333}{4096} \sin w + \frac{2193}{2048} \sin 3w + \right. \\ & \left. + \frac{1307}{3072} \sin 5w + \frac{1181}{12288} \sin 7w \right) + \\ & + k^9 \left(\frac{416011}{32768} \sin w + \frac{132333}{65536} \sin 3w + \right. \\ & \left. + \frac{33377}{32768} \sin 5w + \frac{7457}{16384} \sin 7w + \frac{6297}{65536} \sin 9w \right). \end{aligned} \quad (29)$$

Из (13) следует, что величина k представима в виде ряда по полнцелым степеням переменной действия:

$$\begin{aligned} k = & \frac{2^{3/4}}{2} \sqrt{I} \left(1 - \frac{9\sqrt{2}}{32} I + \frac{107}{1024} I^2 + \right. \\ & \left. + \frac{463\sqrt{2}}{32768} I^3 - \frac{55213}{2097152} I^4 - \frac{15839\sqrt{2}}{67108864} I^5 + \dots \right). \end{aligned}$$

Функция Гамильтона (15), выраженная через переменную I , имеет вид

$$\begin{aligned} H = & -2 + 2\sqrt{2} I - \frac{9}{4} I^2 + \frac{47\sqrt{2}}{64} I^3 - \\ & - \frac{125}{1024} I^4 - \frac{3777\sqrt{2}}{32768} I^5 + \frac{9065}{131072} I^6 + \dots \end{aligned}$$

О СЛУЧАЕ КОЛЕБАНИЙ БОЛЬШОЙ АМПЛИТУДЫ

Пусть величина k близка к $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Тогда параметр μ , задаваемый равенством (7), мал ($0 < \mu \ll 1$). Ве-

личина интеграла $\Pi(2k^2, k)$ при значениях k , близких $\frac{\sqrt{2}}{2}$, имеет порядок μ^{-1} [14]. Проведя несколько громоздкие вычисления, для него можно найти такое асимптотическое представление:

$$\begin{aligned} \Pi(2k^2, k) = & \frac{\sqrt{2}\pi}{2\mu} - \frac{\pi}{2a} \left(1 + \frac{9}{40}\mu^4 + \frac{49}{384}\mu^8 \right) + \\ & + \frac{a}{6}\mu^2 \left(1 + \frac{25}{36}\mu^4 + \frac{405}{1408}\mu^8 \right) + O(\mu^{12}), \end{aligned}$$

где введено обозначение $a = K\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Для частоты колебаний (16) и переменной действие (13) при малых μ справедливы разложения

$$\begin{aligned} \omega = & 4\mu^3 - \frac{8\sqrt{2}a}{3\pi}\mu^6 + \frac{6\sqrt{2}}{5a}\mu^8 + \\ & + \frac{32a^2}{9\pi^2}\mu^9 - \frac{5\sqrt{2}a}{7\pi}\mu^{10} - \frac{16}{5\pi}\mu^{11} + O(\mu^{12}), \\ I = & \frac{1}{\mu} - \frac{\sqrt{2}}{a} - \frac{\sqrt{2}a}{3\pi}\mu^2 + \frac{3\sqrt{2}}{40a}\mu^4 - \\ & - \frac{5\sqrt{2}a}{168\pi}\mu^6 + \frac{7\sqrt{2}}{384a}\mu^8 - \frac{15\sqrt{2}a}{1408\pi}\mu^{10} + O(\mu^{12}), \end{aligned}$$

а функция Гамильтона (15) представима в виде ряда по отрицательным степеням I :

$$\begin{aligned} H = & -\frac{2}{I^2} + \frac{4\sqrt{2}}{a I^3} - \frac{12}{a^2 I^4} + \\ & + \frac{4\sqrt{2}(a^4 + 12\pi)}{3\pi a^3 I^5} - \frac{40(a^4 + 3\pi)}{3\pi a^4 I^6} + \\ & + \frac{\sqrt{2}[(400 - 3\pi)a^4 + 480\pi]}{10\pi a^5 I^7} - \\ & - \frac{7[20a^8 + 3\pi(400 - 9\pi)a^4 + 720\pi^2]}{45\pi^2 a^6 I^8} + \dots \end{aligned}$$

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена по теме государственного задания (№ регистрации АААА-А20-120011690138-6) в Институте проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН и в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pavanini G. // Annali di Mathematica. 1907. Ser. III. T. XIII. P. 179–202.
2. MacMillan W.D. // Astronomical J. 1911. V. 27. P. 11–13.
3. Stumpff K. Himmelsmechanik. Band 2. B.: VEB, 1965. S. 73–79.
4. Себехей В. Теория орбит. Ограниченная задача трех тел. М.: Наука, 1982. 657 с.

5. *Belbruno E., Llibre J., Olle' M.* // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 1994. V. 60. Iss. 1. P. 99–129.
6. *Ситников К.* // *ДАН СССР*. 1960. Т. 133. № 2. С. 303–306.
7. *Dvorak R., Vrabec F., Wodnar K.* *Sistema Solari e Sistema Stellari-Perturbative-Dinamica del Volo Spaziale* / Eds. A. Celletti and E. Rerozzi. Universita' di L'Aquila, 1993. P. 16–22.
8. *Тхай В.Н.* // *ПММ*. 2006. Т. 70. Вып. 5. С. 813–834.
9. *Bountis T., Papadakis K.E.* // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2009. V. 104. Iss. 1/2. P. 205–225.
10. *Sidorenko V.V.* // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2011. V. 109. Iss. 4. P. 367–384.
11. *Hagel J.* // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2015. V. 122. Iss. 2. P. 101–116.
12. *Красильников П.С.* *Прикладные методы исследования нелинейных колебаний*. М.; Ижевск: Ин-т комп. исследований, 2015. 528 с.
13. *Журавский А.М.* *Справочник по эллиптическим функциям*. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1941. 235 с.
14. *Byrd P.F., Friedman M.D.* *Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists*. В.: Springer-Verlag, 1954. 355 p.
15. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*. М.: Наука, 1971. 1108 с.

ACTION-ANGLE VARIABLES IN ONE PARTICULAR CASE OF THE RESTRICTED THREE-BODY PROBLEM

A. P. Markeev^{a,b}

^a *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russian Federation*

^b *Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

The restricted problem of three bodies (material points) moving under the influence of Newtonian gravitational attraction is considered. The masses of the main attracting points are equal, and the points themselves move in circular orbits around their common center of mass. The third point has a negligible mass and moves along a straight line perpendicular to the orbits of the main points and passing through their center of mass. The problem under study is integrable. For the case when the third point motion is oscillatory, the paper proposes a procedure for introducing action-angle variables. Nonlinear oscillations of small amplitude as well as oscillations with amplitudes arbitrarily large in comparison with the distance between the main attracting points are considered as examples.

Keywords: restricted three-body problem, Hamiltonian equations, periodic solutions, canonical transformations