ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2020, том 491, с. 58–61

МЕХАНИКА

УДК 531.36

О СМЕНЕ ХАРАКТЕРА УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ЖЕСТКОСТИ ПО ОДНОЙ ИЗ ОБОБЩЕННЫХ КООРДИНАТ

© 2020 г. Ю. Д. Селюцкий[1],*

Представлено академиком РАН В.Ф. Журавлевым 22.10.2019 г.
Поступило 24.10.2019 г.
После доработки 24.10.2019 г.
Принято к публикации 13.12.2019 г.

Рассматривается линейная механическая система с n степенями свободы. Исследовано чередование характера устойчивости тривиального равновесия при изменении жесткости по одной из обобщенных координат. Определено максимальное количество таких смен характера устойчивости. Приведен пример системы, в которой реализуется такое количество изменений характера устойчивости.

Ключевые слова: колебания, устойчивость, диссипация, позиционные неконсервативные силы

DOI: 10.31857/S2686740020020200

Исследованию влияния различных типов сил на характер устойчивости положения равновесия посвящено большое количество работ. В частности, Меркин показал [1], что если все собственные числа матрицы потенциальных сил совпадают, то сколь угодно малые циркуляционные силы приведут к потере устойчивости (в отсутствие сил, зависящих от скоростей). Этот результат впоследствии был обобщен. В частности, в [2] показано, что при наличии у данной матрицы кратных собственных чисел возможна дестабилизация сколь угодно малыми циркуляционными силами. Структура циркуляционных сил, приводящих к дестабилизации системы с кратными частотами, исследована в [3].

Активно изучается также влияние диссипативных сил на характер устойчивости. В частности, в [4] проанализировано влияние малых диссипативных сил без полной диссипации на границу области устойчивости в системе с двумя степенями свободы при наличии всех типов сил. В [5] приведен пример механической системы, в которой изменение коэффициента демпфирования по одной из обобщенных координат приводит к нескольким сменам характера устойчивости.

Для многих технических объектов изменить позиционные неконсервативные силы достаточно затруднительно, в то время как потенциальные силы сравнительно легко могут быть изменены (например, за счет жесткости элементов системы). В [6] исследовано влияние изменения матрицы потенциальных сил в системе, в которой отсутствуют неконсервативные силы, на эволюцию собственных частот. В частности, показано, что они возрастают с увеличением жесткости системы даже при наличии гироскопических сил (обобщение теоремы Рэлея).

Поэтому представляется интересным исследовать влияние изменения потенциальных сил на поведение собственных чисел (в том числе на характер устойчивости) системы с неконсервативными силами.

В [7] приведен пример механической системы с двумя степенями свободы, в которой при изменении жесткости по одной из обобщенных координат характер устойчивости меняется дважды.

Условия на параметры системы, при которых изменение коэффициента жесткости по одной из обобщенных координат в системе с двумя степенями свободы приводит к смене характера устойчивости, получены в [8].

В данной работе исследуется вопрос о максимально возможном количестве смен характера устойчивости при изменении коэффициента жесткости по одной из обобщенных координат, т.е. одного из диагональных элементов матрицы потенциальных сил.

[1] *Научно-исследовательский институт механики, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**E-mail: seliutski@imec.msu.ru*

ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Рассмотрим линейную механическую систему с s степенями свободы. Уравнения движения ее можно записать следующим образом:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{N})\mathbf{q} = 0.$$

Здесь $\mathbf{M}$ – матрица инерции, $\mathbf{D}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{N}$ – матрицы диссипативных, гироскопических, позиционных потенциальных и непотенциальных сил соответственно.

Исследуем влияние изменения эффективной жесткости по первой из обобщенных координат на характер устойчивости. Это означает, что к матрице потенциальных сил добавляется матрица, в которой отличен от нуля только один элемент, а именно, первый элемент на главной диагонали:

$$\mathbf{K}' = \begin{pmatrix} k'_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Соответственно, уравнения движения принимают следующий вид:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{N} + \mathbf{K}')\mathbf{q} = 0.$$

В ходе дальнейшего изложения будем считать, что все величины являются безразмерными.

Очевидно, существует невырожденная замена переменных $\mathbf{q} \mapsto \mathbf{x}$, приводящая матрицу инерции к единичному виду и оставляющая матрицу $\mathbf{K}'$ диагональной:

$$\ddot{\mathbf{x}} + (\tilde{\mathbf{D}} + \tilde{\mathbf{G}})\dot{\mathbf{x}} + (\tilde{\mathbf{K}} + \tilde{\mathbf{N}} + \tilde{\mathbf{K}}')\mathbf{x} = 0. \qquad (1)$$

Здесь $\tilde{\mathbf{D}}$, $\tilde{\mathbf{G}}$, $\tilde{\mathbf{K}}$, $\tilde{\mathbf{N}}$, $\tilde{\mathbf{K}}'$ – матрицы, полученные в результате указанного преобразования. Поскольку такая замена переменных не меняет ранг матриц, в матрице $\tilde{\mathbf{K}}'$ также будет только один отличный от нуля элемент:

$$\tilde{\mathbf{K}}' = \begin{pmatrix} \kappa & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно показать, что характеристический полином системы (1) можно представить в следующем структурном виде:

$$P = a_{2s}\lambda^{2s} + a_{2s-1}\lambda^{2s-1} + (a_{2s-2} + \kappa b_{2s-2})\lambda^{2s-2} + \ldots$$
$$\ldots + (a_1 + \kappa b_1)\lambda + a_0 + \kappa b_0. \qquad (2)$$

Здесь a_j и b_j $(j = 0, 1, \ldots, 2s)$ – некоторые комбинации коэффициентов матриц $\tilde{\mathbf{D}}$, $\tilde{\mathbf{G}}$, $\tilde{\mathbf{K}}$, $\tilde{\mathbf{N}}$ (не зависят от κ). Легко заметить, что $b_{2s-2} = 1$.

Изменение характера устойчивости может происходить в двух случаях: когда один из корней обращается в нуль (т.е. $a_0 + \kappa b_0 = 0$) или когда действительная часть какой-либо пары комплексно-сопряженных корней обращается в нуль.

Первый случай имеет место при $\kappa = \kappa_1 = -\dfrac{a_0}{b_0}$. Эта ситуация означает потерю или восстановление (в зависимости от знаков коэффициентов a_0 и b_0) статической устойчивости при увеличении дополнительной жесткости κ.

Второй случай означает, что при некотором значении κ полином (2) имеет корень вида $\lambda = i\mu$ (i – мнимая единица, $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$). Подставив это выражение в (2), выделив вещественную и мнимую части, обозначив $\mu^2 = \xi$, получим следующую систему из двух уравнений:

$$\begin{gathered} \sum_{j=0}^{s}(-1)^j a_{2j}\xi^j + \kappa\sum_{j=0}^{s-1}(-1)^j b_{2j}\xi^j = 0, \\ \sum_{j=0}^{s-1}(-1)^j a_{2j+1}\xi^j + \kappa\sum_{j=0}^{s-2}(-1)^j b_{2j+1}\xi^j = 0. \end{gathered} \qquad (3)$$

Пусть выражения при κ в обоих уравнениях (3) отличны от нуля. Выразив κ из обоих уравнений, получим:

$$\begin{gathered} \left(\sum_{j=0}^{s}(-1)^j a_{2j}\xi^j\right)\left(\sum_{j=0}^{s-2}(-1)^j b_{2j+1}\xi^j\right) - \\ - \left(\sum_{j=0}^{s-1}(-1)^j a_{2j+1}\xi^j\right)\left(\sum_{j=0}^{s-1}(-1)^j b_{2j}\xi^j\right) = 0. \end{gathered} \qquad (4)$$

Нетрудно видеть, что выражение (4) представляет собой полином степени $2s - 2$ относительно ξ. Каждому его положительному корню отвечает некоторое значение дополнительной жесткости κ, при котором у системы существует характеристическое число с нулевой вещественной частью, т.е. может происходить смена характера устойчивости. Соответственно, таких изменений характера устойчивости может быть не более $2s - 2$.

Пусть теперь коэффициент при κ в каком-либо из уравнений (3) равен нулю. Тогда, как нетрудно видеть, ξ является корнем полинома степени не выше $s - 1$, что меньше $2s - 2$ для всех $s > 1$.

С учетом перехода одного из корней характеристического полинома через ноль (случай 1) получаем, что максимальное число изменений характера устойчивости при изменении одного из диагональных элементов матрицы потенциальных сил (т.е. коэффициента жесткости по одной из обобщенных координат) равно $2s - 1$.

Таким образом, доказано следующее

Утверждение 1. *При изменении одного диагонального элемента в матрице потенциальных сил в линейной механической системе с s степенями свободы характер устойчивости может меняться не более чем $2s - 1$ раз.*

Необходимо отметить, что аналогичное утверждение можно доказать и для случая, когда в системе изменяется один из диагональных элементов матрицы диссипативных сил.

ПРИМЕР СИСТЕМЫ С МАКСИМАЛЬНО ВОЗМОЖНЫМ ЧИСЛОМ ИЗМЕНЕНИЙ ХАРАКТЕРА УСТОЙЧИВОСТИ

Теперь следует разрешить вопрос о том, может ли найденное выше максимальное количество смен характера устойчивости быть достигнуто в какой-либо механической системе.

Утверждение 2. *Пусть в линейной механической системе с s степенями свободы гироскопические силы отсутствуют, а матрицы остальных сил имеют следующий вид:*

$$\mathbf{M} = \mathbf{E}_s, \quad \mathbf{D} = \operatorname{diag}\{\varepsilon d_{jj}\},$$
$$\mathbf{K} = \operatorname{diag}\{k_{jj} + \delta_{1j}\kappa\},$$
$$\mathbf{N} = \{n_{jq}\}, \quad j,q = (1,\dots,s),$$

где $\varepsilon \ll 1$ *— малый параметр,* δ_{jq} *— дельта Кронекера,* $\mathbf{E}_s$ *— единичная матрица размера s × s. Пусть, кроме того, коэффициенты матриц удовлетворяют следующим соотношениям*:

$$d_{jj} > 0, \quad j = 1,2,\dots,s, \quad |k_{11}| \sim \varepsilon, \quad k_{11} < 0,$$
$$k_{jj} > 0,$$
$$j = 2,\dots,s, \quad |k_{jj} - k_{qq}| \gg \varepsilon, \quad q \neq j, \quad j,q = 1,\dots,s$$
$$n_{jq} = \varepsilon\delta_{j+1,q}\nu_{jq}, \; j = 1,2,\dots,s-1, \; q = j+1,\dots,s.$$

Тогда при изменении жесткости по первой координате характер устойчивости сменится $2s-1$ *раз.*

Доказательство. Ясно, что при $\kappa < -k_{11}$ первый диагональный элемент матрицы жесткости отрицателен, и имеет место статическая неустойчивость.

Рассмотрим ситуацию, когда $\kappa > -k_{11}$ и, кроме того, $|k_{11} + \kappa - k_{jj}| \gg \varepsilon$, $j = (1,2,\dots,s)$. Будем искать собственные числа в виде $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + o(\varepsilon)$. Тогда характеристический полином можно представить в следующем виде:

$$P = \prod_{j=1}^{s}(\lambda_0^2 + k_{jj} + \delta_{1j}\kappa) +$$
$$+ \varepsilon\sum_{j=1}^{s}\prod_{q=1,q\neq j}^{s}(2\lambda_1 + d_{jj})\lambda_0(\lambda_0^2 + k_{qq} + \delta_{1q}\kappa) + o(\varepsilon).$$

Последовательно приравнивая нулю коэффициенты при степенях малого параметра, получаем, что вещественные части всех собственных чисел отрицательны, т.е. имеет место асимптотическая устойчивость.

Пусть теперь κ таково, что два диагональных элемента матрицы потенциальных сил совпадают: $\kappa = \kappa_j = k_{jj} - k_{11}$, $j = (2,3,\dots,s)$. Тогда, как известно [3], при выбранной структуре циркуляционных сил и в отсутствие диссипативных сил имеет место неустойчивость. Этот же результат нетрудно получить, удержав в выражении для характеристического полинома члены до второго порядка малости по ε включительно.

Ясно, что неустойчивость сохранится и при добавлении в систему достаточно малой диссипации. Из соображений непрерывности следует, что неустойчивость имеет место и для некоторого интервала значений κ, содержащего величину κ_j.

Таким образом, получаем, что существует s интервалов значений κ, в которых имеет место неустойчивость. Первый из них содержит луч $(-\infty, 0]$, а остальные содержат величины $k_{jj} - k_{11}$, $j = (2,3,\dots,s)$. Эти интервалы разделены промежутками, в которых положение равновесия асимптотически устойчиво. Следовательно, при изменении κ характер устойчивости меняется $2s-1$ раз, что и доказывает утверждение.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 18–01–00538.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Меркин Д.Р.* Гироскопические системы Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Наука, 1974. 344 с.
2. *Майлыбаев А.А., Сейранян А.П.* Влияние неконсервативных сил на устойчивость систем с кратными частотами и парадокс Николаи // ДАН. 2011. Т. 436. № 2. С. 188–194.
3. *Udwadia F.E.* Stability of Dynamical Systems with Circulatory Forces: Generalization of the Merkin Theorem // AIAA J. 2017. V. 55. № 9. P. 2853–2858. https://doi.org/10.2514/1.J056109
4. *Jekel D., Hagedorn P.* Stability of weakly damped MDGKN-systems: The role of velocity proportional terms // Z. Angew. Math. Mech. 2017. V. 97. № 9. P. 1128–1135. https://doi.org/10.1002/zamm.201600288
5. *Abdullatif M., Mukherjee R., Hellum A.* Stabilizing and destabilizing effects of damping in non-conservative systems: Some new results // J. Sound and Vibration. 2018. V. 413. P. 442–455. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2017.09.018
6. *Журавлев В.Ф.* Спектральные свойства линейных гироскопических систем // Известия РАН. МТТ. 2009. № 2. С. 3–6.
7. *Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д.* О влиянии жесткости на устойчивость положения равновесия механической системы при отсутствии полной диссипации // ПММ. 2019. Т. 83. № 4. С. 597–607. https://doi.org/10.1134/S0032823519040131
8. *Голуб А.П., Селюцкий Ю.Д.* О влиянии жесткости крепления на динамику двухзвенного аэродинамического маятника // ДАН. 2018. Т. 481. № 3. С. 254–257. https://doi.org/10.31857/S086956520001373-3

ON THE CHANGE OF STABILITY CHARACTER OF AN EQUILIBRIUM IN CASE OF CHANGE OF STIFFNESS IN ONE OF GENERALIZED COORDINATES

Yu. D. Selyutskiy[a]

[a] *Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.F. Zhuravlev

A linear mechanical system with n degrees of freedom is considered. Alternation of stability character of the trivial equilibrium is studied in case when the stiffness in one of generalized coordinates changes. The maximum number of such alternations of the stability character is determined. An example of the system is given where such maximum amount of stability character changes occurs.

Keywords: oscillations, stability, dissipation, positional non-conservative forces