ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2020, том 491, с. 66–70

## МЕХАНИКА

УДК 534-18

# АСИМПТОТИКА СПЕКТРОВ ОДНОМЕРНЫХ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В СРЕДАХ, СОСТОЯЩИХ ИЗ ТВЕРДЫХ И ЖИДКИХ СЛОЕВ

© 2020 г. А. С. Шамаев[1], В. В. Шумилова[1,*]

Представлено академиком РАН Ф.Л. Черноусько 19.12.2019 г.
Поступило 24.12.2019 г.
После доработки 03.03.2020 г.
Принято к публикации 04.03.2020 г.

Исследованы спектры одномерных собственных колебаний двухфазных слоистых сред с периодической структурой. В качестве первой фазы рассмотрен изотропный твердый (упругий или вязкоупругий) материал, а в качестве второй фазы – вязкая сжимаемая или несжимаемая жидкость. Установлено, что точками указанных спектров являются корни трансцендентных уравнений, число которых равно числу периодов, содержащихся в данном образце слоистой среды. Описано множество начальных приближений, используемых при численном решении этих уравнений для многослойных сред.

*Ключевые слова:* спектр, собственные колебания, двухфазная среда, усредненная среда

**DOI:** 10.31857/S2686740020020212

Исследование спектров собственных колебаний микронеоднородных сред, состоящих из твердого материала и жидкости, является актуальной задачей механики гетерогенных сред. Ее актуальность обусловлена, прежде всего, широким распространением подобных сред в природе и технике (водонасыщенные грунты, нефтеносные пласты, фильтры, суспензии и т.д.). Знание точек указанных спектров позволяет находить, в частности, такие важные динамические характеристики сред, как собственные частоты колебаний и коэффициенты затухания собственных колебаний.

Стоит отметить, что математическое описание динамики микронеоднородных сред часто основано на предположении о наличии у них периодической структуры. Если обозначить через $\varepsilon$ сторону периодически повторяющейся ячейки, то исследование спектров собственных колебаний таких сред можно свести к спектральному анализу краевых задач для однородных систем дифференциальных уравнений с $\varepsilon$-периодическими коэффициентами. При численном поиске дискретной части спектров в качестве начальных приближений естественно принять собственные значения краевых задач, выведенных при $\varepsilon \to 0$ и описывающих спектры собственных колебаний соответствующих усредненных (эффективных) сред. В данной работе на примере четырех моделей слоистых сред, состоящих из твердого материала и вязкой жидкости, дается ответ на вопрос, насколько полным и точным является множество таких начальных приближений.

Рассмотрим неограниченную полосу $0 < x < L$, заполненную двухфазной средой, состоящей из периодически повторяющихся твердых и жидких слоев. В качестве твердой фазы берется изотропный упругий материал или вязкоупругий материал Кельвина–Фойгта, а в качестве жидкой фазы – вязкая сжимаемая жидкость. Предполагается, что все слои параллельны плоскости $Oyz$, $M$ – общее число всех жидких слоев, а $\varepsilon h$ – толщина одного жидкого слоя, где $\varepsilon = \dfrac{L}{M}$, $0 < h < 1$. Обозначим через $\Omega_{1\varepsilon}$ ($\Omega_{2\varepsilon}$) объединение всех твердых (соответственно жидких) слоев. В дальнейшем будем считать, что

$$\Omega_{s\varepsilon} = D_{s\varepsilon} \times \mathbb{R}^2 \quad (s = 1, 2), \quad D_{1\varepsilon} = (0, L) \setminus \overline{D_{2\varepsilon}},$$

$$D_{2\varepsilon} = \bigcup_{m=0}^{M-1} (\varepsilon h_{1m}, \varepsilon h_{2m}), \quad h_{sm} = \frac{1 + (-1)^s h}{2} + m.$$

Математическая модель, описывающая одномерные колебания в слоистой среде вдоль оси $Ox$, имеет вид

[1] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, Москва, Россия*
**E-mail: v.v.shumilova@mail.ru*

$$\rho_s \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma^\varepsilon}{\partial x} + f(x,t), \quad x \in D_{s\varepsilon}, \quad s = 1,2, \tag{1}$$

$$u^\varepsilon(\varepsilon h_{sm} - 0, t) = u^\varepsilon(\varepsilon h_{sm} + 0, t), \tag{2}$$

$$\sigma^\varepsilon(\varepsilon h_{sm} - 0, t) = \sigma^\varepsilon(\varepsilon h_{sm} + 0, t), \tag{3}$$

$$u^\varepsilon(0,t) = u^\varepsilon(L,t) = 0, \quad u^\varepsilon(x,0) = \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(x,0) = 0, \tag{4}$$

$$s = 1,2; \quad m = 0, \ldots, M-1,$$

где $u^\varepsilon(x,t)$ – смещение точки, имевшей в положении равновесия абсциссу $x$ в момент времени $t$; $\rho_s = \text{const} > 0$ – плотность среды в $\Omega_{s\varepsilon}$; $f(x,t)$ – внешняя сила, действующая вдоль оси $Ox$,

$$\sigma^\varepsilon = (\lambda_1 + 2\mu_1)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} + (\zeta_1 + 2\eta_1)\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x \partial t}, \quad x \in D_{1\varepsilon},$$

$$\begin{gathered} \sigma^\varepsilon = -p^\varepsilon + (\zeta_2 + 2\eta_2)\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x \partial t}, \\ p^\varepsilon = -\gamma \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}, \quad x \in D_{2\varepsilon}. \end{gathered} \tag{5}$$

Здесь $\lambda_1$ и $\mu_1$ – параметры Ламе твердого материала; $\kappa_s = \zeta_s + \frac{2}{3}\eta_s$ и $\eta_s$ – коэффициенты объемной и сдвиговой вязкости в $\Omega_{s\varepsilon}$ [1]; $p^\varepsilon(x,t)$ – давление в жидкости; $\gamma$ – объемный модуль упругости жидкости [2]. В частности, если твердой фазой является упругий материал, то полагается $\zeta_1 = \eta_1 = 0$.

Применяя преобразование Лапласа $u^\varepsilon(x,t) \to u^\varepsilon_\lambda(x)$, запишем задачу (1)–(4) при $f(x,t) \equiv 0$ в изображениях Лапласа:

$$\lambda^2 \rho_s u^\varepsilon_\lambda = \frac{\partial \sigma^\varepsilon_\lambda}{\partial x}, \quad x \in D_{s\varepsilon}, \quad s = 1,2, \tag{6}$$

$$\begin{gathered} u^\varepsilon_\lambda(\varepsilon h_{sm} - 0) = u^\varepsilon_\lambda(\varepsilon h_{sm} + 0), \\ \sigma^\varepsilon_\lambda(\varepsilon h_{sm} - 0) = \sigma^\varepsilon_\lambda(\varepsilon h_{sm} + 0), \end{gathered} \tag{7}$$

$$u^\varepsilon_\lambda(0) = u^\varepsilon_\lambda(L) = 0, \quad s = 1,2; \quad m = 0, \ldots, M-1, \tag{8}$$

где

$$\sigma^\varepsilon_\lambda = (a_s + \lambda b_s)\frac{\partial u^\varepsilon_\lambda}{\partial x}, \quad x \in D_{s\varepsilon}, \quad a_1 = \lambda_1 + 2\mu_1,$$

$$a_2 = \gamma, \quad b_s = \zeta_s + 2\eta_s.$$

В дальнейшем под спектром собственных колебаний слоистой среды, перпендикулярных ее слоям, понимается множество $S_\varepsilon$ всех комплексных значений $\lambda$, при которых задача (6)–(8) имеет нетривиальные решения $u^\varepsilon_\lambda(x)$. При этом множество $F_\varepsilon = \{\omega\colon \omega = |\operatorname{Im}\lambda|, \lambda \in S_\varepsilon\}$ представляет собой спектр собственных частот колебаний слоистой среды вдоль оси $Ox$.

Чтобы найти элементы множества $S_\varepsilon$, сначала зафиксируем целое число $m$ $(0 \le m \le M-1)$. Выписывая решения $u^\varepsilon_\lambda(x)$ уравнений (6) при $x \in (\varepsilon m, \varepsilon h_{1m})$, $x \in (\varepsilon h_{1m}, \varepsilon h_{2m})$ и $x \in (\varepsilon h_{2m}, \varepsilon(m+1))$, а затем используя условия непрерывности перемещений и напряжений (7) на границах слоев, получаем

$$\begin{pmatrix} u^\varepsilon_\lambda((m+1)\varepsilon) \\ \sigma^\varepsilon_\lambda((m+1)\varepsilon) \end{pmatrix} = \frac{1}{4} W^\varepsilon_\lambda \begin{pmatrix} u^\varepsilon_\lambda(m\varepsilon) \\ \sigma^\varepsilon_\lambda(m\varepsilon) \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где $W^\varepsilon_\lambda$ – квадратная матрица 2-го порядка,

$$(W^\varepsilon_\lambda)_{11} = (W^\varepsilon_\lambda)_{22} = \\ = \sum_{n=1}^{2} \frac{(-1)^n Q^2_{n\lambda}}{B_{1\lambda} B_{2\lambda}} \operatorname{ch}(K^\varepsilon_{1\lambda} + (-1)^n K^\varepsilon_{2\lambda}),$$

$$(W^\varepsilon_\lambda)_{12} = \sum_{n=1}^{2} \frac{(-1)^n Q^2_{n\lambda}}{\lambda B^2_{1\lambda} B_{2\lambda}} \times \\ \times \operatorname{sh}(K^\varepsilon_{1\lambda} + (-1)^n K^\varepsilon_{2\lambda}) - \frac{2Q_{1\lambda} Q_{2\lambda}}{\lambda B^2_{1\lambda} B_{2\lambda}} \operatorname{sh} K^\varepsilon_{2\lambda},$$

$$(W^\varepsilon_\lambda)_{21} = \lambda^2 B^2_{1\lambda} (W^\varepsilon_\lambda)_{12} + \frac{4\lambda Q_{1\lambda} Q_{2\lambda}}{B_{2\lambda}} \operatorname{sh} K^\varepsilon_{2\lambda},$$

где

$$Q_{n\lambda} = B_{2\lambda} + (-1)^n B_{1\lambda}, \quad B_{s\lambda} = \sqrt{\rho_s(a_s + \lambda b_s)},$$

$$K^\varepsilon_{1\lambda} = \varepsilon\lambda(1-h)\sqrt{\frac{\rho_1}{a_1 + \lambda b_1}}, \quad K^\varepsilon_{2\lambda} = \varepsilon\lambda h\sqrt{\frac{\rho_2}{a_2 + \lambda b_2}}.$$

Так как элементы матрицы $W^\varepsilon_\lambda$ не зависят от числа $m$, то из (8) и (9) получаем равенство

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \sigma^\varepsilon_\lambda(L) \end{pmatrix} = \frac{1}{4^M} H^\varepsilon_\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma^\varepsilon_\lambda(0) \end{pmatrix}, \quad H^\varepsilon_\lambda = (W^\varepsilon_\lambda)^M,$$

из которого следует, что точками спектра $S_\varepsilon$ являются корни уравнения $(H^\varepsilon_\lambda)_{12} = 0$. Выражая $(H^\varepsilon_\lambda)_{12}$ через элементы матрицы $W^\varepsilon_\lambda$, можно показать, что последнее уравнение разбивается на $M$ уравнений [3]

$$(W^\varepsilon_\lambda)_{12} = 0, \quad (W^\varepsilon_\lambda)_{11} + (W^\varepsilon_\lambda)_{22} = 8\cos\frac{\pi k}{M}, \\ k = 1, \ldots, M-1.$$

Таким образом, точками спектра $S_\varepsilon$ являются корни следующих $M$ трансцендентных уравнений:

$$\sum_{n=1}^{2} \frac{(-1)^n Q_{n\lambda}^2}{\lambda} \operatorname{sh}(K_{1\lambda}^{\varepsilon} + (-1)^n K_{2\lambda}^{\varepsilon}) = \\ = \frac{2Q_{1\lambda}Q_{2\lambda}}{\lambda} \operatorname{sh} K_{2\lambda}^{\varepsilon}, \tag{10}$$

$$\sum_{n=1}^{2} (-1)^n Q_{n\lambda}^2 \operatorname{ch}(K_{1\lambda}^{\varepsilon} + (-1)^n K_{2\lambda}^{\varepsilon}) = \\ = 4B_{1\lambda}B_{2\lambda} \cos\frac{\pi k}{M}, \\ k = 1, \ldots, M-1. \tag{11}$$

Исследование поведения корней этих уравнений показывает, что если $\lambda = \lambda(\varepsilon)$ – корни уравнения (10) и $\lambda(\varepsilon) \to \lambda_0 < \infty$ при $\varepsilon \to 0$, то

$$\lambda_0 = -\frac{a_{12}}{b_{12}}, \quad a_{12} = a_1 h + a_2(1-h), \\ b_{12} = b_1 h + b_2(1-h).$$

Если же $\lambda = \lambda(\varepsilon)$ – корни $k$-го уравнения (11) и $\lambda(\varepsilon) \to \lambda_k < \infty$ при $\varepsilon \to 0$, то $\lambda_k$ совпадает с одним из корней $\lambda_{ik}$ $(i = 1,2,3)$ уравнения

$$\lambda^3 + \frac{a_{12} + b_1 b_2 C_k}{b_{12}} \lambda^2 + \\ + \frac{(a_1 b_2 + a_2 b_1) C_k}{b_{12}} \lambda + \frac{a_1 a_2 C_k}{b_{12}} = 0, \tag{12}$$

$$C_k = \frac{\pi k}{\rho L^2}, \quad \rho = \rho_1(1-h) + \rho_2 h.$$

Для прояснения механического смысла пределов $\lambda_k$ выпишем математическую модель одномерных колебаний усредненной среды вдоль оси $Ox$:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} - \\ - q e^{-\xi t} * \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad x \in (0, L),$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0,$$

где символ “*” означает операцию свёртки по переменной $t$,

$$\alpha = \frac{a_1 b_2^2 (1-h) + a_2 b_1^2 h}{b_{12}^2}, \quad \beta = \frac{b_1 b_2}{b_{12}}, \\ q = \frac{h(1-h)}{b_{12}^3} (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2, \quad \xi = -\lambda_0.$$

В дальнейшем через $S$ мы будем обозначать спектр собственных колебаний усредненной среды вдоль оси $Ox$, определяемый аналогично спектру $S_\varepsilon$. Согласно результатам работы [4], спектр $S$ в точности состоит из объединения корней $\lambda_{ik}$ кубических уравнений (12) при всех $k \in \mathbb{N}$. Интересно отметить, что структура спектра $S$ зависит от того, равен нулю коэффициент $\beta$ в уравнении (12) или нет. Если исходная среда состоит из упругих и жидких слоев, то $\beta = 0$ и спектр $S$ содержит бесконечную невещественную часть, а значит, спектр $F = \{\omega \colon \omega = |\operatorname{Im}\lambda|, \lambda \in S\}$ собственных частот колебаний усредненной среды вдоль оси $Ox$ – бесконечное множество [5]. Если же среда состоит из вязкоупругих и жидких слоев, то $\beta > 0$ и спектр $S$ является либо полностью вещественным, либо содержит только конечную невещественную часть [5, 6]. Следовательно, для такой среды спектр $F$ – конечное множество (в частности, оно может быть пустым).

Полученные результаты совместно с теоремой Руше означают следующее:

1) для любой точки $\lambda \in S$ найдется последовательность $\lambda_\varepsilon \in S_\varepsilon$ такая, что $\lambda_\varepsilon \to \lambda$ при $\varepsilon \to 0$;

2) для точки $-\xi$ найдется последовательность $\lambda_\varepsilon \in S_\varepsilon$ такая, что $\lambda_\varepsilon \to -\xi$ при $\varepsilon \to 0$;

3) все конечные пределы последовательностей $\lambda_\varepsilon \in S_\varepsilon$ принадлежат $S \cup \{-\xi\}$.

Тем самым доказано, что имеет место сходимость по Хаусдорфу $S_\varepsilon \to S \cup \{-\xi\}$ [7]. Это означает, в частности, что при численном поиске точек спектра $S_\varepsilon$ (например, с помощью принципа аргумента) в качестве начальных приближений следует брать не только точки спектра $S$, но и отрицательную вещественную точку $-\xi$.

Аналогично исследуется спектр $S_\varepsilon$ одномерных собственных колебаний слоистой среды, отличающейся от рассмотренной только тем, что ее жидкой фазой является вязкая несжимаемая жидкость. В этом случае исходная математическая модель также записывается в виде задачи (1)–(4), но вместо условий (5) выполняются условия

$$\sigma^\varepsilon = -p^\varepsilon, \quad \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x \partial t} = 0, \quad x \in D_{2\varepsilon}$$

(здесь второе уравнение есть следствие условия несжимаемости жидкости).

Переходя к изображениям Лапласа и повторяя приведенные выше рассуждения, можно показать, что спектр $S_\varepsilon$ состоит из корней $M$ трансцендентных уравнений

$$\frac{1}{\lambda} \operatorname{sh}(K_{1\lambda}^{\varepsilon}) + \frac{\rho_2 \varepsilon h}{2B_{1\lambda}} \operatorname{ch}(K_{1\lambda}^{\varepsilon}) = \frac{\rho_2 \varepsilon h}{2B_{1\lambda}}, \tag{13}$$

$$\operatorname{ch}(K_{1\lambda}^{\varepsilon}) + \frac{\rho_2 \lambda \varepsilon h}{2B_{1\lambda}} \operatorname{sh}(K_{1\lambda}^{\varepsilon}) = \cos\frac{\pi k}{M}, \\ k = 1, \ldots, M-1. \tag{14}$$

Исследование корней этих уравнений показывает, что последовательности корней $\lambda = \lambda(\varepsilon)$ уравне-

**Таблица 1**

| | $\omega_k$, Гц | $\omega_k^{(5)}$, Гц | $\omega_k^{(10)}$, Гц | $\Delta\omega_k^{(5)}$, % | $\Delta\omega_k^{(10)}$, % |
|---|---|---|---|---|---|
| $k = 1$ | 13865.6 | 13841.2 | 13859.6 | 0.176 | 0.043 |
| $k = 2$ | 27731.2 | 27515.4 | 27682.4 | 0.784 | 0.176 |
| $k = 3$ | 41596.7 | 40709.8 | 41425.2 | 2.179 | 0.414 |

ний (13) не имеют конечных пределов при $\varepsilon \to 0$, в то время как конечными пределами последовательностей корней $\lambda = \lambda(\varepsilon)$ уравнений (14) при фиксированном $k$ являются корни квадратных уравнений

$$\lambda^2 + \frac{b_1 C_k}{1-h}\lambda + \frac{a_1 C_k}{1-h} = 0.$$

Объединение корней этих уравнений при всех $k \in \mathbb{N}$ представляет собой спектр $S$ собственных колебаний вдоль оси $Ox$ соответствующей усредненной среды [8]. Нетрудно видеть, что в случае упругих слоев спектр $S$ состоит из бесконечной невещественной части, а в случае вязкоупругих слоев невещественная часть спектра $S$ либо отсутствует, либо конечна. Таким образом, в первом случае спектр $F$ собственных частот колебаний — бесконечное, а во втором случае — конечное множество.

Привлекая теорему Руше, получаем следующий результат:

1) для любой точки $\lambda \in S$ найдется последовательность $\lambda_\varepsilon \in S_\varepsilon$ такая, что $\lambda_\varepsilon \to \lambda$ при $\varepsilon \to 0$;

2) все конечные пределы последовательностей $\lambda_\varepsilon \in S_\varepsilon$ принадлежат $S$. Тем самым установлена сходимость по Хаусдорфу $S_\varepsilon \to S$ при $\varepsilon \to 0$.

Анализируя результаты, полученные для четырех моделей слоистых сред, мы обнаруживаем следующий интересный факт. В случае несжимаемой жидкости предел спектров $S_\varepsilon$ по Хаусдорфу в точности совпадает с “усредненным” спектром $S$. Подобное предельное поведение спектров ранее было установлено в работе [9] для упругих композитов, т.е. микронеоднородных сред без диссипации. В случае же сжимаемой жидкости предел спектров $S_\varepsilon$ по Хаусдорфу “шире” усредненного спектра $S$ за счет добавления дополнительной отрицательной вещественной точки $-\xi$. Отметим также, что для всех четырех моделей слоистых сред $F_\varepsilon \to F$ по Хаусдорфу при $\varepsilon \to 0$.

В заключение численно сравним точки спектров $F_\varepsilon$ и $F$ для двух образцов слоистой среды, занимающих полосу $0 < x < L$ при $L = 0.3$ м и отличающихся друг от друга только числом и толщиной слоев. Взятые образцы состоят из упругих слоев и слоев вязкой сжимаемой жидкости. Для первого образца принимаем $M = 5$, $\varepsilon = 0.06$, для второго — $M = 10$, $\varepsilon = 0.03$. Остальные их числовые характеристики берем следующие: $h = 0.1$, $\rho_1 = 2000$ кг/м$^3$, $\rho_2 = 850$ кг/м$^3$, $\lambda_1 = 2.5$ ГПа, $\mu_1 = 1.1$ ГПа, $\eta_2 = 1.1$ Па $\cdot$ с, $\zeta_2 = 1.8$ Па $\cdot$ с, $\gamma = 0.9$ ГПа.

В табл. 1 приведены первые три собственные частоты $\omega_k$ усредненной среды. Для этого были вычислены невещественные корни $c_k \pm i\omega_k$ уравнений (12) при $k = 1, 2, 3$. Далее, с помощью принципа аргумента и начальных приближений $c_k \pm i\omega_k$ находятся корни $c_k^{(M)} \pm i\omega_k^{(M)}$ трансцендентных уравнений (11) при $k = 1, 2, 3$. Значения собственных частот $\omega_k^{(M)}$ слоистой среды, состоящей из $M$ периодов, выписаны в табл. 1.

В табл. 1 также приведены относительные погрешности $\Delta\omega_k^{(M)}$ собственных частот $\omega_k$, принимаемых в качестве приближенных значений собственных частот $\omega_k^{(M)}$. Как видно из табл. 1, увеличение числа периодов в 2 раза приводит к довольно значительному повышению точности приближенных значений $\omega_k$. Кроме того, $\omega_k^{(5)} < \omega_k^{(10)} < \omega_k$, т.е. при увеличении числа периодов $M$ значения $\omega_k^{(M)}$ приближаются к $\omega_k$ слева.

## ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 16–11–10343).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1990. 310 с.
2. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984. 472 с.
3. *Шамаев А.С., Шумилова В.В.* // Труды МИАН. 2016. Т. 295. С. 218–228.
4. *Шамаев А.С., Шумилова В.В.* // Изв. РАН. МЖГ. 2013. № 1. С. 17–25.
5. *Шумилова В.В.* // Проблемы мат. анализа. 2013. Т. 73. С. 167–172.
6. *Шамаев А.С., Шумилова В.В.* // Проблемы мат. анализа. 2012. Т. 63. С. 189–192.
7. *Жиков В.В.* // Мат. сб. 2000. Т. 191. № 7. С. 31–72.
8. *Shumilova V.V.* // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. 2013. V. 6. № 3. P. 349–356.
9. *Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С.* Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. М.: Изд-во МГУ, 1990. 311 с.

# ASYMPTOTICS OF THE SPECTRA OF ONE-DIMENSIONAL NATURAL VIBRATIONS IN MEDIA CONSISTING OF SOLID AND FLUID LAYERS

**A. S. Shamaev[a] and V. V. Shumilova[a]**

[a] *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS F.L. Chernousko

The spectra of one-dimensional natural vibrations of two-phase layered media with a periodic structure are studied. The first phase is an isotropic (elastic or viscoelastic) material, while the second phase is a viscous compressible or incompressible fluid. It is established that the points of the spectrum mentioned above are the roots of transcendental equations whose number is equal to the number of periods contained in the given sample of a layered medium. The set of initial approximations for the numerical solution of these equations for multi-layered media is described.

*Keywords:* spectrum, natural vibrations, two-phase medium, homogenized medium