ФИЗИКА

УДК 539.3

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ КВАЗИТВЕРДЫХ СОСТОЯНИЙ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ТЕЛ

© 2020 г. А. А. Зеленина[1,*], Л. М. Зубов[2,]**

Представлено академиком РАН В.А. Бабешко 21.10.2019 г.
Поступило 11.12.2019 г.
После доработки 08.02.2020 г.
Принято к публикации 10.02.2020 г.

Предложена нелинейная теория квазитвердых состояний микрополярных упругих тел. Квазитвердые состояния являются трехмерным аналогом изгибания поверхностей и возможны только при наличии распределенных дислокаций. Найдены точные решения задач о сильном изгибе и кручении микрополярных тел в условиях квазитвердого состояния. Установлено, что нелинейная теория, в отличие от линейной, допускает существование самоуравновешенных квазитвердых состояний.

Ключевые слова: моментные напряжения, конечные вращения, распределенные дислокации, изгиб и кручение, универсальные решения, самоуравновешенные состояния

DOI: 10.31857/S2686740020020224

Квазитвердыми состояниями равновесия упругого микрополярного тела называются такие, в которых метрические деформации отсутствуют в каждой точке среды, а тензор изгибных деформаций не равен нулю тождественно. Здесь предполагается, что на тело действуют только массовые и поверхностные моментные нагрузки, а внешние силовые нагрузки отсутствуют. В квазитвердом состоянии каждый элементарный объем среды ведет себя как абсолютно твердое тело, а поле вращений неоднородно. Квазитвердые состояния можно считать трехмерным аналогом изгибания поверхностей, поскольку при изгибании, т.е. изометрической деформации, каждая элементарная площадка поверхности перемещается как абсолютно твердое тело. В трехмерных телах при обычных условиях изгибания (т.е. квазитвердые состояния) невозможны. Однако они становятся осуществимыми при наличии непрерывно распределенных дислокаций. Ранее [1] была построена линейная теория квазитвердых состояний микрополярных сред. В представленной работе развит нелинейный вариант теории. В нелинейной теории микрополярной упругости деформации и вращения не считаются малыми и могут принимать произвольные значения. Сформулирована нелинейная краевая задача, описывающая квазитвердое состояние микрополярного тела при больших локальных вращениях. Путем решения этой краевой задачи найдены квазитвердые состояния призматических стержней при сильном изгибе и кручении. В классе изотропных нелинейно упругих микрополярных материалов найден ряд универсальных решений о квазитвердых состояниях кругового цилиндра и шара. Установлено качественное отличие нелинейного подхода от линейной теории. Оно состоит в том, что нелинейная теория допускает существование самоуравновешенных (т.е. не требующих приложения внешних нагрузок) квазитвердых состояний микрополярных тел.

1. Микрополярным телом, или континуумом Коссера, называют сплошную среду с моментными напряжениями и вращательным взаимодействием частиц. Основные положения нелинейной теории континуума Коссера изложены в работах [2–7]. Нелинейная деформация микрополярного континуума определяется двумя кинематически независимыми полями перемещений и вращений

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r}) \tag{1}$$

$$\mathbf{r} = x_s\mathbf{i}_s, \quad \mathbf{R} = X_k\mathbf{i}_k, \quad s,k = 1,2,3.$$

Здесь x_s и X_k – декартовы координаты, соответственно, отсчетной и деформированной конфигураций тела, $\mathbf{i}_s$ – постоянные координатные орты, $\mathbf{u}$ – векторное поле перемещений, $\mathbf{H}$ – собственно ортогональный тензор, описывающий

[1] *Ростовский государственный университет путей сообщения, Ростов-на-Дону, Россия*
[2] *Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия*
**E-mail: a.zelenina@gmail.com*
***E-mail: zubovl@yandex.ru*

вращательные степени свободы частиц микрополярной среды и называемый тензором вращений. Система уравнений, описывающих большие статические деформации микрополярной упругой среды, включает в себя три группы соотношений [5, 6]:

уравнения равновесия для напряжений и моментных напряжений

$$\operatorname{div}(\mathbf{P}\cdot\mathbf{H}) + \rho\mathbf{b} = 0, \tag{2}$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{K}\cdot\mathbf{H}) + (\mathbf{F}^T\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{H})_\times + \rho\mathbf{l} = 0, \tag{3}$$

определяющие соотношения материала

$$\mathbf{P}(\mathbf{E},\mathbf{L}) = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}}, \quad \mathbf{K}(\mathbf{E},\mathbf{L}) = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{L}}, \quad W = W(\mathbf{E},\mathbf{L}) \tag{4}$$

и геометрические соотношения

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{H}^T, \mathbf{F} = \operatorname{grad}\mathbf{R}, \tag{5}$$

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2}\mathbf{I}\operatorname{tr}[\mathbf{H}\cdot(\operatorname{rot}\mathbf{H})^T] - \mathbf{H}\cdot(\operatorname{rot}\mathbf{H})^T. \tag{6}$$

В (1)–(6) $\mathbf{P}$ — тензор силовых напряжений типа Кирхгофа, $\mathbf{K}$ — тензор моментных напряжений типа Кирхгофа, ρ — плотность материала в отсчетной конфигурации, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{l}$ — векторы массовых сил и моментов, W — удельная энергия деформации, $\mathbf{I}$ — единичный тензор, $\mathbf{E}$ — мера деформации, $\mathbf{L}$ — тензор изгибной деформации, $\mathbf{F}$ — тензор дисторсии. Символами grad, div, rot обозначены операторы градиента, дивергенции и ротора в координатах отсчетной конфигурации тела, а символ $\mathbf{T}_\times = t_{sk}\mathbf{i}_s \times \mathbf{i}_k$ означает векторный инвариант тензора второго ранга $\mathbf{T} = t_{sk}\mathbf{i}_s \otimes \mathbf{i}_k$. Если на границе тела действуют распределенная силовая нагрузка плотности $\mathbf{f}$ и распределенная моментная нагрузка плотности $\mathbf{m}$, то краевые условия имеют вид

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{H} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{H} = \mathbf{m}, \tag{7}$$

где $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности тела в отсчетной конфигурации.

Граничные условия (7) согласованы с вариационной постановкой задачи о равновесии микрополярного упругого тела [5].

2. Если в теле распределены дислокации с тензорной плотностью $\boldsymbol{\alpha}$, то поле перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ и векторное поле $\mathbf{R}(\mathbf{r})$ не существуют, а второе равенство в (5) заменяется уравнением несовместности [8, 9]

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \boldsymbol{\alpha}, \tag{8}$$

в котором тензор $\boldsymbol{\alpha}$ должен удовлетворять условию соленоидальности $\operatorname{div}\boldsymbol{\alpha} = 0$. Ниже будет использоваться также модифицированный тензор плотности дислокаций $\boldsymbol{\alpha}_0 = \boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{H}^T$. Учитывая (5), уравнение несовместности (8) можно записать иначе:

$$[\operatorname{rot}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{H})]\cdot\mathbf{H}^T = \boldsymbol{\alpha}_0. \tag{9}$$

Для дальнейшего будет полезна другая форма уравнений равновесия (2), (3), полученная ранее [9]:

$$\operatorname{div}\mathbf{P} - (\mathbf{P}^T\cdot\mathbf{L})_\times + \rho\mathbf{b}_0 = 0, \tag{10}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{K} - (\mathbf{K}^T\cdot\mathbf{L} + \mathbf{P}^T\cdot\mathbf{E})_\times + \rho\mathbf{l}_0 = 0, \tag{11}$$

$$\mathbf{b}_0 = \mathbf{b}\cdot\mathbf{H}^T, \quad \mathbf{l}_0 = \mathbf{l}\cdot\mathbf{H}^T.$$

Будем считать микрополярный материал таким, что силовые напряжения в нем отсутствуют, если тензор метрических деформаций $\mathbf{E} - \mathbf{I}$ равен нулю:

$$\mathbf{P}(\mathbf{I},\mathbf{L}) = 0. \tag{12}$$

Свойство (12) выполняется, в частности, для модели физически линейной изотропной моментной среды, определяющие соотношения которой имеют вид [3, 5, 10]

$$\begin{gathered}\mathbf{P} = \lambda\mathbf{I}\operatorname{tr}(\mathbf{E}-\mathbf{I}) + (\mu+\beta)(\mathbf{E}-\mathbf{I}) + (\mu-\beta)(\mathbf{E}^T-\mathbf{I}),\\ \mathbf{K} = \nu\mathbf{I}\operatorname{tr}\mathbf{L} + (\gamma+\eta)\mathbf{L} + (\gamma-\eta)\mathbf{L}^T,\end{gathered} \tag{13}$$

где $\lambda, \mu, \beta, \eta, \gamma, \nu$ — материальные постоянные.

3. Предположим, что к телу приложены только моментные массовые и поверхностные нагрузки, а внешние силы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{f}$, распределенные по объему и поверхности тела, отсутствуют. Будем разыскивать такие состояния нелинейно упругого микрополярного тела, в которых тензор метрических деформаций $\mathbf{E} = \mathbf{I}$ равен нулю в каждой точке тела, но тензор $\mathbf{L}$ не равен нулю тождественно. Это возможно только при наличии непрерывно распределенных дислокаций. В самом деле, равенство $\mathbf{E} = \mathbf{I}$ согласно (5) означает, что дисторсия $\mathbf{F}$ — ортогональный тензор. Поскольку уравнение (8) при $\boldsymbol{\alpha} = 0$ имеет в классе ортогональных тензоров только постоянные решения, тензор изгибной деформации $\mathbf{L}$ в силу (6) тождественно равен нулю. Значит случай, когда $\mathbf{E} - \mathbf{I}$, $\mathbf{L} \neq 0$ при отсутствии дислокаций невозможен. Состояния тела с нулевыми метрическими деформациями называются квазитвердыми, так как удлинения и сдвиги в каждом элементарном объеме среды равны нулю и он ведет себя как абсолютно твердое тело. Поле вращений элементарных объемов неоднородно, а сами вращения в рамках нелинейной теории могут быть произвольно большими. Согласно (12) силовые напряжения в квазитвердом состоянии равны нулю. Следовательно, квазитвердое состояние можно называть также чисто моментным напряженным состоянием тела. Вырожденный случай, в котором поле вращений однородно ($\mathbf{H} = \mathrm{const}$), будем называть тривиальным квазитвердым состоянием. Этот случай соответствует движению всего тела как абсолютно твердого.

Не следует смешивать квазитвердые состояния [1] микрополярного упругого тела с состояниями, в которых поле перемещений тождественно равно нулю. В первом случае силовые напряжения равны нулю, а во втором случае тензор силовых напряжений Коши несимметричен и отличен от нуля.

В соответствии с (10)–(12) квазитвердое состояние нелинейно упругого микрополярного тела, занимающего область v с границей ∂v, описывается следующей краевой задачей для тензорного поля вращений $\mathbf{H}(\mathbf{r})$:

$$\operatorname{div}\mathbf{K} - (\mathbf{K}^T \cdot \mathbf{L})_\times + \rho \mathbf{l}_0 = 0, \tag{14}$$

$$\mathbf{K} = \Phi(\mathbf{L}) = \frac{dW(\mathbf{I},\mathbf{L})}{d\mathbf{L}}, \tag{15}$$

$$\begin{gathered}\sigma_1\colon \mathbf{H} = \mathbf{H}_*(\mathbf{r}); \quad \sigma_2\colon \mathbf{n}\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{H} = \mathbf{m}(\mathbf{r});\\ \partial v = \sigma_1 \cup \sigma_2.\end{gathered} \tag{16}$$

Здесь σ_1 – часть поверхности тела, на которой задано поле вращений. На части границы σ_2 задана распределенная моментная нагрузка. Тензор $\mathbf{L}$ предполагается выраженным через неизвестную функцию $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ по формуле (6). Тензорное поле плотности дислокаций, реализующее квазитвердое состояние, согласно (9) выражается через решение краевой задачи (14)–(16) следующим образом:

$$\boldsymbol{\alpha}_0 = (\operatorname{rot}\mathbf{H})\cdot\mathbf{H}^T. \tag{17}$$

Квазитвердое состояние микрополярной среды существует не при любом тензорном поле модифицированной плотности дислокаций $\boldsymbol{\alpha}_0$. Необходимое условие существования квазитвердого состояния получается путем исключения ортогонального тензорного поля $\mathbf{H}$ из уравнения (17) и имеет вид

$$\begin{gathered}\operatorname{rot}\left(\frac{1}{2}\mathbf{I}\operatorname{tr}\boldsymbol{\alpha}_0 - \boldsymbol{\alpha}_0^T\right) + \boldsymbol{\alpha}_0^2 -\\ -\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_0\operatorname{tr}\boldsymbol{\alpha}_0 + \frac{1}{4}\left(\operatorname{tr}^2\boldsymbol{\alpha}_0 - \frac{1}{2}\operatorname{tr}\boldsymbol{\alpha}_0^2\right)\mathbf{I} = 0.\end{gathered} \tag{18}$$

Можно проверить, что уравнение (18) влечет выполнение требования соленоидальности тензора $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_0\cdot\mathbf{H}$. Уравнение (18) имеет очевидное решение $\boldsymbol{\alpha}_0 = 0$, которое соответствует тривиальному квазитвердому состоянию.

4. Сплошную среду, не обладающую моментными напряжениями и описываемую обычной моделью нелинейно упругого тела [11], принято называть простым, или неполярным, материалом. Квазитвердое состояние неполярной среды – это состояние с нулевой упругой энергией, нулевыми напряжениями и неоднородным полем вращений элементарных объемов. Примеры квазитвердых состояний неполярных упругих тел с конечными локальными вращениями приведены в [12–14]. Указаны [12] простые распределения дислокаций, при которых призматический брус закручивается или изгибается без всякого сопротивления, т.е. без появления напряжений. В [13, 14] найдены сферически симметричные квазитвердые состояния неполярной среды. В случае неполярной среды уравнение (18) является не только необходимым, но и достаточным условием существования квазитвердого состояния.

5. Рассмотрим некоторые решения краевой задачи (14)–(16), описывающей квазитвердые состояния изотропного микрополярного тела. Условие изотропности накладывает [15] следующее ограничение на функцию отклика материала $\Phi(\mathbf{L})$ в (15):

$$\Phi[(\det\mathbf{Q})\mathbf{Q}\cdot\mathbf{L}\cdot\mathbf{Q}^T] = (\det\mathbf{Q})\mathbf{Q}\cdot\Phi(\mathbf{L})\cdot\mathbf{Q}^T, \tag{19}$$

где $\mathbf{Q}$ – любой ортогональный тензор.

Будем искать тензорное поле вращений в виде ($a = \mathrm{const}$)

$$\begin{gathered}\mathbf{H} = \mathbf{i}_1\otimes\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2\otimes\mathbf{e}_2 + \mathbf{i}_3\otimes\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2 = \mathbf{i}_2\cos ax_2 - \mathbf{i}_3\sin ax_2,\\ \mathbf{e}_3 = \mathbf{i}_2\sin ax_2 + \mathbf{i}_3\cos ax_2.\end{gathered} \tag{20}$$

При помощи (6), (20) вычислим тензор изгибной деформации: $\mathbf{L} = -a\mathbf{i}_2\otimes\mathbf{i}_1$. На основании (19) методом [15] доказывается, что для любого изотропного однородного тела тензор моментных напряжений имеет вид $\mathbf{K} = K_{12}\mathbf{i}_1\otimes\mathbf{i}_2 + K_{21}\mathbf{i}_2\otimes\mathbf{i}_1$. Здесь K_{12} и K_{21} – постоянные величины. Уравнение равновесия (14) при $\mathbf{l}_0 = 0$ удовлетворяется тождественно. Полученное решение описывает цилиндрический изгиб прямоугольной плиты, лицевые грани которой $x_3 = \mathrm{const}$ свободны от нагрузки. Изгиб происходит в плоскости x_2x_3. Согласно (17), (20) данное квазитвердое состояние обеспечивается равномерным распределением краевых дислокаций с плотностью $\boldsymbol{\alpha}_0 = a\mathbf{i}_1\otimes\mathbf{i}_2$.

Другим примером однородного чисто моментного состояния может служить кручение призматического бруса произвольного поперечного сечения. В этом случае тензор вращений задается формулой ($\psi = \mathrm{const}$)

$$\begin{gathered}\mathbf{H} = (\mathbf{i}_1\otimes\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2\otimes\mathbf{i}_2)\cos\psi x_3 +\\ + (\mathbf{i}_1\otimes\mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_2\otimes\mathbf{i}_1)\sin\psi x_3 + \mathbf{i}_3\otimes\mathbf{i}_3,\end{gathered} \tag{21}$$

которая описывает конечный поворот поперечного сечения стержня на угол ψx_3 вокруг орта $\mathbf{i}_3$, направленного по оси стержня. Тензор изгибных деформаций, соответствующий полю вращений (21), имеет вид $\mathbf{L} = \psi\mathbf{i}_3\otimes\mathbf{i}_3$, а тензор моментных напряжений для любого изотропного материала имеет представление $\mathbf{K} = K_1(\mathbf{i}_1\otimes\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2\otimes\mathbf{i}_2) + K_3\mathbf{i}_3\otimes\mathbf{i}_3$, где K_1 и K_3 – постоянные. Уравнение равновесия (14) при отсутствии массовых моментов удовлетворяется для любого материала, подчиняющегося условию (19). Тензор плотности дислокаций, обусловливающих квазитвердое состояние кручения, имеет выражение $\boldsymbol{\alpha}_0 = \psi(\mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_2)$. Для реализации этого чисто моментного состояния на боковой поверхности бруса с нормалью $\mathbf{n}$ надо приложить в соответствии с (16) распределенную моментную нагрузку с плотностью $\mathbf{m} = K_1(\mathbf{n}\cos\psi x_3 + \mathbf{i}_3 \times \mathbf{n}\sin\psi x_3)$, а на торцах стержня с нормалью $\pm\mathbf{i}_3$ требуется приложить равномерно распределенную крутящую моментную нагрузку с плотностью $\mathbf{m} = \pm K_3\mathbf{i}_3$. В частном случае физически линейного материала согласно (13) имеем $K_1 = \nu\psi$, $K_3 = 2\gamma\psi$. В этом случае при $\nu = 0$ для осуществления квазитвердого состояния кручения моментную нагрузку требуется приложить только к торцам бруса.

6. Приведем примеры квазитвердых состояний микрополярного тела в форме полого кругового цилиндра. Обозначим через $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{i}_3$ единичные векторы, касательные к координатным линиям цилиндрической системы координат r, φ, z, и зададим тензорное поле вращений следующим образом ($t = \text{const}$):

$$\begin{gathered}\mathbf{H} = \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{f}_r + \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{i}_3 - \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{f}_\varphi,\\ \mathbf{f}_r = \mathbf{e}_r\cos(tz - \varphi) + \mathbf{e}_\varphi\sin(tz - \varphi),\\ \mathbf{f}_\varphi = -\mathbf{e}_r\sin(tz - \varphi) + \mathbf{e}_\varphi\cos(tz - \varphi).\end{gathered} \tag{22}$$

На основании (6), (22) находим

$$\mathbf{L} = t\mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{e}_\varphi - \frac{1}{r}\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{i}_3. \tag{23}$$

При помощи (19), (23) доказывается, что для любого изотропного материала выполняется соотношение

$$\mathbf{K} = K_{\varphi z}(r)\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{i}_3 + K_{z\varphi}(r)\mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{e}_\varphi. \tag{24}$$

В силу (23), (24) уравнение равновесия (14) при $\mathbf{l}_0 = 0$ удовлетворяется тождественно. Тензорное поле плотности дислокаций, обеспечивающее данное квазитвердое состояние, имеет вид $\boldsymbol{\alpha}_0 = r^{-1}\mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{e}_\varphi - t\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{i}_3$. Полученное решение удовлетворяет условию $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{H} = 0$. Это означает, что оно реализуется без приложения нагрузки на внешней ($r = r_0$) и внутренней ($r = r_1$) поверхностях цилиндрической трубы, где r_0 и r_1 — любые положительные числа, такие, что $r_0 > r_1$. Данное решение пригодно для всех изотропных микрополярных тел, т.е. универсально в этом классе материалов.

Таким же свойством универсальности и самоуравновешенности обладает другое квазитвердое состояние полого цилиндра, которое описывается следующими характеристиками:

$$\begin{gathered}\mathbf{H} = \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r - \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi - \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3,\\ \mathbf{L} = -\frac{2}{r}\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{i}_3, \quad \boldsymbol{\alpha}_0 = \frac{2}{r}\mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{e}_\varphi.\end{gathered} \tag{25}$$

7. Рассмотрим сферически симметричное решение краевой задачи (14)—(16). Введем сферические (географические) координаты r, φ (долгота), θ (широта) и единичные векторы $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_\theta$, касательные к координатным линиям. Используя свойства сферически симметричных тензорных полей [13], будем искать тензорное поле вращений в виде, описывающем конечный поворот на угол $\omega(r)$ вокруг радиальной оси:

$$\begin{gathered}\mathbf{H} = \cos\omega(r)\mathbf{g} + \sin\omega(r)\mathbf{d} + \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r,\\ \mathbf{g} = \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta, \quad d = \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\theta - \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\varphi.\end{gathered} \tag{26}$$

Используя (6), (26), находим тензор изгибной деформации

$$\mathbf{L} = L_1(r)\mathbf{g} + L_2(r)\mathbf{d} + L_3(r)\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r, \tag{27}$$

$$L_1(r) = \frac{\sin\omega(r)}{r}, \quad L_2(r) = \frac{\cos\omega(r) - 1}{r},$$

$$L_3(r) = \frac{d\omega(r)}{dr}.$$

На основании (27) методом [15] доказывается, что для любой изотропной среды тензор моментных напряжений типа Пиолы $\mathbf{G} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{H}$ имеет представление

$$\mathbf{G} = G_1(r)\mathbf{g} + G_2(r)\mathbf{d} + G_3(r)\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r. \tag{28}$$

В силу (28) векторное уравнение равновесия (14) при $\mathbf{l}_0 = l(r)\mathbf{e}_r$ приводится к одному скалярному уравнению

$$\frac{dG_3}{dr} + \frac{2(G_3 - G_1)}{r} + \rho l(r) = 0. \tag{29}$$

Моментные напряжения G_1, G_2, G_3 выражаются через функцию $\omega(r)$ и ее производную при помощи определяющих соотношений (15). Следовательно, уравнение равновесия (29) — это нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции $\omega(r)$. В качестве граничных условий на внутренней и внешней поверхностях полого шара могут быть заданы значения угла вращения ω или плотность распределенного крутящего момента: $G_3 = m_3$, где $m_3 = \mathbf{m} \cdot \mathbf{e}_r$. Тензор плотности дислокаций, обеспечивающих сферически симметричное квазитвердое состояние, согласно (17), (26) записывается так:

$$\boldsymbol{\alpha}_0 = \left(\frac{d\omega}{dr} + \frac{\sin\omega}{r}\right)\mathbf{g} + \frac{\cos\omega - 1}{r}\mathbf{d} + \frac{2\sin\omega}{r}\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r. \tag{30}$$

При отсутствии внешних нагрузок, т.е. при $l = 0$, $m_3 = 0$, краевая задача для функции $\omega(r)$ имеет тривиальное решение $\omega(r) \equiv 0$, которому соответствует нулевой тензор $\boldsymbol{\alpha}_0$. Вместе с тем существует и нетривиальное решение $\cos\omega(r) \equiv -1$, описывающее квазитвердое состояние, в котором каждый элементарный объем среды совершает полуоборот (т.е. поворот на 180°) вокруг радиальной оси $\mathbf{e}_r$. В самом деле, при $\cos\omega(r) \equiv -1$ на основании (27) имеем $L_1 = 0$, $L_2 = -2r^{-1}$, $L_3 = 0$. При помощи (19) для произвольного изотропного материала доказываются соотношения $G_1 = 0$, $G_2 \neq 0$, $G_3 = 0$. Значит, данное поле полуоборотов является решением уравнения равновесия (29) при $l = 0$, а также удовлетворяет краевым условиям $G_3 = 0$, выражающим отсутствие поверхностной нагрузки на границах полого шара с произвольными значениями внутреннего и внешнего радиусов. Указанное чисто моментное напряженное состояние шара реализуется согласно (30) при наличии дислокаций, распределенных с плотностью $\boldsymbol{\alpha}_0 = -2r^{-1}\mathbf{d}$, и является универсальным решением уравнений равновесия в классе изотропных микрополярных тел. Это нетривиальное решение обладает свойством самоуравновешенности, т.е. существует при отсутствии внешних нагрузок. Существование нетривиальных самоуравновешенных квазитвердых состояний — характерная черта нелинейной теории микрополярной упругости. В рамках линейной теории самоуравновешенные квазитвердые состояния невозможны [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зеленина А.А., Зубов Л.М.* // ДАН. 2017. Т. 472. № 2. С. 150–153.
2. *Toupin R.A.* // Arch. Ration. Mech. Anal. 1964. V. 17. № 2. P. 85–112.
3. *Шкутин Л.И.* Механика деформаций гибких тел. Новосибирск: Наука, 1988.
4. *Морозов Н.Ф.* Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984.
5. *Zubov L.M.* Nonlinear Theory of Dislocations and Disclinations in Elastic Bodies. B.: Springer, 1997.
6. *Nikitin E.S., Zubov L.M.* // J. Elasticity. 1998. V. 51. P. 1–22.
7. *Eringen A.C.* Microcontinuum Field Theories. I. Foundations and Solids. B.: Springer, 1999.
8. *Зубов Л.М.* // ДАН. 2004. Т. 396. № 1. С. 52–55.
9. *Зубов Л.М.* // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 3. С. 18–28.
10. *Пальмов В.А.* // ПММ. 1964. Т. 28. В. 3. С. 401–408.
11. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
12. *Зеленина А.А., Зубов Л.М.* // ДАН. 2013. Т. 451. № 5. С. 516–519.
13. *Зубов Л.М.* // ДАН. 2014. Т. 458. № 2. С. 161–164.
14. *Goloveshkina E.V., Zubov L.M.* // Arch. Appl. Mech. 2019. V. 89. № 3. P. 409–424.
15. *Zubov L.M.* // Math. Mech. Solid. 2016. V. 21. № 2. P. 152–167.

NONLINEAR THEORY OF MICROPOLAR ELASTIC BODIES QUASI-SOLID STATES

A. A. Zelenina[a] and L. M. Zubov[b]

[a] *Rostov State Transport University, Rostov-on-Don, Russian Federation*

[b] *Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.A. Babeshko

A nonlinear theory of quasi-solid states of micropolar elastic bodies is proposed. Quasi-solid states are a three-dimensional analogue of the surfaces bending and are possible only with distributed dislocations. Exact solutions of the problems of strong bending and torsion of micropolar bodies under conditions of a quasi-solid state are found. It is established that a nonlinear theory in contrast to a linear one admits the existence of self-balanced quasi-solid states.

Keywords: couple stresses, finite rotations, distributed dislocations, bending and torsion, universal solutions, self-balanced states