

УДК 539.3

О ПОДАВЛЕНИИ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОЙ ПАНЕЛИ, ПРОДОЛЬНО ДВИЖУЩЕЙСЯ В ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ

© 2020 г. Н. В. Баничук¹, С. Ю. Иванова^{1,*}

Представлено академиком РАН И.Г. Горячевой 03.03.2020 г.

Поступило 12.03.2020 г.

После доработки 12.03.2020 г.

Принято к публикации 13.03.2020 г.

Рассмотрена проблема активного подавления колебаний упругой панели, продольно движущейся в потоке идеальной жидкости. Предложен подход, основанный на совместном рассмотрении реакции движущейся жидкости и возникающих деформаций панели. С использованием аналитического решения двумерной гидродинамической задачи исходная комбинированная двумерная проблема гидроупругости приведена к решению одномерного уравнения в частных производных.

Ключевые слова: упругая панель, идеальная жидкость, подавление колебаний

DOI: 10.31857/S2686740020020054

Исследования устойчивости и динамики продольного движения материалов, моделируемых в виде движущихся гибких струн, балок, панелей и пластин, представляют большой теоретический и практический интерес. В монографиях [1–3] дан широкий обзор научной литературы по указанной проблематике. Отметим также работы по устойчивости деформируемых прямолинейно движущихся конструктивных элементов с учетом взаимодействия с потоком жидкости [4–8].

Представлена новая постановка задачи подавления поперечных колебаний продольно движущейся в потоке жидкости панели, основанная на предлагаемой модели присоединенных масс, развитой на основе точного решения двумерной задачи гидроупругости. Также предложен новый эффективный метод гашения колебаний.

Рассматривается движение с постоянной скоростью V_0 панели, совершающей поперечные колебания и находящейся под воздействием гидродинамических сил потока жидкости и активного внешнего воздействия. Поведение панели описывается уравнением в частных производных

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2mV_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + mV_0^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - q_f = g \quad (1)$$

и начально-краевыми условиями

$$(w)_{t=0} = g_1(x), \quad \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)_{t=0} = g_2(x), \quad (2)$$

$$(w)_{x=\pm l} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=\pm l} = 0. \quad (3)$$

Здесь m , T и D – погонная масса, натяжение и изгибная жесткость панели, $2l$ – пролет между шарнирными опорами панели, $w = w(x, t)$ – поперечное отклонение панели, $q_f(x, t)$ – реакция жидкости, $g(x, t)$ – внешнее активное воздействие, подавляющее колебания. Рассмотрение уравнения (1) с начальными и граничными условиями (2), (3) проводится в области Ω : $-l \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq t_f$, где t_f – заданная величина, т.е. $\Omega = (-l, l) \times (0, t_f)$. При этом предполагается, что активное воздействие на систему $g(x, t)$ удовлетворяет условию

$$g(x, t) \in U_{ad}, \quad U_{ad} = \{g(x, t): g \in L^2(\Omega)\}, \quad (4)$$

причем

$$J_\mu = \int_{\Omega} g^2(x, t) d\Omega = M_0, \quad (5)$$

где M_0 – заданная постоянная. Реакция гидродинамического воздействия в безразмерных переменных $x' = \frac{x}{l}$, $t' = \frac{t}{\tau}$, $w' = \frac{w}{l}$ (штрихи далее опускаем) определяется, как показано в [2], следующим образом:

¹ Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: syuivanova@yandex.ru

$$q_f = -\frac{\pi}{4} \rho_f \left(\frac{l}{\tau^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2 \frac{V_\infty}{\tau} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{V_\infty^2}{l} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \quad (6)$$

Здесь ρ_f – плотность жидкости, V_∞ – скорость жидкости на бесконечности, параллельная скорости движения панели, $\tau = \frac{l}{C}$, $C = \sqrt{\frac{T}{m}}$, где τ – временной характерный размер. С учетом (6) уравнение состояния динамического поведения системы (1) записывается в безразмерных переменных в форме

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau^2} (m + m_a) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2 \frac{V_0}{l\tau} \left(m + m_a \frac{V_\infty}{V_0} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{V_0^2}{l^2} \left(m + m_a \left(\frac{V_\infty}{V_0} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \\ - \frac{T}{l^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{D}{l^4} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{1}{l} g(lx, \tau t), \quad m_a = \frac{\pi l}{4} \rho_f. \end{aligned} \quad (7)$$

Используя безразмерные параметры и обозначения

$$\begin{aligned} \gamma_1 = 1 + \frac{\pi l}{4m} \rho_f, \quad \gamma_2 = \frac{2V_0}{C} \left(1 + \frac{\pi l}{4m} \frac{V_\infty}{V_0} \rho_f \right), \\ \gamma_3 = \frac{2V_0^2}{C^2} \left(1 + \frac{\pi l}{4m} \left(\frac{V_\infty}{V_0} \right)^2 \rho_f \right) - 1, \quad \beta = \frac{D}{ml^2 C^2} = \frac{D}{l^2 T}, \quad (8) \\ g'(x', t') = \frac{l}{mC^2} g(lx', \tau t') = \frac{l}{T} g(lx', \tau t'), \\ \Omega' = (-1, 1) \times (0, t_f), \quad t_f' = \frac{t_f}{\tau}, \end{aligned}$$

запишем уравнение для поперечных смещений в компактной форме (штрихи в (8) опускаем)

$$L(w) \equiv \gamma_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \gamma_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \gamma_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = g(x, t). \quad (9)$$

В дальнейшем принимаем начальные условия (2) в качестве возмущений, а функцию $g(x, t)$ будем рассматривать как управляющее воздействие при интегральном ограничении (5).

Рассматриваемая задача подавления колебаний заключается в отыскании управляющего воздействия $g(x, t)$, минимизирующего функционал (в безразмерных переменных)

$$J_g = \int_{-1}^1 \left[\alpha_1 w^2 + \alpha_2 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right]_{t=t_f} dx \rightarrow \min_g \quad (10)$$

при сформулированных ограничениях на рассматриваемую систему. Здесь α_1 и α_2 – заданные положительные постоянные. При выводе соотношений анализа чувствительности и необходимых условий экстремума привлекаются функционалы

$$J_g, J_\mu, J_a = \int_\Omega v(L(w) - g) d\Omega. \quad (11)$$

Обращение в ноль полной вариации суммарного функционала $J = J_g + J_a + \mu J_\mu$ при помощи выполнения операций варьирования функциональных характеристик и необходимых аналитических преобразований приводит к соотношениям, которым удовлетворяют сопряженные переменные в области Ω :

$$L(v) \equiv \gamma_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \gamma_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + \gamma_3 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = 0, \quad (12)$$

$$(v)_{x=\pm 1} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)_{x=\pm 1} = 0, \quad (13)$$

$$t = t_f: \quad v = -\frac{2\alpha_2}{\gamma_1} \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{2}{\gamma_1} \left(\alpha_1 w - \frac{2\alpha_2 \gamma_2}{\gamma_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right).$$

При этом соотношения анализа чувствительности даются выражениями

$$g = \frac{v}{2\mu}, \quad \mu^2 = \frac{1}{4M_0} \int v^2 d\Omega. \quad (15)$$

Значение множителя Лагранжа μ в (15) находится из изопериметрического условия $J_\mu = M_0$.

Уравнение в частных производных второго порядка (12) интегрируется в области Ω в обратном направлении по времени t с использованием условий (13), (14). Соотношения анализа чувствительности (15) позволяют находить экстремальные воздействия g_* .

Предлагается следующий пошаговый метод отыскания внешнего экстремального управляющего воздействия $g(x, t)$. На первом шаге фиксируется начальное (неоптимальное) управляющее воздействие $g_0(x, t)$, и в качестве начальных данных принимаются заданные функции $g_1(x)$, $g_2(x)$. При этом выполняется интегрирование динамического уравнения (9) с краевыми условиями (3) и начальными условиями (2) (записанными в безразмерных переменных) для $g = g_0(x, t)$. На втором шаге интегрируется уравнение (12) с граничными условиями (13) и условиями в конечный момент времени (14), определяющее сопряженную переменную $v(x, t)$ в области Ω . Далее, на третьем шаге в соответствии с выражениями (15) определяется в первом приближении экстремальное управляющее воздействие $g_*(x, t)$, подавляющее поперечные колебания панели.

Для решения неоднородного дифференциального уравнения в частных производных (9) с начальными и граничными условиями типа (2), (3) (прямая задача для $w(x, t)$), а также соответствующего однородного уравнения в частных производных (12) для $v(x, t)$ с условиями в конечный

момент времени (14) и граничными условиями (13) (сопряженная задача для $v(x, t)$) применим метод Галёркина. Представим приближенно искомые распределения $w(x, t)$ и $v(x, t)$ в виде рядов

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{n_0} f_n(t) \Psi_n(x), \quad v(x, t) = \sum_{n=1}^{n_0} q_n(t) \Psi_n(x), \quad (16)$$

$$\Psi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}(x+1)\right), \quad x \in [-1, 1].$$

Здесь $\Psi_n(x)$ – функции формы, n_0 – заданное число, а $f_n(t)$ и $q_n(t)$ ($n = 1, 2, \dots, n_0$) – неизвестные функции времени, подлежащие определению в результате решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Подставим соотношения (16) в уравнения (9), (12). Умножим получающиеся выражения на $\Psi_j(x)$ ($j = 1, 2, \dots$) и проинтегрируем возникающие произведения по переменной x на отрезке $-1 \leq x \leq 1$. Выполняя элементарные преобразования, получим системы обыкновенных дифференциальных уравнений для f_n и q_n :

$$\sum_{n=1}^{n_0} K_{jn} f_n - G_j(t) = 0, \quad \sum_{n=1}^{n_0} K_{jn} q_n(t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots \quad (17)$$

$$K_{jn} = \gamma_1 A_{jn} \frac{d^2}{dt^2} + \gamma_2 B_{jn} \frac{d}{dt} + \gamma_3 C_{jn} + \beta D_{jn},$$

где коэффициенты A_{jn} , B_{jn} , C_{jn} , D_{jn} и функции $G_j(t)$ определяются выражениями

$$A_{jn} = \int_{-1}^1 \Psi_j(x) \Psi_n(x) dx = \delta_{jn},$$

$$B_{jn} = \int_{-1}^1 \Psi_j(x) \frac{d\Psi_n(x)}{dx} dx =$$

$$= \begin{cases} 0, & j = n, \\ \frac{nj}{n^2 - j^2} [(-1)^{j+n} - 1], & j \neq n, \end{cases} \quad (18)$$

$$C_{jn} = \int_{-1}^1 \Psi_j(x) \frac{d^2\Psi_n(x)}{dx^2} dx = -\left(\frac{j\pi}{2}\right)^2 \delta_{jn},$$

$$D_{jn} = \int_{-1}^1 \Psi_j(x) \frac{d^4\Psi_n(x)}{dx^4} dx = \left(\frac{j\pi}{2}\right)^4 \delta_{jn},$$

$$G_j(t) = \int_{-1}^1 \Psi_j(x) g(x, t) dx, \quad t \in [0, t_f].$$

При этом начальные условия при $t = 0$ и условия в конечный момент времени $t = t_f$ записываются в виде

$$f_j(0) = G_{j1}, \quad \left(\frac{df_j}{dt}\right)_{t=0} = G_{j2}, \quad (19)$$

$$G_{jk} = \int_{-1}^1 \Psi_j(x) g_k(x, t) dx, \quad k = 0, 1, 2,$$

$$q_j(t_f) = -\frac{2\alpha_2}{\gamma_1} \sum_{n=1}^{n_0} B_{jn} f_n(t_f), \quad (20)$$

$$\left(\frac{dq_j}{dt}\right)_{t=t_f} = \frac{2}{\gamma_1} \left(\alpha_1 - 2\alpha_2 \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \left(\frac{j\pi}{2}\right)^2 \right) f_j(t_f).$$

Рассмотрим в качестве простейшего примера случай, когда возмущения начальных перемещений и скоростей движущейся панели и прикладываемое неоптимальное воздействие заданы выражениями $g_1(x) = \Psi_1(x)$, $g_2(x) = 0$, $g = g_0(x, t) = 1$, $(x, t) \in \Omega$, причем полагается, что $n_0 = 1$ и $\alpha_2 = 0$. В этом случае

$$G_1(t) = \int_{-1}^1 \Psi_1(x) g(x, t) dx = \frac{4}{\pi}, \quad (21)$$

$$f_1(0) = 1, \quad \left(\frac{df_1}{dt}\right)_{t=0} = 0,$$

а уравнение поперечных колебаний движущейся панели и решение этого уравнения записываются в виде

$$\frac{d^2 f_1}{dt^2} + c_1 f_1 + c_1 c_2 = 0,$$

$$f_1(t) = (1 + c_2) \cos(\sqrt{c_1} t) - c_2, \quad (22)$$

$$c_1 = \frac{p_1}{\gamma_1}, \quad c_2 = -\frac{G_1}{p_1},$$

$$p_1 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \left[-\gamma_3 + \beta \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \right].$$

При этом находится величина $f_1 = f_1(t_f)$ и значение минимизируемого функционала $J_0 = (J_g)_{g=g_0} = \alpha_1 (f_1^*)^2_{t=t_f}$. Далее от $t = t_f$ до $t = 0$ интегрируется (в обратном направлении) сопряженное уравнение с условиями в конечный момент времени $t = t_f$

$$\frac{d^2 q_1}{dt^2} + c_1 q_1 = 0, \quad q_1(t_f) = 0, \quad (23)$$

$$\left(\frac{dq_1}{dt}\right)_{t=t_f} = 2 \frac{\alpha_1}{\gamma_1} f_1(t_f) \equiv Q.$$

В результате приходим к следующим выражениям для сопряженной переменной $q_1(t)$ и оптимального управления $g = g^*(x, t)$:

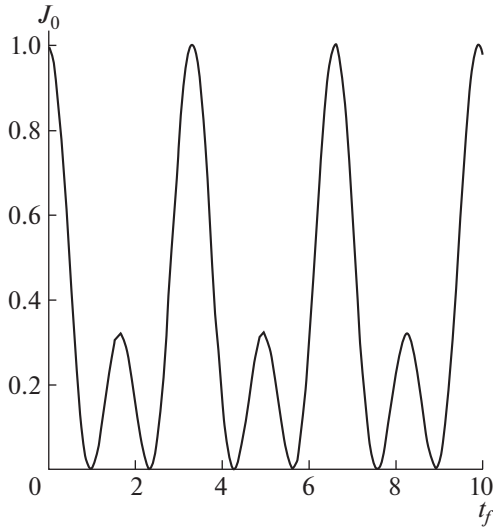


Рис. 1. Зависимость функционала $J_0 = (J_g)_{g=g_0}$ от параметра задачи t_f

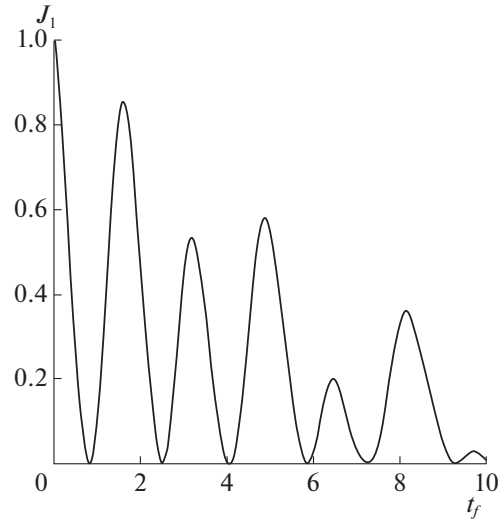


Рис. 2. Зависимость функционала $J_1 = J_g^*(t_f)$ от параметра задачи t_f

$$q_1(t) = Q_1 \sin(\sqrt{c_1}t) + Q_2 \cos(\sqrt{c_1}t),$$

$$Q_1 = \frac{Q}{\sqrt{c_1}} \cos(\sqrt{c_1}t_f), \quad Q_2 = -\frac{Q}{\sqrt{c_1}} \sin(\sqrt{c_1}t_f), \quad (24)$$

$$g^*(x, t) = \frac{1}{2\mu} q_1(t) \Psi_1(x),$$

$$\mu^2 = \frac{1}{4M_0} \int_0^{t_f} q_1^2(t_f) dt. \quad (25)$$

Приложение найденного управляющего воздействия к панели приводит к дифференциальному уравнению для переменной f_1^* :

$$\frac{d^2 f_1^*}{dt^2} + c_1 f_1^* + R = 0,$$

$$f_1^*(0) = 0, \quad \left(\frac{df_1^*}{dt} \right)_{t=0} = 0, \quad (26)$$

$$c_1 = \frac{p_1}{\gamma_1}, \quad R = -\frac{G_1^*}{p_1}.$$

Находим

$$f_1 = f_1^*(t) = -\frac{Q \cos(\sqrt{c_1}t_f)}{4\mu\gamma_1^2 c_1^{3/2}} \sin(\sqrt{c_1}t) +$$

$$+ \left\{ 1 - \frac{Q \sin(\sqrt{c_1}t_f)}{4\mu\gamma_1^2 c_1^{3/2}} \right\} \cos(\sqrt{c_1}t) -$$

$$- \frac{1}{4\mu\gamma_1^2 c_1} \{ (Q_1 \sqrt{c_1}t - Q_2) \cos(\sqrt{c_1}t) - Q_2 \sqrt{c_1}t \sin(\sqrt{c_1}t) \}, \quad (27)$$

$$J_g^* = (J_g)_{g=g^*} = \alpha_1 (f_1^*)^2_{t=t_f}.$$

На рис. 1, 2 представлены, соответственно, зависимости величин $J_0 = (J_g)_{g=g_0}$, $J_1 = J_g^*(t_f)$ от параметра задачи t_f . Расчеты проводились для значений параметров $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1$, $\beta = 1$, $M_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$.

Приведем некоторые замечания и выводы. Предлагаемая в работе формулировка проблемы подавления колебаний движущейся в потоке жидкости упругой панели, а также примененный метод анализа содержат ряд упрощений. Движущаяся в продольном направлении упругая панель характеризуется одномерной функцией нормальных перемещений $w = w(x, t)$. При этом гидроупругое взаимодействие описывается в рамках одномерной модели упругого деформирования движущейся панели и двумерной модели жидкости, движущейся в продольном и поперечном направлениях. Использование аналитического выражения для гидродинамической реакции существенно упрощает учет взаимодействия потока жидкости и движущейся упругой панели.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена по теме госзадания (номер госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-08-00082а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Marynowski K.* Dynamics of the Axially Moving Orthotropic Web. В.; Heidelberg, Germany: Springer-Verlag, 2008.

2. *Banichuk N., Jeronen J., Neittaanmäki P., Saksa T., Tuovinen T.* Mechanics of Moving Materials. Solid Mechanics and Its Applications. V. 207. Springer, Cham. 2014. 253 p.
3. *Banichuk N.V., Barsuk A.A., Jeronen J., Tuovinen T., Neittaanmäki P.* Stability of Axially Moving Materials. Solid Mechanics and Its Applications. V. 259. Springer Nature Switzerland AG, Cham. 2020. 642 p.
4. *Kornecki A., Dowell E.H., O'Brien J.* On the aeroelastic instability of two-dimensional panels in uniform incompressible flow // *J. Sound and Vibration*. 1976. V. 47. № 2. P. 163–178.
5. *Баничук Н.В., Миронов А.А.* Схема струйного обтекания для исследования равновесных форм упругих пластин в потоке жидкости и задачи оптимизации // *ПММ*. 1979. Т. 43. Вып. 1. С. 83–90.
6. *Pramila A.* Sheet Flutter and the Interaction between Sheet and Air // *TAPPI J.* 1986. V. 68. № 7. P. 70–74.
7. *Chang Y.B., Moretti P.M.* Interaction of Fluttering Webs with Surrounding Air // *TAPPI J.* 1991. V. 74. № 3. P. 231–236.
8. *Баничук Н.В., Иванова С.Ю.* Исследование устойчивости продольного движения панели с учетом гидротермоупругого взаимодействия // *Проблемы прочности и пластичности*. 2018. Т. 80. № 4. С. 456–465.

ON SUPPRESSION OF TRANSVERSE VIBRATIONS OF ELASTIC PANEL AXIALLY MOVING IN FLUID FLOW

N. V. Banichuk^a and S. Yu. Ivanova^a

^a *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS I.G. Goryacheva

The problem of active vibration suppression of elastic panel axially moving in ideal fluid flow is considered. The approach based on combined consideration of moving fluid reaction and arising panel deformations is presented. By using the analytical solution of two-dimensional hydrodynamic problem, the initial combined two-dimensional problem of hydroelasticity is reduced to solving the one-dimensional partial differential equation.

Keywords: elastic panel, ideal fluid, suppression of vibrations