ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2020, том 492, с. 79–82

МЕХАНИКА

УДК 539.3

МЕТОД БЛОЧНОГО ЭЛЕМЕНТА В ТЕОРИИ ТРЕЩИН НОВОГО ТИПА

© 2020 г. Академик РАН В. А. Бабешко[1,2,*], О. В. Евдокимова[1,], О. М. Бабешко[2]**

Поступило 19.04.2019 г.
После доработки 19.04.2019 г.
Принято к публикации 20.03.2020 г.

Изложены основные особенности трещин нового типа, обнаруженные недавно авторами при исследовании стартовых землетрясений. Построены уравнения, описывающие напряженно-деформированное состояние трещин нового типа, обсуждаются вопросы их связи с трещинами Гриффитса–Ирвина.

Ключевые слова: метод блочного элемента, граничная задача, трещины нового типа, трещины Гриффитса–Ирвина

DOI: 10.31857/S2686740020030050

В работе рассматриваются уравнения недавно обнаруженных при изучении стартовых землетрясений трещин нового типа [1–3], дополняющих трещины Гриффитса–Ирвина [4, 5]. Трещины Гриффитса–Ирвина формируются как результат гладкого непрерывного деформирования сжимаемых с боков, до превращения в полость, отверстий в виде эллипса или окружности, находящихся в неограниченной пластине. Получившиеся полости имеют гладкую границу, а угол в вершинах трещины равен 180 градусам. Особенностью трещин нового типа является та же модель формирования полости, с той разницей, что вместо эллипса принимается прямоугольник. В пределе получается трещина с кусочно-гладкой границей, с углом в вершине, равным нулю. Для этого типа трещин формируется различный набор уравнений, в зависимости от удобства исследований. В рамках линейной теории упругости допускается после нагружения тел с трещинами снос граничных условий на границы, занимавшие положение до деформации. Это используется в уравнениях. В случае кусочно-гладкой границы у трещин нового типа в точках излома границ могут возникать концентрации напряжений, способных вызывать неограниченные напряжения и перемещения, если оставаться в рамках линейной упругости.

[1] *Южный научный центр Российской академии наук, Ростов-на-Дону, Россия*
[2] *Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия*
**E-mail: babeshko41@mail.ru*
***E-mail: evdokimova.olga@mail.ru*

В реальности в этих зонах материала либо происходит разрушение среды, либо ее переход в иную реологию, пластическую, ползучести, вязкоупругую, нелинейную, приводящую к конечным напряжениям и деформациям.

Таким образом, оставаясь в рамках линейной теории упругости и ставя задачу исследования концентрации напряжений в сложных объектах и трещинах, следует мириться с появлением некоторых неограниченных параметров напряженно-деформируемой среды, что достаточно просто объясняется разрушениями либо переходами среды в иные состояния. Из сказанного следует, что принимаемая модель линейной теории упругости является индикаторной средой, служащей для выявления в зонах среды концентрации напряжений, вызываемых трещинами, включениями, и другими объектами, склонными к появлению концентраций. Заметим, что значительное отличие теоретически рассчитанных параметров разрушения сред с трещинами от экспериментальных данных, в сторону понижения, Гриффитс объяснял появлением микротрещин, которые сложно учитывать, приводящих к возникающей такой разнице [4]. Фактически, трещины нового типа и являются теми мало изученными механическими объектами, о существовании которых догадывался Гриффитс, и которые более податливы к разрушению.

ОБ УРАВНЕНИЯХ ТРЕЩИН НОВОГО ТИПА

Различным аспектам трещин Гриффитса–Ирвина посвящено большое число работ, охватить все крайне сложно. Ряд вопросов, связанных с теорией трещин Гриффитса–Ирвина, дается в работах [6–15].

В работах [1–3] рассмотрены граничные задачи, исследованные и решенные методом блочного элемента, приводящие к трещинам нового типа. Так, лежащие на деформированном основании и встречно сближающиеся торцами полубесконечные литосферные плиты до соприкосновения формируют разлом, который и представляет трещину нового типа. Ее свойства и особенности детально описаны в указанных статьях. Главная особенность состоит в том, что в зоне сближения литосферных плит контактные напряжения между плитами и основанием, на котором они лежат, приобретают сингулярные концентрации напряжений. Впервые это было обнаружено для случаев, когда литосферные плиты моделировались пластинами Кирхгофа. Исследование, выполненное в статье [1], показало, что это свойство остается в силе и для случая моделирования литосферных плит моделью трехмерной теории упругости. Именно этот результат дал основание сделать заключение о существовании трещин нового типа, дополняющих трещины Гриффитса–Ирвина.

Для построения уравнения для трещины нового типа рассмотрим полубесконечную трещину в упругом теле, которая описывается хорошо известным псевдодифференциаальным уравнением вида [6–15]

$$\int_0^\infty k(x-\xi)u(\xi)d\xi = q^+(x), \quad 0 \le x \le \infty,$$

$$q^+(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Q^+(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha,$$

$$Q^+(\alpha) = \int_0^\infty q^+(x)e^{i\alpha x}dx, \quad U(\alpha) = \int_0^\infty u(x)e^{i\alpha x}dx,$$

$$k(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha,$$

$$K(\alpha) \to c|\alpha|[1 + O(\alpha^{-1})], \quad |\alpha| \to \infty.$$

Ядро $k(x)$ интегрального уравнения представляет четную обобщенную функцию. Неизвестная $u(x)$ представляет перемещения границ берегов трещины, вызванные действующей на берега нагрузкой $q^+(x)$. Функция $K(\alpha)$, как правило, представляет либо мероморфную функцию, либо аналитическую функцию параметра α, имеющую в качестве особенностей полюсы и точки ветвления.

Продолжим уравнение на всю ось, введя неизвестную функцию $e^-(x)$, $x < 0$.

Тогда будем иметь уравнение в форме

$$\int_0^\infty k(x-\xi)u(\xi)d\xi = \begin{cases} q^+(x), & 0 \le x \le \infty, \\ e^-(x), & -\infty \le x < 0, \end{cases}$$
$$E^-(\alpha) = \int_{-\infty}^{0} e^-(x)e^{i\alpha x}dx. \tag{1}$$

Функция представляет напряжения в упругом теле вне трещины, начиная от ее вершины. С целью исследования псевдодифференциального уравнения в классических функциях представим его в форме интегродифференциального уравнения, введя произвольный параметр $m > 0$:

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - m^2\right)\int_0^\infty r(x-\xi)u(\xi)d\xi =$$
$$= \begin{cases} q^+(x), & 0 \le x \le \infty, \\ e^-(x), & -\infty \le x < 0, \end{cases} \tag{2}$$
$$r(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha, \quad R(\alpha) = \frac{K(\alpha)}{\alpha^2 + m^2}.$$

Интегродифференциальное уравнение устанавливает связь между напряжениями, действующими на берега трещины, и перемещениями берегов. Перемещения при заданных напряжениях находятся с некоторым произволом, которым определяется перемещение деформируемого объекта как твердого тела.

Далее, чтобы перейти к уравнению Винера–Хопфа, применим метод блочного элемента. Введем обозначение для интегрального выражения, положив

$$\int_0^\infty r(x-\xi)u(\xi)d\xi = w(x).$$

Тогда приходим к граничной задаче на всей оси вида

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - m^2\right)w(x) = \begin{cases} q^+(x), & 0 \le x \le \infty, \\ e^-(x), & -\infty \le x < 0. \end{cases}$$

Найдем решение граничной задачи, построив два упакованных блочных элемента $w^+(x)$ и $w^-(x)$, определенных на положительной и отрицательной полуосях соответственно.

В результате будем иметь

$$w(x) = w^+(x) + w^-(x), \quad w^\pm(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W_\pm(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha.$$

РЕЗУЛЬТАТ ИССЛЕДОВАНИЯ

В результате несложных вычислений будем иметь

$$W_-(\alpha) = \frac{iw_-(0)}{(\alpha - \alpha_+)} + \frac{Q^+(\alpha_+) - Q^+(\alpha_-)}{(\alpha_+ - \alpha_-)(\alpha - \alpha_+)} + \\ + \frac{E^-(\alpha) - E^-(\alpha_-)}{(\alpha - \alpha_+)(\alpha - \alpha_-)},$$

$$W_+(\alpha) = -\frac{iw_+(0)}{(\alpha - \alpha_-)} + \frac{Q^+(\alpha) - Q^+(\alpha_+)}{(\alpha - \alpha_+)(\alpha - \alpha_-)} - \\ - \frac{E^-(\alpha_-) - E^-(\alpha_+)}{(\alpha_+ - \alpha_-)(\alpha - \alpha_-)}, \quad \alpha_\pm = \pm im.$$

Возвращаясь к принятым обозначениям, получаем интегральное уравнение Винера–Хопфа в следующем виде:

$$\int_0^\infty r(x - \xi)u(\xi)d\xi = \begin{cases} w^+(x), & 0 \le x \le \infty, \\ w^-(x), & -\infty \le x < 0. \end{cases}$$

Решение одномерного уравнения Винера–Хопфа не представляет труда и его можно записать в виде

$$U(\alpha) = R_+^{-1}(\alpha)\{R_-^{-1}(\alpha)W_+(\alpha)\}^+,$$
$$W_-(\alpha) = -R_-(\alpha)\{R_-^{-1}(\alpha)W_+(\alpha)\}^-,$$
$$R(\alpha) = R_-(\alpha)R_+(\alpha),$$
$$\{G(\alpha)\}^\pm = \pm\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G(\xi)}{\xi - \alpha}d\xi, \quad \alpha \in D^\pm.$$

Здесь $D^\pm$ для плюса – верхняя комплексная полуплоскость и для минуса – нижняя. Заметим, что функции $W_\pm(\alpha)$ содержат неизвестные $E^-(\alpha)$ и их функционалы $E^-(\alpha_-)$, $E^-(\alpha_+)$, подобно проблеме, возникающей в другом подходе по изучению трещин нового типа [1–3]. Эти неизвестные определяются таким же образом, как и в указанных работах, после нахождения функций $W_\pm(\alpha)$.

Легко проверяется непосредственной подстановкой, что построенные решения удовлетворяют в классических функциях интегральному уравнению (1), взятому в форме (2). Заметим, что в отличие от трещин, они являются чувствительными к типу нагрузок.

Нетрудно видеть, что в зависимости от значения функционала

$$v(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi}\frac{Q_2^+(\lambda)d\lambda}{R_-(\lambda)} = O(\xi^{-\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0$$

перемещения берегов трещины могут быть как ограниченными для больших ε, подобно трещинам Гриффитса–Ирвина, так и становиться неограниченными для достаточно малых ε, т.е. разрушают среду или переводят зону вершины трещины в иную реологию, о чем говорилось выше.

Этим свойством трещин нового типа успешно пользуются мастера стекольного дела, когда режут на части стекольное полотно. Твердым острым инструментом они наносят на поверхность стекольного полотна достаточно рваную, с негладкой границей трещину нового типа. Затем, постукивая по стеклу, заставляют функционал переходить из области больших ε в область малых, подавая пиковые нагрузки на берега трещин от ударов. В результате стекольное полотно после приложения однознаковых изгибных усилий разделяется вдоль трещины, так как в этом случае ε становится заведомо малым.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, наряду с подходом, развитым при исследовании стартовых землетрясений [1–3], найдено еще одно описание трещин нового типа, дополняющих трещины Гриффитса–Ирвина. Вариант теории этих трещин, изложенный в настоящем сообщении, для полубесконечной трещины, скалярно, лишь одной компонентой напряжений нагруженной по берегам, легко переносится на трещины конечной длины, на векторную постановку и на случаи двумерных областей. Одновременно можно сделать вывод, что ранее обнаруженные стартовые землетрясения действительно возникают в зонах разломов, представляющих трещины нового типа, разрушение которых провоцируется определенными внешними воздействиями, описываемыми построенным в настоящей работе функционалом.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Отдельные фрагменты работы выполнены в рамках реализации Госзадания Минобрнауки на 2019 г., проекты (9.8753.2017/8.9), ЮНЦ РАН на 2019 г., проекта (00-18-04) № госрег. 01201354241, программ Президиума РАН I-16, проект (00-18-21) и I-52 проект (00-18-29), и при поддержке грантов РФФИ (19–41–230003), (19–41–230004), (19–48–230014), (17–08–00323), (18–08–00465), (18–01–00384), (18–05–80008).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М.* Об одном новом типе трещин, дополняющих трещины Гриффитса–Ирвина // ДАН. 2019. Т. 485. № 2. С. 162–165.
2. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.* On the possibility of predicting some types of earthquake by a mechanical approach // Acta Mechanica. 2018. V. 229. № 5. P. 2163–2175. https://doi.org/10.1007/s00707-017-2092-0
3. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.* On a mechanical approach to the prediction of earthquakes

during horizontal motion of litospheric plates // Acta Mechanica. 2018. https://doi.org/10.1007/s00707-018-2255-7

4. *Griffith A.* The Phenomena of Rupture in Solids // Trans. R. Soc. L. 221A. 1920. P. 163–197.
5. *Irwin G.* Fracture dynamics // Fracture of metals. ASM. Cleveland. 1948. P. 147–166.
6. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
7. *Морозов Н.Ф.* Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 256 с.
8. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.* On the possibility of predicting some types of earthquake by a mechanical approach // Acta Mechanica. 2018. V. 229. № 5. P. 2163–2175. https://doi.org/10.1007/s00707-017-2092-0
9. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.* On a mechanical approach to the prediction of earthquakes during horizontal motion of litospheric plates // Acta Mechanica. 2018. https://doi.org/10.1007/s00707-018-2255-7
10. *Партон В.З., Борисковский В.Г.* Динамика хрупкого разрушения. М.: Машиностроение, 1988. 240 с.
11. *Александров В.М., Сметанин Б. И., Соболь Б.В.* Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Наука, 1993. 224 с.
12. *Kirugulige M.S., Tippur H.V.* Mixed-mode dynamic crack growth in functionally graded glass-filled epoxy // *Exp Mech*. 2006. Т. 46. № 2. P. 269–281.
13. *Rangarajan R., Chiaramonte M.M., Hunsweck M.J., Shen Y., Lew A.J.* Simulating curvilinear crack propagation in two dimensions with universal meshes // Int. J. Numer. Meth. Engng. 102 (3–4). P. 632–670.
14. *Huang Y., Gao H.* Intersonic crack propagation. Pt II: Suddenly stopping crack // J. Appl. Mech. 2002. V. 69. P. 76–80.
15. *Krueger R.* Virtual Crack Closure Technique: History, Approach, and Applications. // Appl. Mech. Rev. 2004. V. 57. P. 109–143.

BLOCK ELEMENT METHOD IN THE THEORY OF THE CRACKS OF NEW TYPE

Academician of the RAS V. A. Babeshko[a,b], O. B Evdokimova[a], and O. M. Babeshko[b]

[a] *Federal Research Center The Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russian Federation*

[b] *Kuban State University, Krasnodar, Russian Federation*

The main features of the new type of cracks described recently by authors in the study of starting earthquakes are presented. Built equations describing the stress-strain state of cracks of new type and discusses their relationship to cracks of Griffith–Irwin.

Keywords: block element method, boundary value problem, cracks of new type, cracks of Griffith–Irwin