

УДК 531.26, 521.14, 514.85

## ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА ПРИТЯЖЕНИЯ АСТЕРОИДА (433) ЭРОС С ТОЧНОСТЬЮ ДО ЧЛЕНОВ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

© 2020 г. А. А. Буров<sup>1,2,\*</sup>, В. И. Никонов<sup>1,2,\*\*</sup>

Представлено академиком РАН Ю.Г. Евтушенко 25.11.2019 г.

Поступило 29.11.2019 г.

После доработки 24.03.2020 г.

Принято к публикации 25.03.2020 г.

Описывается способ вычисления компонент тензоров Эйлера–Пуансо вплоть до четвертого порядка, присутствующих в разложении гравитационного потенциала. Результаты иллюстрируются на примере астероида (433) Эрос.

*Ключевые слова:* приближение гравитационного потенциала, астероид (433) Эрос, тензор Эйлера–Пуансо

**DOI:** 10.31857/S2686740020030086

### 1. ГРАВИТАЦИОННЫЙ ПОТЕНЦИАЛ И СИЛА ПРИТЯЖЕНИЯ

Пусть  $\mathcal{B}$  – гравитирующее тело,  $OX_1X_2X_3$  – связанная с ним ортогональная система координат,  $G$  – гравитационная постоянная,  $\rho(\mathbf{x})$  – плотность тела в точке  $X$ :  $\overline{OX} = \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ . Как известно (см., например, [1–5]), потенциал силы притяжения в точке  $P$ :  $\overline{OP} = \mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)^T$  и напряженность гравитационного поля в этой точке определяются как

$$U(\mathbf{r}) = -G \int_{\mathcal{B}} \frac{\rho(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}}{r}, \quad (1)$$

$$r = (\mathbf{r} - \mathbf{x}, \mathbf{r} - \mathbf{x})^{1/2}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}.$$

### 2. МУЛЬТИПОЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НЬЮТОНОВСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

Для описания движения вдали от гравитирующего тела  $\mathcal{B}$  применяют разложения подынтегрального выражения в (1) в ряд по степеням пара-

метра, определяющего малость отношения размеров тела к расстоянию до изучаемой точки. Пусть

$$\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{x}) = \frac{-2(\mathbf{r}, \mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{x})}{r^2}.$$

Разложение подынтегрального выражения в (1) в ряд по степеням этого параметра имеет вид

$$U(P) = -\frac{G}{r} \int_{\mathcal{B}} \left( 1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{3}{8}\varepsilon^2 - \frac{5}{16}\varepsilon^3 + \frac{35}{128}\varepsilon^4 + \dots \right) \rho(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \equiv -\frac{G}{r} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{C_i}{r^i},$$

где  $C_i$  – гармонические многочлены (см., например, [2, с. 213]).

Обозначим

$$J_{k_1 k_2 k_3} = \int_{\mathcal{B}} \rho(\mathbf{x}) x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} \, d\mathbf{x}.$$

Тогда слагаемые  $C_k$  примут вид

$$C_0 = J_{000}, \quad C_1 = \frac{1}{r} (J_{100}r_1 + J_{010}r_2 + J_{001}r_3),$$

$$C_2 = -\frac{1}{2} (J_{200} + J_{020} + J_{002}) + \frac{3}{r^2} (J_{110}r_1r_2 + J_{101}r_1r_3 + J_{011}r_2r_3) + \frac{3}{2r^2} (J_{200}r_1^2 + J_{020}r_2^2 + J_{002}r_3^2),$$

$$C_3 = -\frac{3}{2r} [(J_{300} + J_{120} + J_{102})r_1 + (J_{210} + J_{030} + J_{012})r_2 + (J_{201} + J_{021} + J_{003})r_3] +$$

<sup>1</sup>Вычислительный центр им. А.А. Дородницына  
Федерального исследовательского центра  
“Информатика и управление”  
Российской академии наук, Москва, Россия

<sup>2</sup>Национальный исследовательский университет  
“Высшая школа экономики”, Москва, Россия

\*E-mail: jtm@narod.ru

\*\*E-mail: nikon\_v@list.ru

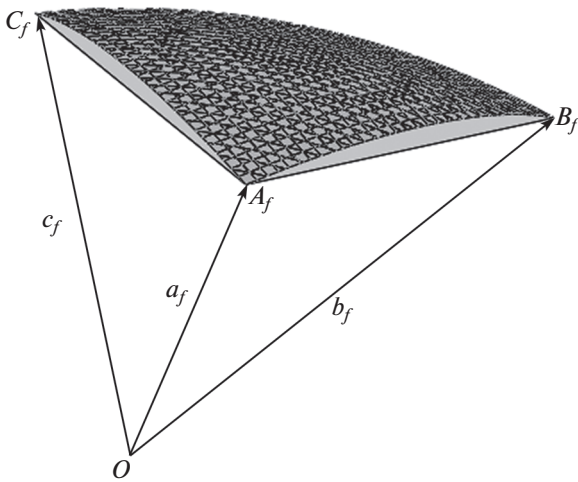


Рис. 1.

$$\begin{aligned}
 & + \frac{5}{2r^3} [J_{300}r_1^3 + J_{030}r_2^3 + J_{003}r_3^3 + 6J_{111}r_1r_2r_3 + \\
 & + 3(J_{210}r_1^2r_2 + J_{201}r_1^2r_3 + J_{120}r_1r_2^2 + J_{102}r_1r_3^2 + \\
 & + J_{021}r_2^2r_3 + J_{012}r_2r_3^2)], \\
 C_4 = & \frac{3}{8} [J_{400} + J_{040} + J_{004} + 2(J_{220} + J_{202} + J_{022})] - \\
 & - \frac{15}{4r^2} [(J_{400} + J_{220} + J_{202})r_1^2 + \\
 & + (J_{040} + J_{220} + J_{022})r_2^2 + (J_{004} + J_{202} + J_{022})r_3^2 + \\
 & + 2((J_{310} + J_{112} + J_{130})r_1r_2 + (J_{301} + J_{121} + J_{103})r_1r_3 + \\
 & + (J_{211} + J_{031} + J_{013})r_2r_3)] + \frac{35}{16r^4} [J_{400}r_1^4 + J_{040}r_2^4 + \\
 & + J_{004}r_3^4 + 12(J_{211}r_1^2r_2r_3 + J_{121}r_1r_2^2r_3 + J_{112}r_1r_2r_3^2) + \\
 & + 4(J_{130}r_1r_2^3 + J_{103}r_1r_3^3 + J_{301}r_1^3r_3 + J_{310}r_1^3r_2 + \\
 & + J_{031}r_2^3r_3 + J_{013}r_3^3r_2) + 6(J_{220}r_1^2r_2^2 + \\
 & + J_{202}r_1^2r_3^2 + J_{022}r_2^2r_3^2)].
 \end{aligned}$$

### 3. ПОРЯДОК ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ $J_{k_1k_2k_3}$

Вычисление или по крайней мере оценка коэффициентов  $J_{k_1k_2k_3}$  в разложении потенциала осложняется тем, что, как правило, распределение плотности внутри тела неизвестно. В дальнейшем плотность тела  $\rho$  предполагается постоянной. Кроме того, известно лишь приближение поверхности тела  $\mathcal{B}$  триангуляционной сеткой, вычисленной на основании результатов фотометрии. Поэтому в дальнейшем под телом будет пониматься часть пространства, ограниченная такой триангуляционной сеткой, а под границей такого тела  $\partial\mathcal{B}$  – задаваемая такой сеткой поверхность

многогранника. Таким образом, тело  $\mathcal{B}$  можно рассматривать как совокупность тетраэдров с общей вершиной в точке  $O$ , пересекающихся в случае выпуклого тела разве что по своим границам.

Предлагается следующая последовательность действий:

1) вычисление коэффициента  $J_{000}$ , задающего массу  $m_{\mathcal{B}} = J_0$  тела  $\mathcal{B}$ ;

2) вычисление коэффициентов  $J_{100}, J_{010}, J_{001}$  определяющих центр масс тела  $\mathcal{B}$  – точки  $Z$ :

$$\overline{OZ} = \mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)^T = m_{\mathcal{B}}^{-1}(J_{100}, J_{010}, J_{001})^T = m_{\mathcal{B}}^{-1}\mathbf{J}_1;$$

3) переход от системы координат  $Ox_1x_2x_3$  к соосной системе координат  $ZX_1X_2X_3$ . Заметим, что  $C_1 = 0$  в этой и вводимой ниже системе координат  $Z\xi_1\xi_2\xi_3$ ;

4) вычисление компонент  $J_{200}, J_{020}, J_{002}, J_{110}, J_{011}, J_{101}$  тензора Эйлера – Пуансо второго порядка:

$$\mathbf{J}_2 = \begin{pmatrix} J_{200} & J_{110} & J_{101} \\ J_{110} & J_{020} & J_{011} \\ J_{101} & J_{011} & J_{002} \end{pmatrix},$$

а также компонент центрального тензора инерции  $\mathbf{I} = \text{Tr}(\mathbf{J}_2)\mathbf{E} - \mathbf{J}_2$ ;

5) вычисление единичных собственных векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  и собственных значений  $I_1, I_2, I_3$  – главных центральных моментов инерции – тензора  $\mathbf{I}$ ;

6) переход в систему  $Z\xi_1\xi_2\xi_3$  с осями, направленными вдоль векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ;

7) вычисление компонент тензоров Эйлера–Пуансо третьего и четвертого рангов  $J_{k_1k_2k_3}, k_1 + k_2 + k_3 = 3$  и  $k_1 + k_2 + k_3 = 4$ .

### 4. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ $J_{k_1k_2k_3}$

Пусть триангуляционная сетка  $\mathcal{B}$  определяется наборами вершин  $\mathcal{V}$  и граней  $\mathcal{F}$ . Обозначим  $A_f, B_f$  и  $C_f$  вершины произвольной грани  $f \in \mathcal{F}$ . Тогда  $\overline{OA_f} = \mathbf{a}_f, \overline{OB_f} = \mathbf{b}_f$  и  $\overline{OC_f} = \mathbf{c}_f$  – их радиус-векторы;  $\mathbf{n}_f$  – внешняя нормаль к этой грани (рис. 1). Будем считать, что нумерация вершин грани введена таким образом, что переход  $A_f \rightarrow B_f \rightarrow C_f \rightarrow A_f$  из конца нормали  $\mathbf{n}_f$  “виден” против часовой стрелки.

При вычислении коэффициентов  $J_{k_1k_2k_3}$  формула Гаусса–Остроградского позволяет перейти от интегралов по объему к интегралам по поверхности (см., например, [6, 7]). Искомые интегралы равны сумме интегралов по всем граням из  $\mathcal{F}$ . Вклад в них суммы интегралов по смежным граням двух соседних тетраэдров с общей вершиной в точке  $O$  равен нулю. Тогда для любых неотрицательных целых чисел  $k_1, k_2, k_3$

$$\int_{V_B} x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} dx_1 dx_2 dx_3 = \sum_{f \in \mathcal{F}} \int_{S_f} \frac{x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3}}{k_1 + k_2 + k_3 + 3} (\mathbf{x}, \mathbf{n}_f) ds. \quad (2)$$

Входящее множителем в подынтегральные выражения скалярное произведение имеет вид

$$(\mathbf{x}, \mathbf{n}_f) = (x_1 \mathbf{a}_f + x_2 \mathbf{b}_f + x_3 \mathbf{c}_f, \mathbf{n}_f) = (x_1 + x_2 + x_3) h_f = h_f,$$

поскольку конец вектора  $\mathbf{x}$  лежит в плоскости грани  $f$ . Для вычисления интегралов (2) на грани  $f$  выбираются безразмерные координаты  $u$  и  $v$ :

$$\mathbf{x} = \mathbf{a}_f + u \mathbf{u}_f + v \mathbf{v}_f \\ (\mathbf{u}_f = \mathbf{b}_f - \mathbf{a}_f, \mathbf{v}_f = \mathbf{c}_f - \mathbf{a}_f).$$

В них элемент площади выражается как  $ds = |\mathbf{u}_f \times \mathbf{v}_f| du dv$  и, кроме того,

$$\int_0^1 \int_0^{1-v} u^a v^b du dv = \frac{a! b!}{(a+b+2)!}, \quad a, b \in \{1, 2, 3, \dots\}. \quad (3)$$

В силу формулы для объема тетраэдра  $V_f = \frac{(\mathbf{a}_f, \mathbf{b}_f \times \mathbf{c}_f)}{6}$  и определения центра масс

$$\mathbf{J}_0 = \rho V_{\mathcal{B}}, \quad V_{\mathcal{B}} = \sum_{f \in \mathcal{F}} V_f,$$

$$\mathbf{J}_1 = \rho \sum_{f \in \mathcal{F}} V_f \mathbf{z}_f = m_{\mathcal{B}} \overline{OZ}$$

$$\left( \overline{OZ}_f = \mathbf{z}_f = \frac{1}{4} (\mathbf{a}_f + \mathbf{b}_f + \mathbf{c}_f) \right).$$

Аналогично, после преобразований с учетом (3) и обозначения  $\sigma_f = h_f |\mathbf{u}_f \times \mathbf{v}_f|$  имеем

$$\mathbf{J}_2 = \frac{\rho}{120} \sum_{f \in \mathcal{F}} \sigma_f [\mathbf{a}_f \otimes \mathbf{a}_f + \mathbf{b}_f \otimes \mathbf{b}_f + \mathbf{c}_f \otimes \mathbf{c}_f + 16 \mathbf{z}_f \otimes \mathbf{z}_f],$$

где  $\otimes$  обозначает диадное произведение векторов (см., например, [8]).

Аналитические выражения для компонент тензоров Эйлера–Пуансо третьего и четвертого ранга  $\mathbf{J}_3$  и  $\mathbf{J}_4$  даже после преобразований остаются весьма громоздкими, см., например,

$$J_{300} = \frac{\rho}{120} \sum_{f \in \mathcal{F}} \sigma_f [a_1 b_1 c_1 + 4(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) z_1]_f,$$

$$J_{210} = \frac{\rho}{360} \sum_{f \in \mathcal{F}} \sigma_f [4(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) z_2 + 8(a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2) z_1 + a_1 b_1 c_2 + a_1 b_2 c_1 + a_2 b_1 c_1]_f,$$

$$J_{111} = \frac{\rho}{720} \sum_{f \in \mathcal{F}} \sigma_f [a_1 (b_2 c_3 + b_3 c_2) + a_2 (b_1 c_3 + b_3 c_1) + a_3 (b_1 c_2 + b_2 c_1) + 8((a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2) z_3 + (a_3 a_1 + b_3 b_1 + c_3 c_1) z_2 + (a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3) z_1)]_f,$$

$$J_{400} = \frac{\rho}{210} \sum_{f \in \mathcal{F}} \sigma_f [4(a_1^3 + b_1^3 + c_1^3 + a_1 b_1 c_1) z_1 + a_1^2 b_1^2 + b_1^2 c_1^2 + c_1^2 a_1^2]_f,$$

$$J_{310} = \frac{\rho}{840} \sum_{f \in \mathcal{F}} \sigma_f \cdot \left[ 256 z_1^3 z_2 + \sum_{(a,b,c)} a_2 (a_1 (3a_1^2 - (b_1 + c_1)^2) - 8b_1 c_1 z_1) \right]_f,$$

$$J_{220} = \frac{\rho}{1260} \sum_{f \in \mathcal{F}} \sigma_f \cdot \sum_{(a,b,c)} \left[ a_1^2 (6a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) + 2a_1 a_2 (b_1 + c_1) (b_2 + c_2) + \sum_{(1,2)} a_2^2 (3a_1 (b_1 + c_1) + b_1 c_1) \right]_f,$$

$$J_{211} = \frac{\rho}{2520} \sum_{f \in \mathcal{F}} \sigma_f \cdot \left[ \sum_{(a,b,c)} a_1^2 \left( b_2 c_3 + c_2 b_3 + 2(3a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3) + 12 \sum_{(2,3)} a_2 z_3 \right) + \sum_{(a,b,c)} 2a_1 c_1 (a_2 (2c_3 + b_3 + 3a_3) + b_2 (a_3 + b_3 + c_3) + c_2 (b_3 + 3c_3 + 2a_3)) \right]_f.$$

Остальные компоненты получаются из выписанных заменами индексов и для краткости не приводятся.

## 5. ИНЕРЦИАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ АСТЕРОИДА (433) ЭРОС

Для вычисления инерциальных характеристик астероида (433) Эрос в предположении о постоянстве его плотности используется триангуляционная сетка из [9] из 856 вершин и 1708 граней, заданных в некоторой системе координат  $OX_1 X_2 X_3$ . Прежде всего вычисляются объем и положение центра масс астероида:

$$V_{\mathcal{B}} = \mathbf{J}_0 / \rho = 2491.61 \text{ км}^3,$$

$$\overline{OZ} = \mathbf{J}_1 / m_{\mathcal{B}} = (-0.01727478648,$$

$$0.007878044242, 0.04628722113)^T \text{ (км)}.$$

В осях  $ZX_1 X_2 X_3$  компоненты тензора  $\mathbf{J}_2$ , отнесенные к массе астероида, имеют вид (в  $\text{км}^2$ )

**Таблица 1.** Объем (в  $\text{км}^3$ ) и главные центральные моменты инерции, отнесенные к массе астероида (в  $\text{км}^2$ )

Источник	Объем $V$	$I_1/m_{\mathcal{B}}$	$I_2/m_{\mathcal{B}}$	$I_3/m_{\mathcal{B}}$
авторы	2491.61	14.99	72.68	73.88
[10]	2505	15.06	73.31	74.57
[11]	2503	15.56	73.32	74.49

**Таблица 2.** Компоненты тензора  $\mathbf{J}_3/m_{\text{эб}}$  (в км<sup>3</sup>)

$J_{300} = -44.6264$	$J_{021} = -0.2608$	$J_{012} = 0.9234$	$J_{030} = 2.96780$	$J_{102} = 3.3485$
$J_{111} = -0.2643$	$J_{003} = -0.2539$	$J_{201} = 10.2070$	$J_{210} = -69.8072$	$J_{120} = -0.1965$

**Таблица 3.** Компоненты тензора  $\mathbf{J}_4/m_{\text{эб}}$  (в км<sup>4</sup>)

$J_{400} = 8370.3885$	$J_{103} = -2.2374$	$J_{022} = 38.3500$	$J_{040} = 147.0651$	$J_{301} = 3.76816$
$J_{202} = 354.4814$	$J_{004} = 102.7193$	$J_{130} = -17.3855$	$J_{211} = -7.9898$	$J_{310} = 206.3211$
$J_{013} = -0.2309$	$J_{121} = 6.4170$	$J_{031} = -1.5343$	$J_{220} = 558.7348$	$J_{112} = -4.6225$

$$\mathbf{J}_2/m_{\text{эб}} = \begin{pmatrix} 64.2585837604470 & -9.26463627833634 & 0.0392505207944415 \\ -9.26463627833634 & 9.62349923611978 & -0.00710101480803384 \\ 0.0392505207944415 & -0.00710101480803384 & 6.89403948475695 \end{pmatrix}.$$

Единичные, образующие правую тройку, собственные векторы этого тензора в тех же осях имеют вид

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0.986665607279634 \\ -0.162759088215227 \\ 0.000677211089560 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0.162759447739462 \\ 0.986665646266587 \\ -0.000514440360086 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} -0.000584451073391 \\ 0.000617803113233 \\ 0.999999638368063 \end{pmatrix}.$$

Эти векторы задают главные центральные оси инерции, определяющие базис  $Z\xi_1\xi_2\xi_3$ .

Результаты вычислений объема и центральных моментов инерции приведены в первой строке табл. 1. Во второй и третьей строках таблицы приведены аналогичные результаты, полученные ранее другими авторами.

Компоненты тензоров  $\mathbf{J}_3/m_{\text{эб}}$  и  $\mathbf{J}_4/m_{\text{эб}}$ , выписанные в осях  $Z\xi_1\xi_2\xi_3$ , собраны в табл. 2 и 3 соответственно.

**З а м е ч а н и е 1.** Компоненты тензора  $\mathbf{J}_3/m_{\text{эб}}$  обращаются в нуль, как правило, при наличии у тела трех ортогональных плоскостей симметрии. Уже для такого тела, как правильный тетраэдр с равными массами в вершинах, компоненты тензора  $\mathbf{J}_3/m_{\text{эб}}$  отличны от нуля [13].

**З а м е ч а н и е 2.** В теоретической механике и механике космического полета случаи использования слагаемых высокого порядка в разложении потенциала довольно редки, а потому — хорошо

известны (см., например, [5], а также [12, 13]). В то же время в химии и ядерной физике такие разложения не являются редкостью [14, 15].

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

В.И. Никоновым исследования выполнялись в рамках гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований молодых российских ученых-кандидатов и докторов наук (проект № МК-1712.2019.1).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дубошин Г.Н. Теория притяжения. М.: ГИФМЛ, 1961.
2. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1968.
3. Сретенский Л.Н. Теория ньютоновского потенциала. М.—Л.: Гостехиздат, 1946.
4. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника Земли относительно центра масс. М.: Наука, 1965.
5. Архангельский Ю.А. Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977.
6. Dobrovolskis A.R. // Icarus. 1996. V. 124. № 2. P. 698–704.
7. Mirtich B. // J. Graphics Tools. 1996. V. 1. № 2. P. 31–50.
8. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. 9-е изд. М.: Наука, 1965.
9. Thomas P.C., Joseph J., Carcich B., et al. // Icarus. 2002. V. 155. № 1. P. 18–37.
10. Zuber M.T., Smith D.E., Cheng A.F., et al. // Science. 2000. V. 289. P. 2097–2100.
11. Miller J.K., Konopliv A.S., Antreasian P.G., et al. // Icarus. 2002. V. 155. № 1. P. 3–17.

12. Суликашвили Р.С. // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 2. С.286.      14. Зацепина Г.Н. Свойства и структура воды. М.: МГУ, 1974.
13. Суликашвили Р.С. // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 4. С. 582-586.      15. Kielich S. // Acta physica polonica. 1965. V. 27. P. 457–464.

## COMPUTATION OF ATTRACTION POTENTIAL OF ASTEROID (433) EROS WITH ACCURACY UP TO THE TERMS OF THE FOURTH ORDER

A. A. Burov<sup>a,b</sup> and V. I. Nikonov<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup>*Federal Research Center Computing Science and Control of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

<sup>b</sup>*National Research University “Higher School of Economics”, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS Yu.G. Evtushenko

A method for computing the components of Euler–Poinsoot tensors up to the fourth order in the decomposition of the gravitational potential is described. The results are illustrated by the example of the asteroid (433) Eros.

*Keywords:* approximation of the Newtonian potential, asteroid (433) Eros, Euler–Poinsoot tensor