

УДК 534.222

РАЗРУШЕНИЕ СИНГУЛЯРНОСТИ ПРОФИЛЯ СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНОЙ ВОЛНЫ В ДИССИПАТИВНОЙ СРЕДЕ

© 2020 г. Академик РАН О. В. Руденко^{1,2,3,*}

Поступило 07.04.2020 г.

После доработки 07.04.2020 г.

Принято к публикации 08.04.2020 г.

Даны пояснения термина “сильно нелинейная волна”, описана возможная классификация соответствующих математических моделей. Обсуждаются параметры, для которых механические и электромагнитные волны целесообразно называть сильными и отличать их от слабо нелинейных волн, в которых нелинейные эффекты тоже могут быть выражены сильно. Изучены точные “стационарные” решения с особенностями на примере эволюционных уравнений с квадратичной и модульной нелинейностью. Показано, что эти решения в действительности стационарными не являются, поскольку возникающие в них особенности быстро разрушаются из-за проявления нелинейных и диссипативных свойств среды.

Ключевые слова: сильная нелинейность, сингулярность, квадратичная и модульная нелинейность, стационарная волна

DOI: 10.31857/S2686740020030098

Очевидная тенденция в развитии физики нелинейных волн — переход от изучения эффектов слабой (W) к эффектам сильной (S) нелинейности. Это интересно, поскольку, повышая в экспериментах интенсивность волны, можно обнаружить и исследовать новые явления. Кроме того, изучение S-нелинейности важно для решения имеющихся актуальных проблем.

Прежде чем привести примеры конкретных задач, укажем на различное понимание термина S-нелинейность. На наш взгляд, ее нужно отличать от “сильно выраженной W-нелинейности” [1], которая уже много лет является основным объектом изучения в нелинейной акустике, нелинейной оптике и других разделах нелинейной физики.

Например, в акустике изучаются сигналы, для которых отношение приращения давления p' в волне к внутреннему давлению среды $p_0 = c_0^2 \rho_0$ есть малая величина

$$M = \frac{p'}{p_0} \ll 1.$$

Здесь c_0, ρ_0 — скорость звука и плотность среды. У воды, например, $p_0 \sim 23000$ атм. Поэтому для ультразвуковых полей высокой интенсивности порядка $I \sim 10$ Вт/см², наиболее часто используемых в эксперименте, число $M \sim 10^{-4}$ очень мало (см. [2, задачи 2.7–2.10]). Даже у весьма “сильных” одиночных импульсов, применяемых в аппаратах литотрипсии для разрушения почечных камней, давление в фокальной области насыщается на уровне порядка 1500 атм, т.е. $M \sim 0.07$ — нелинейность также слаба. Однако эффекты W-нелинейности могут накапливаться, если волна пробегает значительное расстояние, кратное большому числу (порядка M^{-1}) длин волн. При этом слабая нелинейность приводит к сильно выраженным нелинейным эффектам. Например, гладкая монохроматическая волна может трансформироваться в периодическую пилообразную волну, содержащую сотни гармоник; она, будучи слабой, сильно отличается по форме и спектральному составу от исходной волны.

Накопление может происходить не только в пространстве, но и во времени (например, в добротных резонаторах), и приводить к выраженной W-нелинейности по прошествии большого числа периодов колебаний.

В отличие от W-нелинейных эффектов, в S-волнах число M не является малым, т.е. $M \sim 1$ или даже $M > 1$. Такие значения реализуются при взрывах, а также в некоторых микронеоднородных при-

¹ Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

² Институт общей физики им. А.М. Прохорова Российской академии наук, Москва, Россия

³ Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: rudenko@acs366.phys.msu.ru

родных или искусственных средах типа метаматериалов.

S-нелинейные волны существуют и в других физических системах. Простейший пример – волны на поверхности моря, для которых роль числа M выполняет отношение высоты гребня волны к глубине водоема. S-нелинейной может стать волна цунами при подходе к берегу, а также цунами, вызванное оползнем в мелководной бухте [3].

В последнее время большой интерес привлекают сверхсильные электромагнитные поля, создаваемые петаваттными лазерами [4]. Классическая нелинейная оптика обычно рассматривает лазерные поля, напряженность которых мала по сравнению с полем внутри атома и $M = \frac{E}{E_{AT}} \ll 1$,

где $E_{AT} \sim \frac{e}{r_b^2} \sim 10^{11}$ В/м, r_b – боровский радиус.

В сильно нелинейных волнах поля сравнимы с внутренним полем $E \sim E_{AT}$. Но даже такая волна будет слабой при ее распространении в вакууме. Здесь сильной станет волна с напряженностью поля $E \sim E_{VAC} \sim \frac{m^2 c^3}{e \hbar} \sim 10^{18}$ В/м, в котором могут наблюдаться фундаментальные квантовые эффекты, например, рождение и аннигиляция электрон-позитронных пар.

Подведем итог: если форма (спектр) волны сравнивается со своей исходной формой (спектром) и при этом наблюдается большое различие, можно говорить о сильно выраженной W-нелинейности. Если же поле волны соотносится со значениями этого поля в среде и сравнимо с ним по величине, можно говорить об истинной S-нелинейности.

В статье [1] предложена классификация S-нелинейностей. Напомним, что в физике нелинейных волн чаще работают с W-нелинейностью, для которой “уравнения состояния” раскладываются (фактически по степеням малого M) в обычные степенные или функциональные ряды. Пример –

разложение [2] адиабаты $\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma$ по степеням возмущений плотности ρ' и давления p' в окрестности равновесного состояния (ρ_0, p_0) :

$$\frac{p'}{c_0^2 \rho_0} = \frac{\rho'}{\rho_0} + \frac{\gamma-1}{2} \left(\frac{\rho'}{\rho_0}\right)^2 + \frac{(\gamma-1)(\gamma-2)}{6} \left(\frac{\rho'}{\rho_0}\right)^3 + \dots \quad (1)$$

В нелинейной оптике [5] рассматривают разложение вектора поляризации \mathbf{P} по степеням отношения электрического поля к внутриатомному полю:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} = & \int_0^\infty \hat{\mathbf{k}}(\tau) \mathbf{E}(t-\tau) d\tau + \int_0^\infty \int_0^\infty \hat{\chi}^{(2)}(\tau_1, \tau_2) \mathbf{E}(t-\tau_1) \times \\ & \times \mathbf{E}(t-\tau_1-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \hat{\chi}^{(3)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \times \\ & \times \mathbf{E}(t-\tau_1) \mathbf{E}(t-\tau_1-\tau_2) \times \\ & \times \mathbf{E}(t-\tau_1-\tau_2-\tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\hat{\mathbf{k}}(\tau)$ – тензор линейной поляризуемости, $\hat{\chi}^{(2)}$, $\hat{\chi}^{(3)}$ – тензоры квадратичной и кубической нелинейностей. Аналогичное (2) разложение в функциональный ряд использовал еще Вольтерра в нелинейной теории упругости.

Однако разложением в ряд неудобно пользоваться в трех случаях:

а) когда функциональные связи типа $p(\rho)$ или $\mathbf{P}(\mathbf{E})$ содержат особенности;

б) когда ряды (1), (2) расходятся в сильных полях;

в) когда в разложениях отсутствует линейный член, зато доминирует нелинейность высшего порядка. Приведем примеры таких систем первого, второго и третьего типа.

Системой 1-го типа (есть особенность) является уравнение Бюргерса с модульной ($\alpha \neq 0, \beta = 0$) и (или) квадратично-кубической ($\alpha = 0, \beta \neq 0$) нелинейностью:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \theta} (\alpha |V| + \beta V |V|) + \Gamma \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}. \quad (3)$$

Такие нелинейности встречаются во многих природных средах и метаматериалах [6]. Обратим внимание, что эффекты нелинейности не исчезают при $V \rightarrow 0$, т.е. здесь нет перехода к линейной задаче.

Примером системы 2-го типа служит уравнение Ирншоу, описывающее (по Лагранжу) одномерное движение сжимаемой среды [2, (1.1)]:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c_0^2 \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^{-(\gamma+1)} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (4)$$

Здесь ξ – смещение частиц сплошной среды. Приближение W-нелинейности соответствует малым деформациям $\left(\left|\frac{\partial \xi}{\partial x}\right| \ll 1\right)$. При больших отрицательных деформациях $\frac{\partial \xi}{\partial x} < -1$ среда разрывается; это – проявление S-нелинейности. Если исходный сигнал гладкий, но усиливается, например, благодаря фокусировке, сингулярность может сформироваться при распространении волны. Аналогичное явление в жидкости называют кавитацией.

Примером системы 3-го типа служит уравнение

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{\beta \partial^2 \zeta^3}{3 \partial x^2}, \quad \zeta = \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (5)$$

Оно описывает поперечные волны в системах со связями, а ранее использовалось Гейзенбергом в модели нелинейной теории поля [7].

Однако явления, связанные с S-нелинейностью, формально имеют место и в моделях, которые были получены при рассмотрении обычных W-нелинейных систем. Их изучение представляет интерес как с точки зрения математической физики, так и для анализа динамики формирования и разрушения сингулярностей различной природы.

Нетрудно проверить, что обычное уравнение Бюргера (см., например, в обозначениях задача [2]):

$$\frac{\partial V}{\partial z} = V \frac{\partial V}{\partial \theta} + \Gamma \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \quad (6)$$

имеет точные решения с особенностями. Вот некоторые из них:

$$V = \frac{2\Gamma}{\theta - \theta_0}, \quad V = \operatorname{ctg} \left(\frac{\theta - \theta_0}{2\Gamma} \right). \quad (7)$$

Первое решение (7) содержит единичную сингулярность в точке $\theta = \theta_0$. У второго решения (7) особенности расположены периодически при $\theta = \theta_0 + \pi l$. Оба эти выражения не зависят от переменной z . Если придать решениям (7) физический смысл, сопоставив им бегущие волны, то эти волны, казалось бы, можно назвать стационарными. Это означает, что профили волн не изменяются при распространении (с увеличением расстояния z) благодаря тому, что конкурирующие между собой нелинейные и диссипативные эффекты уравновешивают друг друга. Существуют решения, которые не только содержат особенность, но и не являются ограниченными при $|\theta| \rightarrow \infty$ и зависят от расстояния z . Пример:

$$V = \frac{2\Gamma}{\theta - \theta_0} - \frac{\theta - \theta_0}{z - z_0}. \quad (8)$$

Существуют и другие подобные решения, которые практически не исследовались из-за их неясного физического содержания.

Возникает очевидный вопрос об устойчивости этих решений. В общем случае наиболее простой и очевидный путь – добавить к точному решению малое возмущение, например,

$$V = \frac{2\Gamma}{\theta} + V'. \quad (9)$$

Затем нужно линеаризовать уравнение относительно возмущения V' :

$$\frac{\partial V'}{\partial z} = 2\Gamma \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{V'}{\theta} \right) + \Gamma \frac{\partial^2 V'}{\partial \theta^2}. \quad (10)$$

Решив (10), можно проследить за динамикой возмущения и понять, устойчиво ли изучаемое стационарное решение или нет. Однако этот приближенный подход не описывает полностью картину эволюции стационарной волны с особенностью. К счастью, уравнение (6) является исключительным; оно может быть решено точно, что позволяет полностью описать процесс разрушения сингулярности. Как показано ниже, “стационарные” волны (7) таковы-ми вовсе не являются.

Точное решение уравнения (6) для исходной (при $z = 0$) формы волны

$$V(z = 0, \theta) = V_0(\theta) \quad (11)$$

имеет вид [2]

$$V = 2\Gamma \frac{\partial}{\partial \theta} \ln \int_{-\infty}^{\infty} G(z, \theta - \theta') \exp \left(\frac{1}{2\Gamma} \tilde{V}_0(\theta') \right) d\theta'. \quad (12)$$

Здесь \tilde{V}_0 – первообразная функции V_0 (7), а G – функция Грина:

$$G(z, \theta) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\Gamma z}} \exp \left(-\frac{\theta^2}{4\Gamma z} \right). \quad (13)$$

Для исходной “стационарной” формы

$$V_0(\theta) = \frac{2\Gamma}{\theta}, \quad (14)$$

согласно (12), нужно вычислить интеграл

$$V = 2\Gamma \frac{\partial}{\partial \theta} \ln \int_{-\infty}^{\infty} |\theta'| G(z, \theta - \theta') d\theta'. \quad (15)$$

Решение получается таким:

$$V = \sqrt{\frac{\pi\Gamma}{z}} \frac{\operatorname{erf}(\xi)}{\exp(-\xi^2) + \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\xi)}, \quad \xi = \frac{\theta}{4\Gamma z}. \quad (16)$$

Здесь $\operatorname{erf}(\xi)$ – интеграл вероятности [8].

Форма профиля на различных пройденных волной расстояниях (для разных значений параметра $\sqrt{4\Gamma z}$) изображена на рис. 1. Штриховая кривая – это исходная форма (14).

Видно, что особенность в точке $\theta = 0$ исчезает, причем возмущение (разность между исходной и текущей формами профиля) в окрестности особенности не может считаться ни малой, ни медленно изменяющейся. Волна (14), формально являющаяся точным решением уравнения (6), в действительности стационарной не является и эволюционирует так, как показано на рис. 1. Уже на малых расстояниях форма волны описывается решением (16), имеющим автомодельную форму.

Заметим, что автомодельные решения уравнений типа Бюргера для волн плоской и цилин-

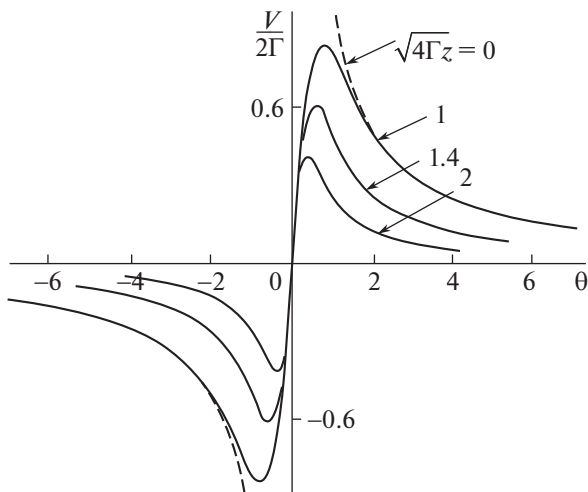


Рис. 1. Процесс разрушения сингулярности при распространении “стационарной” волны (14) в нелинейной диссипативной среде.

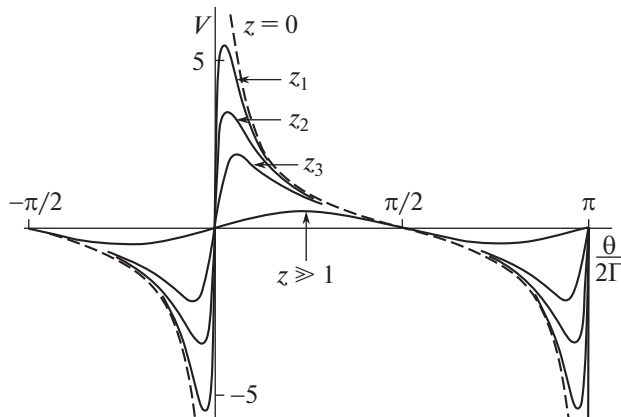


Рис. 2. Разрушение периодических сингулярностей при распространении “стационарной” волны (20) (штриховая кривая $z = 0$) в нелинейной диссипативной среде и превращение ее в гармонический сигнал (кривая $z \geq 1$).

дрической симметрий найдены в работе [9]. Они приведены в справочнике [10]. Подобные решения для сред с квадратично-кубичной нелинейностью (3), допускающих существование ударных волн разрежения, изучены в работе [11].

Перейдем теперь ко второму “стационарному” решению (7), положив в нем для простоты $\theta_0 = 0$. Для него аналог формулы (15) будет таким:

$$V = 2\Gamma \frac{\partial}{\partial \theta} \ln \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sin \frac{\theta'}{2\Gamma} \right| G(z, \theta - \theta') d\theta'. \quad (17)$$

При вычислении удобно использовать разложение модуля под интегралом (17) в ряд Фурье. Результат таков:

$$V = 2\Gamma \frac{\partial}{\partial \theta} \ln \left\{ 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\theta}{\Gamma}\right)}{(2n-1)(2n+1)} \exp\left(-n^2 \frac{\theta}{\Gamma}\right) \right\}. \quad (18)$$

При $z = 0$ ряд в формуле (18) суммируется (см. [8, задача 5.4.5 (1)]):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\theta}{\Gamma}\right)}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \sin\left(\frac{n\theta}{2\Gamma}\right). \quad (19)$$

Подставляя (19) в (18), приходим к правильному выражению

$$V = V_0 = \text{ctg}\left(\frac{\theta}{2\Gamma}\right). \quad (20)$$

В другом предельном случае $z \gg 1$ преобладающим становится первый член ряда, и решение принимает вид затухающей гармонической волны:

$$V = \frac{4}{3} \exp\left(-\frac{z}{\Gamma}\right) \sin\left(\frac{\theta}{\Gamma}\right). \quad (21)$$

В промежуточной области расстояний волна содержит набор основной и высших гармоник. Ее профиль при различных z , $0 < z_1 < z_2 < z_3 < \infty$, изображен на рис. 2. Как и для предыдущего случая (14), сингулярности в периодической “стационарной” волне быстро разрушаются при ее распространении через нелинейную диссипативную среду.

Заметим, что наличие источников энергии, усиливающих волну, может привести к обратному эффекту [12]. Исходная волна с гладким профилем искажается, в ней образуются ударные фронты. Затем, по мере усиления, фронты становятся более крутыми, “скачок” возмущения на фронте увеличивается и происходит “катастрофа” – образование сингулярности.

Решения с особенностями имеет не только уравнение (6), но и другие точно решаемые модели, например, (3). На рис. 3 изображен процесс столкновения двух импульсных сигналов одинаковой формы, но разной полярности, в среде с модульной нелинейностью (уравнение (3) для значений $\alpha = 1$, $\beta = 0$) и слабой диссипацией ($\Gamma \ll 1$). Вначале положительный и отрицательный сигналы движутся навстречу друг другу, никак не взаимодействуя между собой (кривая 1). Взаимодействие начинается в момент их столкновения (кривая 2). Затем сигналы пересекаются; при этом происходит их взаимное поглощение (кривые 3–6). Особенность исчезает, а на ее месте появляется крутой фронт, как для квадратично-нелинейных волн на рис. 1 и рис. 2. В дальнейшем происходит “аннигиляция” импульсов – их исчезновение на конечном расстоянии.

Решения с сингулярностями имеют и другие известные нелинейные уравнения, например уравнение Кортевега-де Вриза, по форме аналогичное

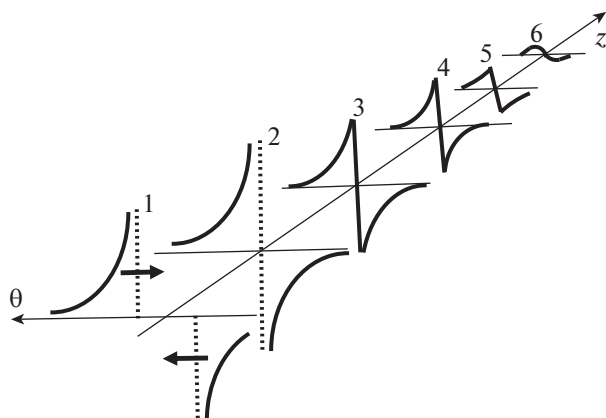


Рис. 3. Взаимное разрушение двух сингулярностей при распространении импульсов разной поляризации в “модульной” среде, их взаимное поглощение и аннигиляция.

уравнению Бюргерса (6), но содержащее третью производную вместо второй. Одно из его решений

$$V = -\frac{12\Gamma}{(\theta - \theta_0)^2} \quad (22)$$

также имеет “стационарную” форму, однако процесс его разрушения более сложен и в данном сообщении не описан.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа поддержана грантом Российского научного фонда (проект 19–12–00098).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Руденко О.В. О сильно нелинейных волнах и волнах с сильно выраженной слабой нелинейностью /

В кн.: Нелинейные волны. 2012. С. 83–97. Н.Новгород: ИПФ РАН, 2013. 464 с.

2. Руденко О.В., Гурбатов С.Н., Хедберг К.М. Нелинейная акустика в задачах и примерах. М.: Физматлит, 2007. 176 с.
3. Пелиновский Е.Н. Гидродинамика волн цунами. Н.Новгород: Изд. ИПФ РАН, 1996. 276 с.
4. Хазанов Е.А., Сергеев А.М. Петаваттные лазеры на основе оптических параметрических усилителей: состояние и перспективы // УФН. 2008. Т. 178. № 4. С. 1006–1011.
5. Akhmanov S.A., Khokhlov R.V. Problems of Nonlinear Optics. NY: Gordon and Breach, 1972. 294 p.
6. Руденко О.В. “Экзотические” модели физики интенсивных волн: линеаризуемые уравнения, точно решаемые задачи и неаналитические нелинейности // Прикл. нелиней. динамика. 2018. Т. 26. № 3. С. 7–34.
7. Heisenberg W. Zur Quantisierung nichtlinearer Gleichungen // Nachr. Acad. Wiss. Goettingen. 1953. V. 11a. № 8. P. 111–127.
8. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 800 с.
9. Руденко О.В., Солуян С.И. Некоторые нестационарные задачи теории волн конечной амплитуды в диссипативных средах // ДАН. 1970. Т. 190. № 4. С. 815–818.
10. Полянин А.Д., Вязьмин А.В., Журов А.И., Казенин Д.А. Справочник по точным решениям уравнений тепло и массопереноса. М.: Факториал, 1998. 368 с.
11. Руденко О.В., Гусев В.А. Автомодельные решения уравнения типа Бюргерса с квадратично-кубической нелинейностью // ДАН. 2016. Т. 466. № 1. С. 25–29.
12. Нефедов Н.Н., Руденко О.В. О движении фронта в уравнении типа Бюргерса с квадратичной и модульной нелинейностью при нелинейном усилении // ДАН. 2018. Т. 478. № 3. С. 274–279.

DESTRUCTION OF THE SINGULARITY OF A STRONGLY NONLINEAR WAVE PROFILE IN A DISSIPATIVE MEDIUM

Academician of the RAS O.V. Rudenko^{a,b,c}

^a Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

^b Prokhorov General Physics Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

^c Institute of the Earth Physics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

Explanation of the term “strongly nonlinear wave” is given, and a possible classification of the corresponding mathematical models is described. Parameters are discussed for which it is advisable to call mechanical and electromagnetic waves “strong” and distinguish them from weakly nonlinear waves, in which nonlinear effects can also be strongly expressed. Exact “stationary” solutions with singularities are studied on the example of evolution equations with quadratic and modular nonlinearities. It is shown that these solutions are in fact not stationary, since the singularities arising in them are rapidly destroyed due to the manifestation of nonlinear and dissipative properties of the medium.

Keywords: strong nonlinearity, singularity, quadratic and modular nonlinearity, stationary wave