ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2020, том 493, с. 48–50

МЕХАНИКА

УДК 531.45:531.46

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛА ДЖЕЛЛЕТТА ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ КАЧЕНИЯ

© 2020 г. А. В. Борисов[1], А. П. Иванов[1,*]

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 18.02.2020 г.
Поступило 17.04.2020 г.
После доработки 17.04.2020 г.
Принято к публикации 28.04.2020 г.

В “Трактате по теории трения” Джеллетт рассмотрел задачу о подъеме оси симметричного волчка со сферической пяткой, движущегося по шероховатой горизонтальной плоскости. Ключом к решению стал найденный Джеллеттом первый интеграл, вид которого инвариантен характеру силы трения в опоре: скалярное произведение кинетического момента на радиус-вектор точки контакта постоянно. Исследуются возможности обобщения этого подхода на случай, когда к силе трения добавляется момент трения качения.

Ключевые слова: трение качения, интеграл Джеллетта, шар Чаплыгина

DOI: 10.31857/S2686740020040045

1. СЛУЧАЙ ШАРА ЧАПЛЫГИНА

Вначале допустим, что тело ограничено сферой, причем его центр масс совпадает с геометрическим центром, а главные центральные моменты инерции J_j $(j = 1,2,3)$ различны. Так как тело не динамически симметрично, допущения Джеллетта [1] не выполнены. Однако упомянутый интеграл имеет место, так как он пропорционален интегралу площадей (проекции кинетического момента на вертикаль сохраняется, так как момент силы трения горизонтален). В данной системе имеются бездиссипативные движения, для которых центр шара движется равномерно и прямолинейно, скольжение отсутствует, а одна из главных центральных осей инерции составляет постоянный угол с вертикалью [2, 3].

В реальных условиях диссипацией сопровождаются любые движения, и тело приходит к состоянию покоя. Вообще говоря, при относительном движении контактирующих твердых тел происходят необратимые деформации. Они максимальны при скольжении и минимальны при верчении, а качение занимает промежуточную позицию. Поэтому имеет смысл рассматривать финальные движения, пренебрегая трением верчения.

Законы трения в общем случае не установлены, хотя имеется ряд моделей, подтвержденных экспериментами [4–9]. По аналогии с исследованиями Джеллетта, особый интерес вызывают результаты, инвариантные закону трения.

Добавим в систему момент трения качения, не конкретизируя его свойств, помимо диссипативности. Тогда понятно, что в системе имеются лишь три простейших стационарных движения, для которых одна из главных центральных осей инерции вертикальна [10]. Исследуем их, используя модифицированный метод Рауса [11, 12].

Считая массу тела единичной, запишем теоремы об изменении импульса и момента импульса в неподвижной системе отсчета $OXYZ$, ось аппликат которой направлена вертикально вверх и имеет орт γ:

$$\dot{v}_G = R + P, \quad \dot{K}_G = r_C \times R + M, \quad r_C = GC, \tag{1}$$

где R – реакция плоскости, приложенная в точке C, M – горизонтальный момент трения качения. Поскольку перемещение центра масс вдоль вертикали отсутствует, вес тела P уравновешивается нормальной составляющей реакции, и актуальна лишь ее касательная составляющая, т.е. сила трения F. Интеграл Джеллетта, полученный для случая $M = 0$, имеет вид

$$I = (K_G, r_C) = k = \text{const}. \tag{2}$$

Механический смысл: проекция кинетического момента на вертикаль сохраняется. Покажем, что это справедливо и при произвольном горизонтальном моменте трения. Действительно, в рас-

[1]*Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия*
**E-mail: a-p-ivanov@inbox.ru*

сматриваемом случае $r_C = -\rho\gamma = \mathrm{const}$ (ρ — радиус шара), поэтому

$$\frac{d\left(K_G, r_C\right)}{dt} = (\gamma \times R + M, \gamma)\rho^2 \equiv 0. \tag{3}$$

Заметим, что аналогичный вывод был получен в [14].

Требование диссипативности означает, что полная механическая энергия E при движении по инерции не возрастает. Поскольку потенциальная энергия не меняется, имеем формулу

$$E = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\left(K_G, \omega\right), \quad K_G = J\omega, \tag{4}$$

где v — скорость центра шара, ω — его угловая скорость в связанной системе, $J = \mathrm{diag}\{J_1, J_2, J_3\}$ — тензор инерции. Эффективный потенциал определяется так [11]:

$$\Pi(\gamma) = \min_{v,\omega} E(v\omega)\Big|_{I=k}. \tag{5}$$

Очевидно, что в точках минимума $v = 0$, а для нахождения ω составим функцию Лагранжа

$$\begin{aligned} L &= E(0,\omega) - \lambda(I - k) = \\ &= \frac{1}{2}(J\omega, \omega) + \lambda\left(\rho(J\omega, \gamma) + k\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Условия экстремума функции (6) имеют вид

$$J\omega + \lambda\rho J\gamma = 0, \quad \rho(J\omega, \gamma) + k = 0.$$

Отсюда следует, что вектор угловой скорости необходимо вертикален:

$$\omega = -\lambda\rho\gamma, \quad \lambda = \frac{k}{\rho^2(J\gamma, \gamma)}.$$

Подставляя данное выражение в формулу (5), получаем

$$\Pi(\gamma) = \frac{1}{2}\frac{k^2}{\rho^2(J\gamma, \gamma)}. \tag{7}$$

Функция (7) достигает минимума при вращении вокруг оси наибольшего момента инерции, что соответствует устойчивому финальному движению шара. Два других вращения также возможны, но они неустойчивы.

2. “КИТАЙСКИЙ ВОЛЧОК”

Перейдем к обсуждению другого сферического тела:

$$J_1 = J_2 \neq J_3,$$

причем центр масс лежит на оси симметрии на расстоянии $a \in (0, \rho)$ от геометрического центра O. Именно необычное поведение такого волчка — стремление занять положение с наибольшей потенциальной энергией — инициировало исследования Джеллетта и открытие интеграла (2). В этом случае

$$r_C = -\rho\gamma + ae_3,$$

где e_3 — орт оси GO, и вместо формулы (3) получаем

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \left((-\rho\gamma + ae_3) \times R + M, -\rho\gamma + ae_3\right) + \\ &+ \left(J\omega, a\frac{de_3}{dt}\right) = \left(M, -\rho\gamma + ae_3\right) + \left(J\omega, a\omega \times e_3\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Поскольку

$$J\omega = J_1\omega + (J_3 - J_1)\omega_3 e_3,$$

то последнее слагаемое в формуле (8) равно нулю. Если $M = 0$, то получаем классическую формулу (2). Однако в общем случае, когда $(M, r_C) \neq 0$, величина I уже не будет сохраняться. Вместо нее введем другую функцию:

$$I' = \left(K_G, r_C - \beta\gamma\right), \tag{9}$$

и выясним, будет ли она первым интегралом для какого-то закона трения качения. По аналогии с (8) имеем

$$\frac{dI'}{dt} = \left(M, -\rho\gamma + ae_3 - \beta\gamma\right) + \left((-\rho\gamma + ae_3) \times R, -\beta\gamma\right).$$

Поскольку вектор M горизонтален, данная формула принимает вид

$$\frac{dI'}{dt} = \left(M - \beta R \times \gamma, ae_3\right). \tag{10}$$

Соединяя формулы (9) и (10), приходим к такому утверждению.

П р е д л о ж е н и е. *Если момент трения качения выражается формулой*

$$M = \beta R \times \gamma, \quad \beta > 0, \tag{11}$$

то величина (9) — *первый интеграл системы* (1).

Формулу (11) можно пояснить тем, что при качении тела возникает проскальзывание в направлении, перпендикулярном угловой скорости качения, что и вызывает трение скольжения.

З а м е ч а н и е. Сравнивая выражения (2) и (9), заметим, что формально величину I' можно получить из I заменой $\rho \to \rho + \beta$.

Данное обстоятельство дает возможность провести качественный анализ волчка на плоскости с произвольным законом трения скольжения и согласованным с ним трением качения (11) на основе результатов работ [11–13, 15], где применялся модифицированный метод Рауса. На плоскости параметров волчка a/ρ и J_1/J_3 были построены области с различными диаграммами Смейла в плоскости E, I. При учете сделанного замечания те же самые диаграммы в плоскости E, I' будут соответствовать аналогичным областям для параметров $a/(\rho + \beta)$ и J_1/J_3. При переходе к исходным переменным произойдет линейное сжатие вдоль оси абсцисс с коэффициентом $\rho/(\rho + \beta)$. Это означает, что изображающая точка сместится влево и может попасть в область, соответствующую другой диаграмме. В результате условия переворота волчка изменятся.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы 5-100 и Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 18-01-00335, 18-29-10051).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Jellett J.H.* A treatise on the theory of friction. Dublin; London: McMillan, 1872.
2. *Borisov A.V., Kilin A.A., Mamaev I.S.* How to Control the Chaplygin Ball Using Rotors. II // Regular and Chaotic Dynamics. 2013. V. 18. № 1–2. P. 144–158.
3. *Овсянников И.И.* Об устойчивости движения шара Чаплыгина на плоскости с произвольным законом трения // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2012. В. 4. С. 140–145.
4. *Контенсу П.* Связь между трением скольжения и трением верчения и ее учет в теории волчка / Проблемы гироскопии. М.: Мир. 1967. С. 60–77.
5. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* О динамике волчка Томсона (тип-топ) на плоскости с реальным сухим трением // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 6. С. 157–168.
6. *Карапетян А.В.* Двухпараметрическая модель трения и ее свойства // ПММ. 2009. Т. 73. В. 4. С. 515–519.
7. *Киреенков А.А.* Связанная модель трения скольжения и верчения // ДАН. 2011. Т. 441. № 6. С. 750–755.
8. *Иванов А.П.* О трении качения // ДАН. 2019. Т. 485. № 3. С. 295–299.
9. *Ivanov A.P.* On the Equilibrium of Magic Stones // Mechanics of Solids. 2018. V. 53. № 2. P. 26–31.
10. *Gallop E.G.* On the Rise of a Spinning Top // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1904. V. 19. № 3. P. 356–373.
11. *Карапетян А.В.* Первые интегралы, инвариантные множества и бифуркации в диссипативных системах // Регул. хаот. дин. 1997. Т. 2. № 1. С. 75–80.
12. *Ciocci M.C., Langerock B.* Dynamics of the Tippe Top via Routhian Reduction // Regul. Chaotic Dyn. 2007. V. 12. № 6. P. 602–614.
13. *Карапетян А.В.* Глобальный качественный анализ динамики китайского волчка (тип-топ) // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 3. С. 33–41.
14. The Influence of the Rolling Resistance Model on Tippe Top Inversion, A.A. Kilin, E.N. Pivovarova. arXiv preprint arXiv:2002.06335, 2020 – arxiv.org.
15. *Ciocci M.C., Malengier B., Langerock B., et al.* Towards a Prototype of a Spherical TippeTop // J. Appl. Math. 2012. Art. ID 268537.

ADAPTATION OF JELLETT INTEGRAL TO THE CASE OF ROLLING FRICTION

A. V. Borisov[a] and A. P. Ivanov[a]

[a] *Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Moscow Region, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

In his book “A treatise on the theory of friction”, Jellett considered the problem of tippe-top overturn on a rough base. A key to the solution was a first integral of motion, which is invariant to law of friction; the dot product of the kinetic moment and the radius-vector of the point of contact is constant. We study possibilities of generalization of this approach to a case where the friction force is complemented by a moment of rolling friction.

Keywords: rolling friction, Jellett integral, Chaplygin’s sphere