ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2020, том 493, с. 18–22

ФИЗИКА

УДК 534.231.2

О ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ РИМАНОВОЙ ВОЛНЫ И ИНТЕГРАЛА ОТ НЕЕ

© 2020 г. С. Н. Гурбатов[1,*], Е. Н. Пелиновский[2,3,4,**]

Представлено академиком РАН Е.А. Кузнецовым 23.04.2020 г.
Поступило 25.04.2020 г.
После доработки 30.04.2020 г.
Принято к публикации 30.04.2020 г.

Исследуются статистические характеристики римановой волны и интеграла от нее. Такие задачи возникают в физике распространения фронтов, в частности, при накате водяного вала на берег, фронта пламени и фазовых поверхностей. С использованием связи лагранжева и эйлерова статистического описания получены общие выражения для вероятностных распределений скорости движения фронта и его смещения. Показано, что для нахождения вероятностного распределения смещения необходимо знать совместное вероятностное распределение смещения, скорости и ускорения на входе нелинейной среды. С использованием идеи о вероятности как времени нахождения сигнала в определенном интервале рассчитаны характеристики волн после обрушения.

Ключевые слова: нелинейные волны в недиспергирующих средах, уравнение Римана, уравнение Кардара–Паризи–Жанга, вероятностные характеристики нелинейных волн

DOI: 10.31857/S2686740020040070

Динамика случайных римановых волн хорошо изучена во многих средах, особенно в нелинейной акустике, см., например, [1–3]. В то же время в ряде задач возникает необходимость изучения случайных характеристик интегралов от римановых волн. В частности, в проблеме наката морских волн на берег риманово решение описывает скорость переднего фронта водяного вала, а интеграл от нее есть смещение уреза воды, определяющее границы зоны затопления [4–7]. В задачах описания расширяющихся поверхностей (фазовые фронты в геометрической оптике, фронт пламени и т.д.) скорость распространения фронтов также описывается римановой волной, а фаза – интегралом от нее; здесь популярной моделью является уравнение Кардара–Паризи–Жанга (KPZ) [8–10]. В космологии при описании крупномасштабной структуры Вселенной широко известно приближение Зельдовича, которое описывает начальную нелинейную стадию гравитационной неустойчивости. При этом движение частиц сводится в соответствующих переменных к уравнению Римана, и эволюция полей скорости и потенциала эквивалентна эволюции оптической волны за фазовым экраном [11, 12]. Фактически, вероятностные распределения интегралов от римановых волн еще не изучались. Здесь мы получим формулы, описывающие вероятность распределения интеграла от римановой волны, включая начальную стадию обрушения волны (так называемую градиентную катастрофу).

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнения, описывающие римановы волны и интегралы от них, можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2, \quad \frac{\partial r}{\partial x} - u\frac{\partial r}{\partial t} = -\frac{1}{2}u^2, \qquad (2)$$

где для определенности будем называть величину u скоростью, а r – смещением. Переменные t и x играют роль времени и координаты.

Решения гиперболической системы (1), (2) находится в виде неявных функций:

[1] *Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия*
[2] *Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева, Нижний Новгород, Россия*
[3] *Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия*
[4] *Институт прикладной физики Российской академии наук, Нижний Новгород, Россия*
**E-mail: gurbatov.sergey@gmail.com*
***E-mail: pelinovsky@gmail.com*

$$U(\tau, x) = U_0(\tau),$$
$$R(\tau, x) = R_0(\tau) - \frac{x}{2}U_0^2(\tau), \quad t = \tau - xU_0(\tau), \tag{3}$$

где $R_0(t) = r(t, x = 0)$ и $U_0(t) = u(t, x = 0)$ описывают характеристики волнового поля на входе среды ($x = 0$). Это так называемое лагранжево описание отдельной точки профиля волны (частицы). Для перехода от лагранжева описания (3) к эйлерову необходимо найти функцию $\tau = \tau_*(t, x)$ из последнего уравнения (3). Тогда волновое поле в эйлеровом представлении будет следующим образом выражаться через лагранжево поле:

$$u(t, x) = U_0[\tau_*(t, x)],$$
$$r(t, x) = R_0[\tau_*(t, x)] - \frac{x}{2}U_0^2[\tau_*(t, \xi)]. \tag{4}$$

Для однозначности поля в эйлеровом представлении необходима единственность перехода от t к τ, что эквивалентно положительности якобиана преобразования

$$J(\tau, x) = 1 - x\frac{dU_0}{d\tau} > 0, \quad a_0(\tau) = \frac{dU_0}{d\tau}, \tag{5}$$

где мы ввели еще одну переменную (a), имеющую смысл ускорения.

2. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИНТЕГРАЛА ОТ РИМАНОВОЙ ВОЛНЫ

Ниже будут получены вероятностные распределения характеристик нелинейных волн, когда начальные возмущения являются случайными функциями. Для анализа полей в эйлеровом представлении на фиксированном расстоянии от входа необходимо знать, как связаны между собой эйлерово и лагранжево статистические описания. Для установления связи этих двух подходов необходимо вводить дополнительную переменную — якобиан преобразования (5). При статистическом описании удобно использовать формализм представления вероятностного распределения с использованием дельта-функций. Будем предполагать, что статистические свойства волнового поля на входе нелинейной среды ($x = 0$) известны, и считать, что волновое поле на входе есть стационарный случайный процесс с известной плотностью вероятности трех переменных — смещения, скорости и ускорения:

$$w_{0,r,u,a}(R, U, A) = \langle \delta[R - R_0(\tau)]\delta[U - U_0(\tau)] \times$$
$$\times \delta[A - a_0(\tau)] \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\alpha - R)\delta(\beta - U) \times \tag{6}$$
$$\times \delta(\chi - A) w_{0,r,u,a}(\alpha, \beta, \chi) d\alpha d\beta d\chi,$$

где $\langle \ldots \rangle$ означают скобки статистического усреднения. В лагранжевом представлении двумерная плотность вероятности смещения и скорости находится из (6):

$$w_{lag}(r, u; \tau, x) =$$
$$= \left\langle \delta\left[R_0(\tau) - \frac{1}{2}u_0^2(\tau)x - r\right]\delta\left[u_0(\tau) - u\right]\right\rangle = \tag{7}$$
$$= w_{0,r,u}\left(r + \frac{u^2 x}{2}, u\right).$$

Для нахождения вероятностного распределения в эйлеровом представлении нужна лагранжева плотность вероятности четырех переменных — t, r, u, j:

$$w_{Lagr}(t, r, u, j; \tau, x) = \delta(\tau - t - xu) \times$$
$$\times \left\langle \delta\left[r - R_0(\tau) + \frac{x}{2}U_0^2(\tau)\right] \times \right.$$
$$\left. \times \delta[u - U_0(\tau)]\delta[j - 1 + xa_0(\tau)] \right\rangle = \tag{8}$$
$$= \frac{1}{x}\delta(\tau - t - xu) w_{0,r,u,a}\left(r + \frac{x}{2}u^2, u, \frac{1-j}{x}\right),$$

где использовано фильтрующее свойство дельта-функций $\delta[u - U_0(\tau)]$, и $\delta[j - 1 + xa_0(\tau)] = \frac{1}{x}\delta\left[a_0 - \frac{1-j}{x}\right]$. Для нахождения эйлеровой совместной плотности вероятности смещения и скорости необходимо проинтегрировать (8) по τ и j, тогда получим

$$w_{eul}(r, u; t, x) = w_{0,r,u}\left(r + \frac{x}{2}u^2, u; t + xu\right) -$$
$$- x\int_{-\infty}^{+\infty} w_{0,r,u,a}\left(r + \frac{x}{2}u^2, u, a; t + xu\right) da. \tag{9}$$

Здесь первое слагаемое есть лагранжева плотность вероятности. Наконец, проинтегрировав (9) по переменной r, мы получим вероятностное распределение поля скорости. Для стационарного процесса плотность вероятности скорости сохраняется: $W(u, \xi) = W(u, 0)$, так как уширение отдельных участков римановой волны компенсируется сжатием других [3, 13].

Для вероятностного распределения смещения из (9) после интегрирования по u имеем

$$w_{eul}(r; x) = \int_{-\infty}^{+\infty} w_{0,r,u}\left(r + \frac{x}{2}u^2, u\right) du -$$
$$- x\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} w_{0,r,u,a}\left(r + \frac{x}{2}u^2, u, a\right) a da du. \tag{10}$$

Из (10) следует, что первое слагаемое совпадает с лагранжевой плотностью вероятности $w_{Lag}(r; \xi)$. Второе слагаемое описывает отличие лагранжевой плотности вероятности от эйлеровой, а именно, относительно больший вклад от расширяющихся участков профиля в эйлерову плотность вероятности.

3. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НА СТАДИИ ОБРУШЕНИЯ

Полученные выше выражения для плотности вероятности смещения и скорости написаны в предположении, что профиль волны во всех реализациях всюду однозначен. В работе [7] была предложена модель начального распределения, когда это условие выполняется на конечных трассах, и получены вероятностные распределения смещения для узкополосного начального возмущения. Однако если начальное поле имеет гауссову статистику, то формально неоднозначности риманова решения возникают при сколь угодно малых расстояниях. Тем не менее, полученные выше формулы можно использовать и в этом случае, если учесть, что для эргодических процессов плотность вероятности смещения $w(r,\xi)$ совпадает с относительным временем пребывания процесса $r(t)$ в интервале $(r,\ r + dr)$ [3]. Формально, относительное время пребывания можно ввести и для многозначных процессов, хотя нельзя ввести строго понятие плотности вероятности. В дальнейшем полученные ниже выражения для плотности вероятности гауссова процесса будем называть по-прежнему плотностью вероятности. Физически же они описывают именно относительное время пребывания.

Приведем ниже вид вероятностного распределения характеристик смещения при гауссовой входной статистике. В этом случае начальное распределение распадается на произведение

$$w_{0,R,U,a}(R,U,a) = w_{0,U}(U)w_{0,R,a}(R,a), \tag{11}$$

которые полностью определяются дисперсией начального смещения (σ_{R_0}), скорости (σ_{U_0}) и ускорения (σ_{a_0}) соответственно. Подставляя эти формулы в (10), находим эйлерово вероятностное распределение смещения. В безразмерных переменных

$$\varphi = \frac{R}{\sigma_{R_0}}, \quad v = \frac{U}{\sigma_{U_0}}, \quad l = \frac{x}{L_{nel}}, \tag{12}$$

где $L_{nel} = \dfrac{\sigma_{R_0}}{\sigma_{U_0}^2}$ — характерное “расстояние” проявления нелинейных эффектов, эйлерова плотность вероятности смещения приобретает вид

$$w_{eul}(\varphi,l) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{v^2}{2}\right)\times$$
$$\times\exp\left[-\frac{\left(\varphi+\frac{lv^2}{2}\right)^2}{2}\right]\left[1+l\left(\varphi+\frac{lv^2}{2}\right)\right]dv, \tag{13}$$

и следующим образом выражается через лагранжеву плотность вероятности:

$$w_{eul}(\varphi,l) = w_{Lag}(\varphi,l) - l\frac{\partial w_{Lag}}{\partial\varphi}, \tag{14}$$

$$w_{Lag}(\varphi,l) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{v^2}{2}\right)\exp\left[-\frac{\left(\varphi+\frac{lv^2}{2}\right)^2}{2}\right]dv. \tag{15}$$

Отметим, что в эту формулу для гауссова входного распределения не вошла дисперсия ускорения. Из этих выражений очевидно, что нормировка на единицу как лагранжевой, так и эйлеровой плотности вероятности сохраняется. При этом из (13), (15) следует, что сдвиги средних значений лагранжевой и эйлеровой плотностей вероятности потенциала имеют разные знаки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi w_{Lag}(\varphi,l)d\varphi = -\frac{l}{2}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi w_{eul}(\varphi,l)d\varphi = \frac{l}{2}. \tag{16}$$

На рис. 1 приведены графики лагранжева и эйлерова распределений, построенных по формулам (14) и (15) при $l = 0$ и 1. Из рисунка видно, что лагранжево и эйлерово вероятностные распределения сдвигаются в разные стороны с увели-

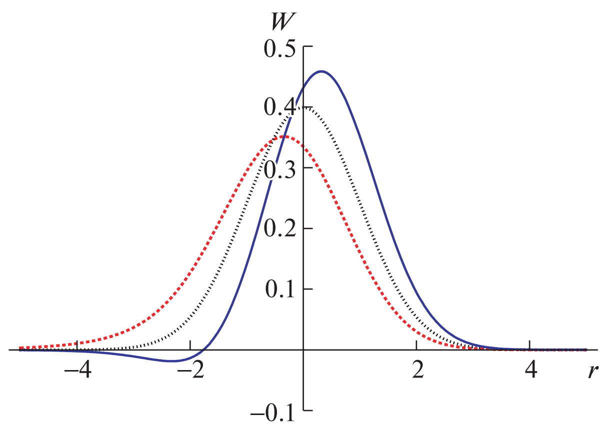

Рис. 1. Плотность вероятности смещения (интеграла от римановой волны); распределение на входе в нелинейную среду (точки), лагранжева (пунктирная линия) и эйлерова (сплошная линия) плотности вероятности при $l = 1$.

чением параметра l, как это и предсказывается формулами (16). Для эйлерова распределения наблюдается относительный рост вероятности положительных значений смещения r. Появление отрицательных значений $w_{eul}(r)$ при отрицательных значениях r связано с тем, что для многозначных решений мы рассматриваем относительное время пребывания процесса, и в многозначном решении интервалы опрокидывания учитываются со знаком минус.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассматриваем эволюцию вероятностных распределений нелинейных случайных волн в недиспергирующих средах, описываемых уравнениями типа Римана и Кардара–Паризи–Жанга. Уравнение для скорости и соответствующее уравнение для интеграла от нее (смещения) описывают широкий класс физических явлений: эволюцию фазового фронта в геометрической оптике, эволюцию фронта пожаров, интенсивные акустические волны, динамику подвижного уреза при накате морских волн на берег и др. С использованием связи лагранжева и эйлерова статистического описания нами получены общие выражения для вероятностных распределений скорости и смещения. Показано, что для нахождения вероятностного распределения смещения необходимо знать совместное вероятностное распределение смещения, скорости и ускорения на входе нелинейной среды. В выражении для эйлеровой плотности вероятности появляется слагаемое, которое описывает отличие лагранжевой плотности вероятности от эйлеровой, а именно, относительно больший вклад от расширяющихся участков профиля в эйлерову плотность вероятности. Если лагранжева плотность вероятности сдвигается в сторону отрицательных смещений, то эйлерова плотность вероятности сдвигается в сторону положительных смещений. Появление отрицательных значений $w_{eul}(r)$ при отрицательных значениях r связано с тем, что мы рассматриваем фактически относительное время пребывания процесса, и в многозначном решении интервалы опрокидывания учитываются со знаком минус. Многозначные решения для римановых волн не всегда имеют физический смысла. Тем не менее, для функций, описываемых уравнениями первого порядка типа (1) и (2), справедлив принцип локальности – поведение функции вне зоны особенности не зависит от поведения функции в окрестности особенности. Это позволяет надеяться, что при положительных значениях аргумента плотность вероятности достаточно адекватно описывает эволюцию вероятностного распределения смещения. Применительно к задачам наката морских волн на берег положительные значения аргумента r соответствуют стадии затопления побережья волнами, что имеет важное практическое значение.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование поддержано грантами Российского научного фонда № 19–12–00256 (раздел 2 – СНГ) и № 16–17–00041 (раздел 3 – ЕНР).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gurbatov S.N., Rudenko O.V.* Statistical phenomena / In: Nonlinear Acoustics. Edited by M.F. Hamilton and D.T. Blackstock. San Diego: Academic, 1998. Chap. 13. P. 377–398.
2. *Руденко О.В., Гурбатов С.Н., Хедберг К.М.* Нелинейная акустика в задачах и примерах. М.: Физматлит, 2007.
3. *Гурбатов С.Н., Руденко О.В., Саичев А.И.* Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии. Приложения к нелинейной акустике. М.: Физматлит, 2008.
4. *Carrier G.F., Greenspan H.P.* Water Waves of Finite Amplitude on a Sloping Beach // J. Fluid Mech. 1958. V. 4. P. 97–109.
5. *Диденкулова И.И., Сергеева А.В., Пелиновский Е.Н., Гурбатов С.Н.* Статистические оценки характеристик наката длинных волн на берег // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2010. Т. 46. № 4. С. 571–574.
6. *Rybkin A., Pelinovsky E.N., Didenkulova I.* Nonlinear Wave Run-up in Bays of Arbitrary Cross-Section: Generalization of the Carrier–Greenspan Approach // J. Fluid Mech. 2014. V. 748. P. 416–432.
7. *Gurbatov S., Pelinovsky E.* Probabilistic Characteristics of Narrow-Band Long Wave Run-up Onshore // Natural Hazards and Earth System Sciences. 2019. V. 19. P. 1925–1935.
8. *Kardar M., Parisi G., Zhang Y-C.* Dynamic Scaling of Growing Interfaces // Phys. Rev. Letters. 1986. V. 56. № 9. P. 889–892.
9. *Kuznetsov E.A., Minaev S.S.* Formation and propagation of cracks on the flame surface // Physics Letters A. 1996. V. 221. Iss. 3–4. P. 187–192.
10. *Sasamoto T.* The 1D Kardar-Parisi-Zhang equation: height distribution and universality // Prog. Theor. Exp. Phys. 2016. V. 2016. P. 022A01.
11. *Зельдович Я.Б., Мамаев А.В., Шандарин С.Ф.* Лабораторное наблюдение каустик, оптическое моделирование движения частиц и космология // УФН. 1983. Т. 139. С. 153–163.
12. *Гурбатов С.Н., Саичев А.И., Шандарин С.*Ф. Крупномасштабная структура Вселенной. Приближение Зельдовича и модель слипания // УФН. 2012. Т. 182. С. 233–261.
13. *Гурбатов С.Н., Малахов А.Н., Саичев А.И.* Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии. М.: Наука, 1990.

PROBABILITY DISTRIBUTIONS OF THE RIEMANN WAVE AND AN INTEGRAL OF IT

S. N. Gurbatov[a] and E. N. Pelinovsky[b,c,d]

[a] *National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russian Federation*
[b] *Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev, Nizhny Novgorod, Russian Federation*
[c] *National Research University - Higher School of Economics, Moscow, Russian Federation*
[d] *Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences, Nizhny Novgorod, Russian Federation*
Presented by Academician of the RAS E.A. Kuznetsov

The statistical characteristics of the Riemann wave and the integral of it have been investigated. Such problems arise in the physics of fronts' propagation, in particular, during the wave run-up on the shore, a flame front, and phase surfaces. Using the Lagrange and Euler connection of the statistical description, general expressions have been obtained for the probability distributions of the front velocity and its displacement. It has been shown that in order to find the probability distribution of displacement, it is necessary to know the joint probabilistic distribution of displacement, velocity, and acceleration at the input of a nonlinear medium. Accounting probability as the time of finding a signal in a certain interval, the waves' characteristics after breaking have been calculated.

Keywords: nonlinear waves in the non-dispersive media, Riemann equation, Kardar–Parisi–Zang equation, probability characteristics of nonlinear waves