ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2020, том 493, с. 57–61

МЕХАНИКА

УДК 539.3

ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН

Академик РАН Н. Ф. Морозов[1,2,*],
П. Е. Товстик[1,2,], Т. П. Товстик[2,***]**

Поступило 21.05.2020 г.
После доработки 21.05.2020 г.
Принято к публикации 22.05.2020 г.

Рассматриваются малые длинноволновые свободные изгибные колебания многослойной пластины с чередующимися мягкими и жесткими слоями. Обсуждаются приближенные способы определения податливости на поперечный сдвиг необходимой при замене многослойной пластины эквивалентной однослойной пластиной Тимошенко–Рейсснера. Проводится сравнение с точным решением трехмерной задачи теории упругости. Исследуется зависимость податливости на сдвиг и частот колебаний от отношения модулей Юнга слоев и от расположения слоев.

Ключевые слова: многослойная пластина, длинноволновые колебания, обобщенная модель Тимошенко–Рейсснера, жесткость на поперечный сдвиг

DOI: 10.31857/S2686740020040112

ВВЕДЕНИЕ

Классическая модель Кирхгофа–Лява (КЛ) [1, 2], основанная на гипотезе прямой недеформируемой нормали, является основной двухмерной моделью теории тонких пластин (и оболочек). Область применимости этой модели ограничена однослойными пластинами из однородного изотропного материала. Для анизотропных пластин с малой жесткостью на поперечный сдвиг, для пластин с косой анизотропией, для многослойных пластин с чередующимися мягкими и жесткими слоями модель КЛ приводит к большим погрешностям. Модель Тимошенко–Рейсснера (ТР) [3, 4], учитывающая поперечный сдвиг, приводит к существенному уточнению результатов по сравнению с моделью КЛ. Для многослойных пластин вводится в рассмотрение эквивалентная однослойная пластина ТР из однородного материала [5–10], моделирующая многослойную пластину при исследовании ее прогибов, колебаний и устойчивости. Если эквивалентная изгибная жесткость может быть найдена по тем же формулам, что и в модели КЛ, то определение жесткости на поперечный сдвиг представляет определенные трудности и подробно обсуждается ниже на примере задачи о свободных колебаниях многослойной пластины с трансверсально изотропными слоями. Проводится сравнение с точным решением трехмерной задачи.

1. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МНОГОСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ

Рассмотрим свободные изгибные колебания пластины с прогибом

$$w(x, y, t) = w_0 \sin px \sin qy \sin \omega t.$$

Такую форму могут иметь колебания бесконечной пластины, а также прямоугольной пластины с шарнирно опертыми сторонами длиной L_x, L_y (тогда $p = p_m = \dfrac{m\pi}{L_x}$, $q = q_n = \dfrac{n\pi}{L_y}$, $m, n = 1, 2, \ldots$). По модели ТР с учетом поперечного сдвига для трансверсально изотропной однородной пластины частота колебаний ω связана с безразмерным параметром частоты $\lambda = \dfrac{\rho h^2 \omega^2}{E_0}$ и определяется из соотношений

$$\lambda = \lambda^{TR} = \frac{\lambda^{KL}}{1 + g}, \quad \lambda^{KL} = D\mu^4, \tag{1}$$

где $E_0 = \dfrac{E}{1 - \nu^2}$, $\mu = rh = \dfrac{2\pi h}{L}$, $r^2 = p^2 + q^2$. Здесь ρ – плотность материала, h – толщина пластины, $L = (L_x^{-2} + L_y^{-2})^{-\frac{1}{2}}$ – характерная длина волны, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, μ –

[1] *Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия*
[2] *Институт проблем машиноведения Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия*
**E-mail: morozov@nm1016.spb.edu*
***E-mail: peter.tovstik@mail.ru*
****E-mail: tovstik_t@mail.ru*

Таблица 1. Члены второго порядка малости

η	A_g	A_ν	J	J_ν	a	D_*
1	0.299	0.0928	0.1150	0.0308	0.502	0.0824
10	1.461	0.0875	0.1114	0.0081	0.384	0.1202
100	12.921	0.0844	0.1149	0.0026	0.354	0.1253
1000	127.515	0.0840	0.1154	0.0019	0.350	0.1259

малый параметр толщины, $D = \frac{1}{12}$ – безразмерный параметр изгибной жесткости, $g = \frac{E_0\mu^2}{10G_{13}}$ – параметр влияния поперечного сдвига, G_{13} – модуль упругости поперечного сдвига. Для изотропных слоев $G_{13} = \frac{E}{2(1+\nu)}$, а для трансверсально изотропных слоев G_{13} – независимый параметр. При $\frac{E}{G_{13}} \sim 1$ слагаемым g в (1) можно пренебречь, а при $G_{13} \ll E$ поправка на сдвиг становится существенной. Без учета сдвига ($g = 0$) формула (1) переходит в формулу КЛ $\lambda^{KL} = D\mu^4$. Целью работы является применить формулу вида (1) для многослойных пластин.

2. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Для многослойной пластины модули упругости и плотность становятся кусочно-постоянными функциями поперечной координаты z, $0 \le z \le h$. Точное значение параметра частоты λ может быть найдено из трехмерной краевой задачи, которая приводится к системе обыкновенных уравнений с малым параметром. Ее асимптотическое интегрирование [6–8] дает выражение для параметра частоты λ в виде, аналогичном (1):

$$\lambda = \frac{\rho_* h^2\omega^2}{E_*} = \frac{\lambda^{KL}}{1+g}, \quad \lambda^{KL} = D_*\mu^4, \qquad D_* = \frac{1}{E_*}\int_0^1 E_0(z)(z-a)^2 dz, \tag{2}$$

где

$$g = g^a + O(\mu^4), \quad g^a = \mu^2(A_g + A_\nu + J + J_\nu),$$

$$\{E_*, \rho_*\} = \int_0^1 \{E_0(z), \rho(z)\} dz, \quad a = \frac{1}{E_*}\int_0^1 E_0(z) z dz,$$

$$A_g = \frac{1}{E_* D_*}\int_0^1 \frac{\left(\int_0^z E_0(z_1)(z_1 - a) dz_1\right)^2}{G_{13}(z)} dz. \tag{3}$$

Здесь E_*, ρ_* – средние по толщине значения жесткости на растяжение и плотности, D_* – параметр жесткости на изгиб, a – координата нейтрального слоя. Слагаемые второго порядка малости g^a учитывают податливость на поперечный сдвиг (A_g), пуассоновское растяжение нормального волокна (A_ν), инерцию его вращательного движения (J) и инерцию пуассоновского растяжения (J_ν) (величины A_ν, J и J_ν здесь не приводятся, см. [8]).

3. ЖЕСТКОСТЬ НА ПОПЕРЕЧНЫЙ СДВИГ

Вычисления по формулам (2), (3) для многослойных пластин, связанные с вычислением повторных интегралов от кусочно постоянных функций, весьма громоздки, поэтому рассмотрим возможность их упрощения. Рассмотрим пластину с чередующимися изотропными жесткими и мягкими слоями и через η обозначим отношение модулей Юнга жестких и мягких слоев. Если параметр η растет, то модули G_{13} мягких слоев пластины уменьшаются и в силу формулы (4) коэффициент A_g также растет в то время, как остальные коэффициенты второго порядка малости A_ν, J, J_ν остаются существенно меньшими A_g.

Рассмотрим, например, трехслойную пластину с толщинами слоев $h_1 = 0.3$, $h_2 = 0.6$, $h_3 = 0.1$. Модули Юнга жестких и мягкого слоев, соответственно, равны $E_1 = E_3 = 1, E_2 = \frac{1}{\eta}$. Коэффициенты Пуассона $\nu_1 = \nu_3 = 0.3$, $\nu_2 = 0.35$. Для ряда значений η коэффициенты второго порядка малости приведены в табл. 1.

Положим приближенно $g^a = \mu^2 A_g$, возвращаясь тем самым к модели ТР, учитывающей из членов второго порядка малости только сдвиг. Расчеты [7, 8] показали, что при $\eta \le 1000$, $\mu = 0.1$ погрешность формулы (3) при $g = g^a = \mu^2 A_g$ не превосходит 4%. Ниже погрешность указанной замены обсуждается более подробно.

4. ТОЧНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ЖЕСТКОСТИ НА СДВИГ

В силу формулы (3) имеет место оценка

$$g^a = \mu^2 A_g = O(\mu^2\eta). \tag{4}$$

При весьма больших η (т.е. при большом отношении жесткостей слоев) $g^a > 1$, формула (2) при $g = g^a$

становится неточной, и нужно найти точное значение $g = g^e$, при котором формула (3) дает точное значение $\lambda = \lambda^e$. Для его вычисления рассмотрим вспомогательную краевую задачу

$$\frac{du}{dz} = w + \mu^2 c_g(z)\sigma, \quad \frac{d\sigma}{dz} = E_0(z)u, \quad \sigma(0) = \sigma(h) = 0, \tag{5}$$

в которой из эффектов второго порядка малости удержан только сдвиг $c_g = \dfrac{1}{G_{13}}$. После ее решения находим $\lambda = -\int_0^1 \sigma(z)\,dz$ и значение

$$g^e = \frac{1}{\mu^2}\left(\frac{D_*}{\lambda} - 1\right). \tag{6}$$

5. О МОДЕЛИ ТИМОШЕНКО–РЕЙССНЕРА ДЛЯ ОДНОРОДНОЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ

Согласно модели ТР параметр частоты λ для однородной трансверсально изотропной пластины определяется по формуле (2), в которой $g = g_0 = \dfrac{q}{10}$, $q = \dfrac{\mu^2 E_0}{G_{13}}$. Оценим погрешность этой формулы при $g_0 > 1$. Для однородной пластины задача (5) имеет явное решение

$$\sigma = \frac{G}{\mu^2}\left(\frac{\mathrm{ch}(\sqrt{q}(z-0.5))}{\sqrt{q}/2} - 1\right)$$

и формула (6) дает

$$g^e = \frac{q}{12(2\,\mathrm{th}(\sqrt{q}/2)/\sqrt{q} - 1)} - 1. \tag{7}$$

Вычисления по формуле (7) дали следующие результаты:

$\frac{q}{10}$	0.1	1	10	100	1000
g^e	0.0999	0.989	9.42	88.0	849

из которых следует, что с ростом q точная величина g^e отклоняется в меньшую сторону от значения $q/10$, рекомендуемого по модели ТР.

6. ДРУГИЕ СПОСОБЫ АНАЛИЗА МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН

В классической работе [5] для вычисления g была предложена формула

$$g = \sum_{n=1}^{N} \frac{\gamma_n}{G_n}, \tag{8}$$

в которой для вычисления g складываются податливости слоев на сдвиг. В ней G_n – модули поперечного сдвига слоев, N – их число, γ_n – не зависящие от G_n коэффициенты, формулы для которых не приводятся. Заметим, что формула (3) для A_g после вычисления интегралов приводится к виду (8).

В монографии [9] Э.И. Григолюком и Г.М. Куликовым (ГК) был предложен алгоритм учета эффекта поперечного сдвига для многослойных пластин и оболочек. К этому алгоритму целесообразно вернуться, ибо в недавней книге [10], а также в ряде других работ он был использован для решения частных задач. Этот алгоритм основан на гипотезе о распределении деформаций поперечного сдвига по толщине пластины. Согласно [9] формула для g может быть записана в виде

$$g = \left(\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{\alpha_n}{G_n}\right)^{-1} + \sum_{n=1}^{N} \beta_n G_n\right)^{-1}, \tag{9}$$

где α_n и β_n – не зависящие от G_n коэффициенты. Явный вид формулы для g приведен в [9, 10]. Расчеты показали, что алгоритм ГК можно использовать лишь для пластин с небольшим отношением η модулей Юнга слоев (о чем написано и в [9]). С ростом η погрешность $\Delta(\eta)$ формулы (10) быстро растет. Например, для пластины, рассмотренной в табл. 1, погрешность $\Delta(1) = 1.2\%$, $\Delta(10) = 42\%$, а при $\eta = 100$ найденная по формуле (10) величина g в 10 раз превосходит точное значение. По-видимому, гипотезы, положенные в основу модели ГК и нарушающие непрерывность напряжений сдвига на границе слоев, нуждаются в корректировке.

Еще одной возможностью анализа многослойных пластин является раздельное рассмотрение слоев с выполнением условий непрерывности на границах слоев [11].

7. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим пластину с параметрами $h_1 = h_3 = 0.3$, $h_2 = 0.4$, $E_1 = E_3 = 1$, $E_2 = \dfrac{1}{\eta}$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0.3$, $\rho_1 = \rho_3 = 1$, $\rho_2 = \dfrac{1}{\eta}$. Осталось два свободных параметра: параметр толщины μ и отношение модулей Юнга η. Как следует из оценки (4), учет поперечного сдвига связан с величиной $\mu^2\eta$, поэтому введем совмещенный параметр $p = \mu^2\eta$ и проведем расчеты при фиксированном значении параметра $\mu = 0.1$.

В табл. 2 для ряда значений p приведены: приближенное значение параметра сдвига $g^a = \mu^2 A_g$, найденное по асимптотической формуле (3), и точное значение g^e, найденное по формуле (6);

Таблица 2. Параметры сдвига и частоты в зависимости от p при $\mu = 0.1$

1	2	3	4	5	6	7	8
p	η	g^a	G^e	λ^e	λ^{ap}	λ^{TR}	λ^{KL}
0.01	1	0.00286	0.00286	0.0913	0.0913	0.0913	0.0916
0.1	10	0.0174	0.0174	0.1321	0.1325	0.1325	0.1348
1	100	0.163	0.161	0.1222	0.1223	0.1224	0.1420
10	1000	1.62	1.47	0.0578	0.0578	0.0545	0.1432
100	10000	16.2	8.1	0.0157	0.0157	0.0083	0.1432

точное значение λ^e параметра частоты λ, полученное при решении трехмерной задачи (2). Остальные значения параметра λ приближенные. Они получены по формуле (2), причем значения λ^{ap}, λ^{TR}, λ^{KL} вычисляются при $g = g^e$, $g = g^a = \mu^2 A_g$ и $g = 0$ соответственно. Значение λ^{TR} соответствует модели ТР при учете сдвига по приближенной модели (3). Значение λ^{KL} соответствует модели КЛ, не учитывающей поперечный сдвиг.

Сравнение столбцов 3–4 и 5–8 позволяет судить об областях применимости приближенных моделей. Модель КЛ применима лишь при $\eta \le 10$ (или при $p \le 0.1$). Асимптотический подход второго порядка точности, приведший к значениям g^a и λ^{TR}, безусловно, применим при $\eta \le 100$ и дает заметную погрешность при $\eta \le 1000$. При этом параметр g^a превышает точное значение g^e. Использование значения g^e дает достаточно точные результаты во всем рассмотренном диапазоне $\eta \le$ ≤ 10000, о чем говорит сравнение столбцов 5 и 6 (при вычислении λ^{ap} точно учитывается только сдвиг, а остальные эффекты второго порядка игнорируются).

Были проведены расчеты также при $\mu = 0.316$ и при $\mu = 0.0316$, однако численные результаты не приводятся, ибо они отличаются от приведенных в табл. 2 менее, чем на 1% (за исключением параметра η, который в 10 раз меньше или больше, соответственно).

В табл. 2 приведены результаты для симметричной по толщине пластины. Аналогичные выводы относительно определяющей роли совмещенного параметра p были получены также в результате расчетов для несимметричных по толщине трехслойных и многослойных пластин.

8. ОБСУЖДЕНИЕ

Установлено, что частота изгибных колебаний многослойной пластины вычисляется по формуле (2), соответствующей модели ТР, в которой знаменатель $1 + g$ учитывает влияние поперечного сдвига. Введен совмещенный параметр $p = \mu^2\eta$, определяющий область применимости различных подходов при вычислении g. При $p \le 1$ для однородной пластины $g = \dfrac{E_0\mu^2}{10G_{13}}$, а для многослойной $g = g^a = \mu^2 A_g$ (см. (3)). Если же $p > 1$, эти формулы становятся неточными. Для однородной пластины g вычисляется по явной формуле (7). Тем самым дана оценка погрешности модели ТР при $g = \dfrac{E_0\mu^2}{10G_{13}}$. Для многослойной пластины величину $g = g^e$ вычисляем по формуле (6). Использование этого значения g дает достаточно точные результаты во всем рассмотренном диапазоне параметров

$$0.3 \le \mu \le 0.001, \quad 1 \le \eta \le 10000,$$

что подтверждается сравнением с точным решением трехмерной задачи.

Полученные результаты для множителя $1 + g$, учитывающего влияние поперечного сдвига, без изменений применимы и для задачи о прогибе многослойной пластины под действием статической гармонической нагрузки вида

$$f = f_0 \sin px \sin qy.$$

Для многослойных трансверсально изотропных пластин представленные результаты могут считаться окончательными. В [12] для неоднородной по толщине пластины с анизотропией общего вида (с 21 модулем упругости) построено асимптотическое приближение второго порядка точности, приводящее к весьма громоздкой модели, требующей упрощений и соответствующего анализа погрешностей. В частности, многослойная пластина с ортотропными слоями в общем случае не имеет нейтрального слоя, в результате чего продольные и изгибные деформации не разделяются и расчет усложняется. Получены лишь частные результаты [13] и требуются дальнейшие исследования.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 18–01–00884а, 19–01–00208а, 20–51–52001 МНТ-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kirchhoff G.* Vorlesungen uber Matematische Physik. Mechanik. Leipzig. 1876.
2. *Love A.E.H.* A treatise on the mathematical theory elasticity. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1927.
3. *Timoshenko S.P.* On the Correction for Shear of the Differential Equation for Transverse Vibrations of Prismatic Bars // Philos. Mag. 1921.V. 4. Ser. 6. № 242.
4. *Reissner E.* The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates. Trans. ASME // J. Appl. Mech. 1945. V. 12. P. 69–77.
5. *Hill R.* A Self-Consistent |Mechanics of Composite Materials // J. Mech. Phys. Solids. 1965. V. 13. № 4.
6. *Товстик П.Е., Товстик Т.П.* Уравнение изгиба тонкой пластины второго порядка точности // ДАН. 2014. Т. 457. № 6. С. 660–663.
7. *Морозов Н.Ф., Товстик П.Е., Товстик Т.П.* Обобщенная модель Тимошенко–Рейсснера сильно неоднородной по толщине пластины // ДАН. 2016. Т. 469. № 5. С. 562–566.
8. *Tovstik P.E., Tovstik T.P.* Generalized Timoshenko–Reissner models for beams and plates, strongly heterogeneous in the thickness direction // ZAMM. 2017. V. 97. № 3. P. 296–308.
9. *Григолюк Э.И., Куликов Г.М.* Многослойные армированные оболочки. М.: Машиностроение, 1988.
10. *Mikhasev G.I., Altenbach H.* Thin-walled Laminated Structures. Buckling, Vibrations, and Their Suppression. Springer. 2019.
11. *Родионова В.А., Титаев Б.Ф., Черных К.Ф.* Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек. СПб.: Изд-во СПб. ун-та, 1996.
12. *Товстик П.Е.* Двухмерная модель анизотропной пластины второго порядка точности // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 1. С. 157–169.
13. *Belyaev A.K., Morozov N.F., Tovstik P.E, Tovstik T.P.* Two-Dimensional Linear Models of Multilayered Anisotropic Plates // Acta Mech. 2019. V. 230. Iss. 8. P. 2891–2904.

BENDING VIBRATIONS OF MULTILAYERED PLATES

Academician of the RAS N. F. Morozov[a,b], P. E. Tovstik[a,b], and T. P. Tovstik[b]

[a] *Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russian Federation*

[b] *Institute of Problems of Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, Saint Petersburg, Russian Federation*

Small free bending vibrations of a multilayered plate with alternating hard and soft layers are considered. The approximate ways of a transversal shear complaisance definitions, that needs to replace this plate by an equivalent one-layered Timoshenko–Reissner plate, are discussed. A comparison with the exact 3D solution is performed. A dependence of frequency on the ratio of Young modules of layers and of their position is investigated.

Keywords: multilayered plate, long-wave bending vibrations, models of transversal shear stiffness