

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЦЕПОЧКИ МАСС В ЖИДКОСТИ

© 2020 г. Академик РАН О. В. Руденко^{1,2,3,*}

Поступило 12.05.2020 г.

После доработки 12.05.2020 г.

Принято к публикации 12.05.2020 г.

Исследованы нелинейные регулярные и случайные колебания метаматериала, представляющего собой цепочку погруженных в вязкую жидкость массивных элементов. Ближайшие соседи связаны нелинейными силами упругости. Учтено стоковое трение. Получена система уравнений для колебаний масс. В континуальном длинноволновом приближении система сведена к упрощенному эволюционному уравнению в частных производных с нелинейным и диссипативным членами. Найдены точные решения. Показано, что конкуренция нелинейности и поглощения может привести к формированию установившейся формы профиля волны. Для шумовых волн приведены корреляционная функция и спектр интенсивности. Проанализирован процесс возбуждения пилообразной волны распределенными внешними источниками. Рассчитана предельная “пиковая” амплитуда. Рассмотрены волны в трубках переменного сечения, заполненных метаматериалом. На основе решения уравнения, содержащего зависящее от координаты сечение трубки, найдено выражение для амплитуды пилообразной волны.

Ключевые слова: метаматериал, цепочка масс, нелинейные колебания, пилообразная волна, интенсивный шум, спектр интенсивности, корреляционная функция, возбуждение волн, стационарный режим

DOI: 10.31857/S2686740020040124

Рассмотрим цепочку масс, расположенных на одинаковом расстоянии a друг от друга. Смещение массы с номером n из равновесного положения обозначим как X_n . Выделенная масса связана с ближайшими соседями нелинейными пружинками. Каждая из них создает силу $f(\Delta) = \alpha\Delta - \beta\Delta^2$, которая стремится вернуть массу в положение равновесия. Здесь Δ – удлинение пружины. Уравнение колебаний имеет вид

$$m \left(\frac{d^2 X_n}{dt^2} + 2\delta \frac{dX_n}{dt} \right) = f(X_{n+1} - X_n) - f(X_n - X_{n-1}). \quad (1)$$

В модели (1) учтено трение Стокса, возникающее при обтекании массивных элементов цепочки вязкой жидкостью. Коэффициент трения зависит от формы тела. Для шариков, например, этот ко-

эффициент, пропорциональный вязкости η , равен [1] $\delta = \frac{3\pi r_0 \eta}{m}$.

Правую часть уравнения (1) для заданной формы $f(\Delta)$ запишем так:

$$(X_{n+1} + X_{n-1} - 2X_n)[\alpha - \beta(X_{n+1} - X_{n-1})]. \quad (2)$$

Теперь перейдем к континуальному пределу, считая

$$\begin{aligned} X_n &= X(t, x), \\ X_{n+1} &= X(t, x + a), \\ X_{n-1} &= X(t, x - a). \end{aligned} \quad (3)$$

Для этого разложим выражения (3) в ряды по малому параметру – отношению периода решетки a к длине волны. Уравнение (1), (2) примет вид

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + \frac{2\delta}{m} \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\alpha a^2}{m} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - \frac{2\beta a^3}{m} \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}. \quad (4)$$

Обозначим для краткости

$$\frac{\alpha a^2}{m} = c^2, \quad \frac{\beta a^3}{m c^2} = \epsilon. \quad (5)$$

Смысл обозначений: c – скорость звука, ϵ – нелинейный параметр.

¹Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

²Институт общей физики им. А.М. Прохорова Российской академии наук, Москва, Россия

³Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: rudenko@acs366.phys.msu.ru

Рассмотрим волны, бегущие в одну сторону, для определенности, в положительном направлении оси x . Переходя в движущуюся со скоростью звука систему координат $\tau = t - \frac{x}{c}$ и пользуясь методом медленно изменяющегося профиля [2], получим из (4) эволюционное уравнение первого порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c^2} u \frac{\partial u}{\partial \tau} = -\frac{\delta}{c} u. \quad (6)$$

Уравнение (6) выводилось ранее для нелинейных электромагнитных волн [3] и акустических волн в релаксирующей среде [4] (см. также [5], формула (4.3.18)).

Уравнение (6) имеет простое решение, описывающее один полупериод пилообразной волны:

$$u = A(x) \left(1 - \frac{\omega \tau}{\pi} \right), \quad 0 < \omega \tau \leq \pi. \quad (7)$$

Второй (отрицательный) полупериод описывается продолжением функции (7) на область $-\pi \leq \omega \tau < 0$ нечетным образом. Подставляя (7) в (6), получим уравнение для амплитуды $A(x)$:

$$\frac{dA}{dx} + \frac{\varepsilon \omega}{\pi c^2} A^2 = -\frac{\delta}{c} A. \quad (8)$$

Решение (8), удовлетворяющее условию $A(x=0) = A_0$, имеет вид

$$A(x) = \frac{A_0 \exp\left(-\frac{\delta}{c} x\right)}{1 + \frac{\varepsilon \omega}{\pi c \delta} A_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{\delta}{c} x\right) \right]}. \quad (9)$$

Видно, что амплитуда “пилы” уменьшается по нелинейному закону, а на больших расстояниях и при больших A_0 наступает “насыщение” – зависимость $A(x)$ от исходного значения амплитуды A_0 пропадает.

Используя метод характеристик, можно найти решение [2, 5] уравнения (6), удовлетворяющее более общему условию:

$$u(x=0, \tau) = u_0 \Phi(\omega_0 \tau). \quad (10)$$

Оно имеет форму неявной функции:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{u}{u_0} \exp\left(\frac{\delta}{c} x\right) \right] = \\ & = \Phi \left\{ \omega_0 \tau + \frac{\varepsilon \omega_0 u_0}{c \delta} \left[\frac{u}{u_0} \exp\left(\frac{\delta}{c} x\right) \right] \left[1 - \exp\left(-\frac{\delta}{c} x\right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Удобно в дальнейшем использовать (11) в сокращенной записи:

$$\begin{aligned} & V = \Phi \{ \theta + V_s(x) \}, \\ & s(x) = \frac{\varepsilon \omega_0 u_0}{c \delta} \left[1 - \exp\left(-\frac{\delta}{c} x\right) \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Смысл использованных обозначений нетрудно понять, сравнивая формулы (11) и (12). Приведенное расстояние $s(x)$ содержит как характерную нелинейную длину (или длину образования разрыва) $x_{SH} = \frac{c^2}{\varepsilon \omega_0 u_0}$, так и диссипативную длину $x_{DIS} = \frac{c}{\delta}$ и может быть записано так:

$$s(x) = \frac{x_{DIS}}{x_{SH}} \left[1 - \exp\left(-\frac{x}{x_{DIS}}\right) \right]. \quad (13)$$

В том случае, когда $x_{DIS} < x_{SH}$, нелинейные искажения профиля волны не приводят к формированию разрывов. При этом на расстояниях $x \gg x_{DIS}$ функция $s(x)$ достигает максимального значения $\frac{x_{DIS}}{x_{SH}}$. Профиль волны перестает искажаться, а “стационарная” (в смысле сохранения своей формы) волна начинает затухать по линейному закону, определяемому вязкостью жидкости.

Для гармонического исходного сигнала выражение (12) удастся разложить в ряд Бесселя–Фурье по гармоникам [2, 5]. Из этого разложения следует, что амплитуды гармоник “стационарного” профиля, формирующегося на указанных выше расстояниях, изменяются по закону

$$\frac{u_n}{u_0} = \exp\left(-\frac{x}{x_{DIS}}\right) \cdot 2J_n\left(n \frac{x_{DIS}}{x_{SH}}\right) \left(n \frac{x_{DIS}}{x_{SH}}\right)^{-1}. \quad (14)$$

Здесь J_n – функция Бесселя порядка n . Отношения амплитуд всех гармоник остаются постоянными, поскольку гармоники затухают экспоненциально с одним и тем же декрементом.

Перейдем теперь к особенностям распространения случайных (шумовых) волн. Общие выражения для спектра интенсивности и корреляционной функции шума, описываемого уравнением Хопфа, при нормальной статистике на входе в нелинейную среду имеют вид [4] (см. также [5], формулы (10.2.11) и (10.2.10) соответственно):

$$S(\omega, z) = \frac{\sigma^2 \exp[-(z\omega)^2]}{\pi (z\omega)^2} \times \quad (15)$$

$$\times \int_0^\infty \{ \exp((z\omega)^2 R) - 1 \} \cos(\omega t) dt,$$

$$B(\tau, z) = -\sigma^2 \int_0^\infty \frac{dR}{dt} \operatorname{erf} \left[\frac{t - \tau}{2z\sqrt{1 - R(t)}} \right] dt. \quad (16)$$

Здесь $\operatorname{erf}(t)$ – функция ошибок,

$$\begin{aligned} & B(\tau = t_1 - t_2, z) = \langle u(t_1, z) u(t_2, z) \rangle, \\ & B(\tau, z = 0) = \sigma^2 R(\tau) \end{aligned} \quad (17)$$

суть корреляционная функция шума в среде и коэффициент корреляции на входе в среду шума,

интенсивность которого равна σ^2 , а $z = \frac{\varepsilon\sigma x}{c^2}$ – расстояние, отнесенное к характерной нелинейной длине.

Используя аналогию с решением (12), перепишем результат (15) для спектра нелинейного шума в следующем виде:

$$S = \frac{\sigma^2}{\pi} \left(s \frac{\omega}{\omega_0} \right)^{-2} \exp \left(-2 \frac{\delta}{c} x - \left(s \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right) \times \int_0^\infty \left\{ \exp \left(\left(s \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 R \right) - 1 \right\} \cos(\omega t) dt. \quad (18)$$

В общем виде интеграл (18) не вычисляется. Можно лишь, используя метод перевала, найти универсальную высокочастотную асимптотику спектра. Положим для широкополосного шума исходный коэффициент корреляции равным $R \approx 1 - \omega_0^2 t^2$. При этом получится

$$S(\omega, s) = \frac{\sigma^2}{2\sqrt{\pi}\omega_0} \exp \left(-2 \frac{\delta}{c} x \right) \left(\frac{\omega_0}{s(x)\omega} \right)^3. \quad (19)$$

Однако асимптотика ω^{-3} не вполне корректна, поскольку не учитывает факт образования ударных фронтов на участках реализации шума с большими выбросами. Этот факт, обозначенный в книге [5], подробно обсуждается в работах [7, 8].

Другие тенденции в трансформации спектра могут быть изучены с помощью численного анализа решения (18). Эти тенденции во многом аналогичны тем, которые отмечены для иной динамической модели – уравнения Хопфа и подробно описаны в работах [5, 9]. Различие состоит лишь в темпах эволюции спектров, связанных с учетом вязкого трения элементов цепочки, а также с ограниченностью приведенного расстояния $s(x)$ (12) при $x \rightarrow \infty$.

Перейдем теперь к новой модели, которая будет описывать процесс возбуждения нелинейной пилообразной волны внешним источником. Рассмотрим неоднородное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c^2} u \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\delta}{c} u = F(\tau). \quad (20)$$

Наиболее простое решение получается для формы внешней “силы” $F(\tau)$ в виде периодической пилообразной волны. В пределах одного полупериода положим

$$F = F_0 \frac{2c}{\delta} \left(1 - \frac{\omega\tau}{\pi} \right), \quad 0 < \omega\tau \leq \pi. \quad (21)$$

Второй (отрицательный) полупериод описывается нечетным продолжением функции (21) на область $-\pi \leq \omega\tau < 0$.

Отыскивая решение уравнения (20) с правой частью (21) в виде (7), найдем решение:

$$A(x) = F_0 \frac{\operatorname{th} \left(\frac{\delta}{2c} x \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon\omega}{\pi c\delta} F_0} \right)}{\sqrt{1 + \frac{2\varepsilon\omega}{\pi c\delta} F_0 + \operatorname{th} \left(\frac{\delta}{2c} x \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon\omega}{\pi c\delta} F_0} \right)}}. \quad (22)$$

Это решение удовлетворяет условию $A(x=0) = 0$, т.е. амплитуда волны нарастает от нуля при ее распространении вглубь среды. Кроме того, при отсутствии внешней силы ($F_0 = 0$) волна вовсе не зарождается, и $A(x) \equiv 0$. Наконец, на больших расстояниях, при $x \rightarrow \infty$, амплитуда стремится к своему предельному значению, которое равно

$$A_{LIM} = \frac{\pi c \delta}{2\varepsilon\omega} \left(\sqrt{1 + \frac{2\varepsilon\omega}{\pi c\delta} F_0} - 1 \right). \quad (23)$$

При малых и больших значениях “силы” имеем соответственно

$$A_{LIM} = \frac{1}{2} F_0, \quad A_{LIM} = \sqrt{\frac{\pi c \delta}{2\varepsilon\omega}} \sqrt{F_0}. \quad (24)$$

В первом случае (24) реализуется линейная зависимость от пикового значения “силы”, во втором случае – нелинейная.

Если F_0 – случайная величина, распределенная по закону Рэлея, нетрудно показать, что распределение для A_{LIM} будет таким:

$$\frac{\sigma_F^2}{4} W = A_{LIM} (1 + \alpha A_{LIM}) \left(1 + \frac{1}{2} \alpha A_{LIM} \right) \times \exp \left[-\frac{2}{\sigma_F^2} A_{LIM}^2 \left(1 + \frac{1}{2} \alpha A_{LIM} \right)^2 \right]. \quad (25)$$

Здесь σ_F – дисперсия величины F_0 , а комбинация констант, пропорциональная нелинейному параметру ε , обозначена как $\alpha = \frac{2\varepsilon\omega}{\pi c\delta}$.

Функция распределения (25) изображена на рис. 1 для трех значений параметра $\alpha = 0, 0.5, 1$ и дисперсии $\sigma_F^2 = 2$. Видно, что с усилением нелинейности ширина этой функции уменьшается. Максимум смещается в сторону меньших амплитуд, поскольку выбросы с большими амплитудами из-за нелинейного затухания убывают быстрее.

Стационарная волна с “пиковым” значением (23) формируется в результате конкуренции между потоками энергии. Распределенные источники $F(\tau)$ вносят энергию в среду, возбуждая волну. На малых расстояниях форма волны повторяет распределение источников. Эта энергия “перетекает” в пределах периода волны к ударному фронту, где поглощается в результате нелинейных и диссипативных процессов.

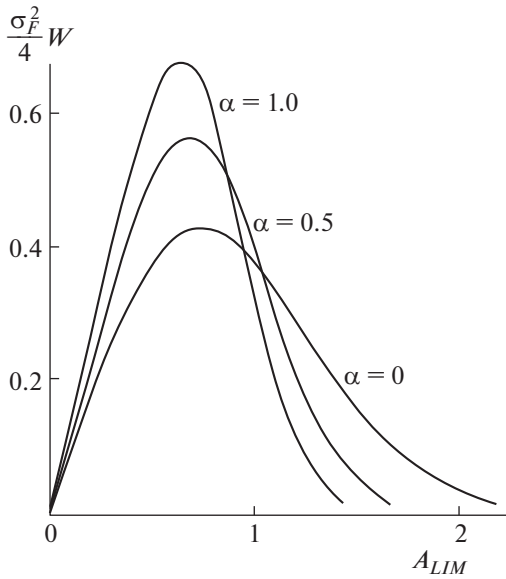


Рис. 1. Функция распределения предельных значений амплитуд пилообразной волны, возбуждаемой “силой” (21) для различных значений параметра $\alpha = \frac{2\varepsilon\omega}{\pi c\delta}$.

Обратим теперь внимание на более сложную модель, которая служит обобщением уравнения (6) [10, 11]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c^2} u \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\delta}{c} u + \frac{u}{2} \frac{d}{dx} \ln S(x) = 0. \quad (26)$$

Уравнение (26) описывает распространение волн в трубах, рупорах, концентраторах и других направляющих системах с переменным поперечным сечением $S(x)$ [12]. При этом расстояние x отсчитывается вдоль оси системы. Уравнение (26) служит также уравнением переноса в нелинейной геометрической акустике неоднородной среды. В этом случае $S(x)$ есть поперечное сечение лучевой трубки, а расстояние x отсчитывается вдоль криволинейного центрального луча.

Обратим внимание на то, что сужение трубки по специальному закону

$$S(x) = S_0 \exp\left(-2\frac{\delta}{c}x\right) \quad (27)$$

приводит к компенсации потерь. Это означает, что волны в экспоненциальном концентраторе (27) описываются обычным уравнением Хопфа.

В общем случае, для произвольной зависимости $S(x)$ сечения от координаты для амплитуды пилообразной волны (7) получается обыкновенное дифференциальное уравнение, аналогичное уравнению (8):

$$\frac{dA}{dx} + \frac{\varepsilon\omega}{\pi c^2} A^2 + \frac{\delta}{c} A + \frac{1}{2} A \frac{d}{dx} \ln S(x) = 0. \quad (28)$$

Это уравнение можно проинтегрировать в общем виде для произвольной функции $S(x)$. Для этого перепишем (28) так:

$$\frac{d}{dx} \ln(SA^2) + \frac{2\varepsilon\omega}{\pi c^2} A + \frac{2\delta}{c} = 0. \quad (29)$$

Отсюда следует

$$\frac{d}{dx} \exp\left(\frac{\varepsilon\omega}{\pi c^2} \int A dx\right) = \frac{\varepsilon\omega}{\pi c^2} \frac{1}{\sqrt{S(x)}} \exp\left(-\frac{\delta}{c}x\right). \quad (30)$$

Интегрируя уравнение (30) с условием $A = A_0, S = S_0$ при $x = 0$, приходим к следующему выражению:

$$\frac{A}{A_0} = \sqrt{\frac{S_0}{S(x)}} \exp\left(-\frac{\delta}{c}x\right) \times \left[1 + \frac{\varepsilon\omega}{\pi c^2} A_0 \int_0^x \sqrt{\frac{S_0}{S(x)}} \exp\left(-\frac{\delta}{c}x\right) dx \right]^{-1}. \quad (31)$$

Приведенные здесь результаты по распространению регулярных и шумовых волн, полученные выше на основе моделей (6) и (20), можно в дальнейшем обобщить для (26) и целого ряда других распределенных систем, обладающих более “экзотическими” нелинейными и диссипативными свойствами [13, 14].

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа поддержана грантом Российского научного фонда 19–12–00098.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
2. Руденко О.В., Гурбатов С.Н., Хедберг К.М. Нелинейная акустика в задачах и примерах. М.: Физматлит, 2007. 176 с.
3. Хохлов Р.В. К теории ударных волн в нелинейных линиях // Радиотехн. электрон. 1961. Т. 6. № 6. С. 917–925.
4. Солюян С.И., Хохлов Р.В. Акустические волны конечной амплитуды в среде с релаксацией // Акуст. журн. 1962. Т. 8. № 2. С. 220–227.
5. Руденко О.В., Солюян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
6. Руденко О.В., Чиркин А.С. О нелинейной трансформации спектров случайных волновых полей // ДАН СССР. 1974. Т. 214. № 5. С. 1045–1048.
7. Gurbatov S.N., Rudenko O.V. Nonlinear Decay of Random Waves Described by an Integrodifferential Equation // Phys. Rev. E. 2014. V. 90. 032924. P. 1–7.
8. Gurbatov S.N., Rudenko O.V., Tyurina A.V. Singularities and Spectral Asymptotics of a Random Nonlinear Wave in a Nondispersive System // Wave Motion. 2020. V. 95. 102519. P. 1–15.

9. Руденко О.В. Взаимодействия интенсивных шумовых волн // Успехи физ. наук. 1986. Т. 149. № 3. С. 413–447.
10. Руденко О.В. Нелинейные пилообразные волны // Успехи физ. наук. 1995. Т. 165. № 9. С. 1011–1036.
11. Enflo B.O., Rudenko O.V. To the Theory of Generalized Burgers' Equations // Acta Acustica/Acustica. 2002. V. 88. P. 155–162.
12. Руденко О.В., Гурбатов С.Н. Статистические задачи для обобщенного уравнения Бюргера: интенсивный шум в волноведущих системах // ДАН. 2018. Т. 478. № 1. С. 25–28. <https://doi.org/10.7868/S086956521801005X>
13. Руденко О.В. “Экзотические” модели физики интенсивных волн: линеаризуемые уравнения, точно решаемые задачи и неаналитические нелинейности // Прикл. нел. динамика. 2018. Т. 26. № 3. С. 7–34. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-3-7-34>
14. Руденко О.В. Разрушение сингулярности профиля сильно нелинейной волны в диссипативной среде // ДАН. Физика, техн. науки. 2020. Т. 492. С. 61–65. <https://doi.org/10.31857/S2686740020030098>

NONLINEAR OSCILLATIONS OF THE MASS CHAIN IN A LIQUID

Academician of the RAS O. V. Rudenko^{a,b,c}

^a Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

^b Prokhorov General Physics Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

^c Institute of the Earth Physics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

Nonlinear regular and random vibrations of a metamaterial, which is a chain of massive elements immersed in a viscous fluid, are studied. The nearest neighbors are connected by nonlinear elastic forces. Stokes friction is taken into account. A system of equations for mass oscillations is obtained. In the continuum long-wave approximation, the system is reduced to a simplified partial differential equation with nonlinear and dissipative terms. Exact solutions are found. It is shown that the competition of nonlinearity and absorption can lead to the formation of a steady-state waveform. For noise waves, the correlation function and intensity spectrum are given. The process of sawtooth wave excitation by distributed external sources is analyzed. The limiting “peak” amplitude is calculated. Waves in tubes of variable cross section filled with metamaterial are considered. Based on the solution of the equation containing the coordinate-dependent cross-section of the tube, an expression is found for the amplitude of the sawtooth wave.

Keywords: metamaterial, mass chain, nonlinear oscillations, sawtooth wave, high-intensity noise, power spectrum, correlation function, wave excitation, stationary mode