ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2020, том 493, с. 42–47

МЕХАНИКА

УДК 539.3

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА БЛОЧНОГО ЭЛЕМЕНТА В ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ АКАДЕМИКА И.И. ВОРОВИЧА

© 2020 г. Академик РАН В. А. Бабешко[1,2,*], О. В. Евдокимова[1,**], О. М. Бабешко[2,***]

Поступило 01.02.2020 г.
После доработки 28.04.2020 г.
Принято к публикации 15.06.2020 г.

На примере граничных задач – векторной (система дифференциальных уравнений) и скалярной (одно уравнение) – демонстрируются особенности их решений при использовании метода блочного элемента. В этом методе решения могут быть представлены в упакованном и распакованном виде. В настоящем сообщении на примере двух впервые точно решенных методом блочного элемента векторной и скалярной граничных задач разъясняются эти свойства в сопоставлении. Векторная граничная задача ранее была поставлена академиком И.И. Воровичем своему ученику, точное ее решение дается в работе.

Ключевые слова: граничные задачи, векторные и скалярные блочные элементы, уравнения Ламе в квадранте, Гельмгольца в кубе, псевдодифференциальные уравнения, базис решения

DOI: 10.31857/S268674002004015X

ВВЕДЕНИЕ

Метод блочного элемента успешно применялся в граничных задачах для одного уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами, скалярный случай, в более ранних работах авторов. Точное решение граничных задач строилось в форме упакованного блочного элемента [1]. В настоящей работе впервые дается обобщение скалярного случая на векторный вариант, применяемый в граничной задачах для систем дифференциальных уравнений в частных производных. Точное решение представляется в форме упакованного векторного блочного элемента. Для векторного блочного элемента, как и для скалярного, возможна распаковка, позволяющая более детально изучать свойства решений. Приводится пример ее применения к системе дифференциальных уравнений Ламе, рассматриваемой в первом квадранте. В свое время эта задача была предложена для исследования одному из своих учеников академиком И.И. Воровичем [2]. Здесь построено ее точное решение. Ниже дана постановка задачи и изложен алгоритм решения. Эта граничная задача для системы уравнений Ламе в плоской динамической постановке рассматривается в первом квадранте при гармонических во времени воздействиях на границы.

Для исследования применяется метод блочного элемента. При решении задачи методом блочного элемента осуществляются операции внешней алгебры, внешнего анализа [3] и строится векторный блочный элемент, состоящий из двух компонент. В процессе решения возникает проблема дифференциальной факторизации матрицы-функции коэффициента функционального уравнения, необходимая для правильного построения псевдодифференциальных уравнений [4]. Ее выполнение позволяет построить компоненты внешней формы и сам упакованный блочный элемент. Вторая, скалярная задача, решаемая методом блочного элемента, пока, как неожиданно узнали авторы, точно не была решена.

Речь идет о решении граничной задачи для дифференциального уравнения Гельмгольца в кубе. Здесь важно отметить, что метод блочного элемента позволяет строить решения граничных задач при произвольных граничных условиях и большом разнообразии параметров, не только вещественных.

УРАВНЕНИЕ ЛАМЕ В ПЕРВОМ КВАДРАНТЕ

Рассмотрим плоскую граничную задачу второго рода для системы уравнений Ламе, поставлен-

[1] *Федеральный исследовательский центр Южный научный центр Российской академии наук, Ростов-на-Дону, Россия*
[2] *Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия*
**E-mail: babeshko41@mail.ru*
***E-mail: evdokimova.olga@mail.ru*
****E-mail: babeshko49@mail.ru*

ную в первом квадранте при гармонических воздействиях на границе. Ранее точное ее решение получить не удавалось, однако метод блочного элемента в настоящей работе получает ее точное решение в форме упакованных векторных блочных элементов.

В первом квадранте, обозначенном Ω, с осями координат x_1Ox_2, уравнения Ламе, после исключения члена $\exp(-i\omega t)$, имеют вид

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_1}+\mu\Delta u_1+k^2u_1=0,$$
$$\theta=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2},\quad k^2=\rho\omega^2,$$
$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_2}+\mu\Delta u_2+k^2u_2=0,$$
$$x_1,x_2\in\Omega,\quad \Delta u=\frac{\partial^2u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2u}{\partial x_2^2}.$$

Здесь $u_n(x_1,x_2)$ — компоненты векторов перемещений в точке x_1,x_2, Ω — область первого квадранта $x_1\geq 0$, $x_2\geq 0$, λ, μ — параметры Ламе, ρ — плотность материала деформируемого тела, ω — частота внешних гармонических воздействий на границе, задаваемых комплексной функцией $\exp(-i\omega t)$, где t — время. Значения напряжений на границах квадранта обозначаются на оси абсцисс функциями $X_{x_2x_2}(x_1,0)$, $Y_{x_2x_1}(x_1,0)$, и $X_{x_1x_1}(0,x_2)$, $Y_{x_1x_2}(0,x_2)$ на оси ординат. Нормальные к границе напряжения обозначаются символом X, касательные — Y. В случае граничной задачи второго рода на границах задаются векторы перемещений с компонентами $u_n(x_1,0)$, $u_n(0,x_2)$ на осях абсцисс и ординат соответственно. При этом для $n=1$ принимаются нормальные к границе перемещения и при $n=2$ — касательные.

МЕТОД РЕШЕНИЯ

Погрузив граничную задачу в топологическое пространство медленно растущих обобщенных функций [3], применив операторы преобразования Фурье $\mathbf{F}_2(\alpha_1,\alpha_2)$ и алгоритм внешней алгебры, приходим к системе функциональных уравнений, имеющих в матричном представлении вид

$$\mathbf{B}(\alpha_1,\alpha_2)\mathbf{U}(\alpha_1,\alpha_2)=\boldsymbol{\omega},\quad \mathbf{B}(\alpha_1,\alpha_2)=\|b_{mn}\|,$$
$$b_{11}=(\lambda+2\mu)\alpha_1^2+\mu\alpha_2^2-k^2,$$
$$b_{12}=b_{21}=(\lambda+\mu)\alpha_1\alpha_2,$$
$$b_{22}=(\lambda+2\mu)\alpha_2^2+\mu\alpha_1^2-k^2,$$
$$\mathbf{U}(\alpha_1,\alpha_2)=\{U_1(\alpha_1,\alpha_2),U_2(\alpha_1,\alpha_2)\}.$$

Здесь принято обозначение преобразования Фурье

$$U_n(\alpha_1,\alpha_2)=\mathbf{F}_2(\alpha_1,\alpha_2)u_n(x_1,x_2)=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int u_n(x_1,x_2)e^{i\langle\alpha x\rangle}dx_1dx_2,$$
$$\langle\alpha x\rangle=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2,$$
$$\boldsymbol{\omega}(\alpha_1,\alpha_2)=\{\omega_1,\omega_2\},$$
$$\omega_1(\alpha_1,\alpha_2)=\omega_{11}(0,\alpha_2)+\omega_{12}(\alpha_1,0),$$
$$\omega_2(\alpha_1,\alpha_2)=\omega_{21}(\alpha_1,0)+\omega_{22}(0,\alpha_2).$$

Компоненты вектора внешней формы $\boldsymbol{\omega}(\alpha_1,\alpha_2)$ имеют обозначения

$$\omega_{11}(0,\alpha_2)=-\sigma_{x_1x_1}(0,\alpha_2)+$$
$$+i[(\lambda+2\mu)\alpha_1U_1(0,\alpha_2)+\mu\alpha_2U_2(0,\alpha_2)],$$
$$\omega_{22}(0,\alpha_2)=-\tau_{x_1x_2}(0,\alpha_2)+$$
$$+i[\mu\alpha_1U_2(0,\alpha_2)+\lambda\alpha_2U_1(0,\alpha_2)],$$
$$\omega_{12}(\alpha_1,0)=-\tau_{x_2x_1}(\alpha_1,0)+$$
$$+i[\mu\alpha_2U_1(\alpha_1,0)+\lambda\alpha_1U_2(\alpha_1,0)],$$
$$\omega_{21}(\alpha_1,0)=-\sigma_{x_2x_2}(\alpha_1,0)+$$
$$+i[(\lambda+2\mu)\alpha_2U_2(\alpha_1,0)+\mu\alpha_1U_2(\alpha_1,0)].$$

Здесь $\sigma_{x_1x_1}(0,\alpha_2)$, $\sigma_{x_2x_2}(\alpha_1,0)$ — преобразования Фурье нормальных составляющих напряжений $X_{x_1x_1}(0, x_2)$, $X_{x_2x_2}(x_1,0)$, а $\tau_{x_1x_2}(0,\alpha_2)$, $\tau_{x_2x_1}(\alpha_1,0)$ — касательных составляющих напряжений $Y_{x_2x_1}(x_1,0)$, $Y_{x_1x_2}(0, x_2)$ на границе квадранта. Определитель функционального уравнения имеет вид

$$\det B=B_0[(\lambda+\mu)(\alpha_1^2+\alpha_2^2)+B_0],$$
$$B_0=\mu(\alpha_1^2+\alpha_2^2)-k^2.$$

Нули для каждого параметра определителя представимы в форме

$$\alpha_{11+}=i\sqrt{\alpha_2^2-(\lambda+2\mu)^{-1}k^2},\quad \alpha_{12+}=i\sqrt{\alpha_2^2-\mu^{-1}k^2},$$
$$\alpha_{21+}=i\sqrt{\alpha_1^2-(\lambda+2\mu)^{-1}k^2},\quad \alpha_{22+}=i\sqrt{\alpha_1^2-\mu^{-1}k^2}.$$

Для исследования граничной задачи методом блочного элемента на этапе внешнего анализа необходимо осуществить дифференциальную факторизацию матрицы-функции и выполнить операцию построения автоморфизма. С этой целью с учетом свойств пространства медленно растущих обобщенных функций строится представление решения матричного функционального уравнения в виде

$$\mathbf{U}(\alpha_1,\alpha_2)=\mathbf{B}^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)\boldsymbol{\omega},$$
$$\mathbf{B}^{-1}=\frac{1}{\det\mathbf{B}}\begin{Vmatrix}(\lambda+\mu)\alpha_2^2+B_0 & -(\lambda+\mu)\alpha_1\alpha_2\\ -(\lambda+\mu)\alpha_1\alpha_2 & (\lambda+\mu)\alpha_1^2+B_0\end{Vmatrix}\qquad(1)$$

и ставится требование обращения вектора решений в нуль вне носителя, первого квадранта, т.е.

$$\mathbf{F}^{-1}(x_1,x_2)\mathbf{B}^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)\boldsymbol{\omega} = 0, \quad x_1,x_2 \notin \Omega. \tag{2}$$

Для правильного осуществления автоморфизма выполняется дифференциальная факторизация матрицы-функции **B** и производится необходимый отбор компонент вектора внешней формы.

Матрицы-функции имеют вид

$$\mathbf{R}_{mn} = (\alpha_m - \alpha_{mn+})^{-1}\begin{Vmatrix}\alpha_m - \alpha_{mn+} & 0 \\ 1 & C_{mn}\end{Vmatrix},$$

$$C_{11}(\alpha_{11+},\alpha_2) = -\frac{b_{11}(\alpha_{11+},\alpha_2)}{b_{21}(\alpha_{11+},\alpha_2)},$$

$$C_{12}(\alpha_{12+},\alpha_2) = -\frac{b_{11}(\alpha_{12+},\alpha_2)}{b_{21}(\alpha_{12+},\alpha_2)},$$

$$C_{21}(\alpha_1,\alpha_{21+}) = -\frac{b_{11}(\alpha_1,\alpha_{21+})}{b_{21}(\alpha_1,\alpha_{21+})},$$

$$C_{22}(\alpha_1,\alpha_{22+}) = -\frac{b_{11}(\alpha_1,\alpha_{22+})}{b_{21}(\alpha_1,\alpha_{22+})}.$$

В задаче теории упругости второго рода на границах квадранта задаются векторы перемещений. В результате выполнения требования автоморфизма строится система псевдодифференциальных уравнений, принимающая для компонент вектора внешней формы вид

$$\begin{gathered}-\sigma_{x_1x_1}(0,\alpha_2) - \tau_{x_2x_1}(\alpha_{11+},0) + \\ + i[(\lambda+2\mu)\alpha_{11+}u_1(0,\alpha_2) + \mu\alpha_2u_2(0,\alpha_2)] + \\ + i[\mu\alpha_2u_1(\alpha_{11+},0) + \lambda\alpha_{11+}u_2(\alpha_{11+},0)] = 0,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}-\sigma_{x_1x_1}(0,\alpha_{21+}) - \tau_{x_2x_1}(\alpha_1,0) + \\ + i[(\lambda+2\mu)\alpha_1u_1(0,\alpha_{21+}) + \mu\alpha_{21+}u_2(0,\alpha_{21+})] + \\ + i[\mu\alpha_{21+}u_1(\alpha_1,0) + \lambda\alpha_1u_2(\alpha_1,0)] = 0,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}-\sigma_{x_2x_2}(\alpha_{12+},0) - \tau_{x_1x_2}(0,\alpha_2) + \\ + i[(\lambda+2\mu)\alpha_2u_2(\alpha_{12+},0) + \mu\alpha_{12+}u_2(\alpha_{12+},0)] + \\ + i[\mu\alpha_{12+}u_2(0,\alpha_2) + \lambda\alpha_2u_1(0,\alpha_2)] = 0,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}-\sigma_{x_2x_2}(\alpha_1,0) - \tau_{x_1x_2}(0,\alpha_{22+}) + \\ + i[(\lambda+2\mu)\alpha_{22+}u_2(\alpha_1,0) + \mu\alpha_1u_2(\alpha_1,0)] + \\ + i[\mu\alpha_1u_2(0,\alpha_{22+}) + \lambda\alpha_{22+}u_1(0,\alpha_{22+})] = 0.\end{gathered}$$

В этом случае система псевдодифференциальных уравнений, с учетом требования (2), допускает решение в векторной форме. В результате внешние формы представимы в виде

$$\begin{gathered}\omega_1(\alpha_1,\alpha_2) = [s_1(\alpha_1,\alpha_2) - s_1(\alpha_{11+},\alpha_2)] - \\ - [s_1(\alpha_1,\alpha_{21+}) - s_1(\alpha_{11+},\alpha_{21+})], \\ \omega_2(\alpha_1,\alpha_2) = [s_2(\alpha_1,\alpha_2) - s_2(\alpha_{12+},\alpha_2)] - \\ - [s_2(\alpha_1,\alpha_{22+}) - s_2(\alpha_{12+},\alpha_{22+})].\end{gathered}$$

Здесь приняты обозначения

$$\begin{gathered}s_1(\alpha_1,\alpha_2) = i[(\lambda+2\mu)\alpha_1u_1(0,\alpha_2) + \mu\alpha_2u_2(0,\alpha_2)] + \\ + i[\mu\alpha_2u_1(\alpha_1,0) + \lambda\alpha_1u_2(\alpha_1,0)], \\ s_2(\alpha_1,\alpha_2) = i[\mu\alpha_1u_2(0,\alpha_2) + \lambda\alpha_2u_1(0,\alpha_2)] + \\ + i[(\lambda+2\mu)\alpha_2u_2(\alpha_1,0) + \mu\alpha_1u_1(\alpha_1,0)], \\ s_1(\alpha_1,\alpha_2) - s_1(\alpha_{11+},\alpha_2) = \\ = i(\lambda+2\mu)[\alpha_1u_1(0,\alpha_2) - \alpha_{11+}u_1(0,\alpha_2)] + \\ + i\mu[\alpha_2u_1(\alpha_1,0) - \alpha_2u_1(\alpha_{11+},0)] + \\ + \lambda[\alpha_1u_2(\alpha_1,0) - \alpha_{11+}u_2(\alpha_{11+},0)], \\ s_2(\alpha_1,\alpha_{22+}) - s_2(\alpha_{12+},\alpha_{22+}) = \\ = \mu[\alpha_1u_2(0,\alpha_{22+}) - \alpha_{12+}u_2(0,\alpha_{22+})] + \\ + i\mu[\alpha_1u_1(\alpha_1,0) - \alpha_{12+}u_1(\alpha_{12+},0)] + \\ + (\lambda+2\mu)[\alpha_{22+}u_2(\alpha_1,0) - \alpha_{22+}u_2(\alpha_{12+},0)].\end{gathered}$$

В построенные решения входят задаваемые на границе квадранта Ω компоненты вектора перемещений. В результате внесения построенных решений псевдодифференциальных уравнений в правые части внешних форм в (1), получаем представление упакованного векторного блочного элемента, являющегося точным решением поставленной граничной задачи для уравнений Ламе в первом квадранте в виде

$$\mathbf{u}(x_1,x_2) = \mathbf{F}^{-1}(x_1,x_2)\mathbf{B}^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)\boldsymbol{\omega}. \tag{3}$$

Упакованный векторный блочный элемент, состоящий из двух компонент, имеет в качестве носителя первый квадрант Ω, вне которого, в силу (2), он обращается в нуль. Для распаковки векторного блочного элемента всегда можно в представлении (3) в каждой компоненте избавиться от одного интегрирования, вычислив интеграл в области Ω по вычету. В результате получим представление распакованного блочного элемента, частные случаи которого строятся различными традиционными подходами. В случае необходимости определения напряжений в каких-либо сечениях области Ω нужно воспользоваться соответствующими уравнениями закона Гука, используя представления перемещений (3).

УРАВНЕНИЕ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В КУБЕ

Для наглядного сопоставления упакованных векторного и скалярного блочных элементов рассматривается скалярная граничная задача для уравнения Гельмгольца в области Ω, представляющей куб $|x_k| \le c$, $k = 1, 2, 3$. С учетом того, что решения многих задач механики и физики можно представить в виде комбинации решений уравнения Гельмгольца, используя потенциальные и вихревые составляющие, эта граничная задача также представляет интерес [4–12]. Задача является показательной не только в том, что впервые методом блочного элемента дается ее точное решение, но и в том, что демонстрируется построение базиса и разложение решения по базису. Эти вопросы рассматривал со своим учеником академик И.И. Ворович в одной из граничных задач [13].

Воспользуемся построенными в [14] псевдодифференциальными уравнениями для трехмерного дифференциального уравнения

$$[A_{11}\partial^2 x_1 + A_{22}\partial^2 x_2 + A_{33}\partial^2 x_3 + A]\varphi(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad (4)$$

в прямоугольном параллелепипеде. Ниже приводится одно из них:

$$\mathbf{F}^{-1}(x_1^1, x_2^1)\left\{\int_{-a}^{a}\int_{-c}^{c} \mathrm{A}_{33}(\varphi'_{13} - i\alpha_{3-}^1\varphi_1)\times\right.$$

$$\times \exp i[\alpha_1^1\eta_1^1 + \alpha_2^1\eta_2^1]d\eta_1^1 d\eta_2^1 + \int_{-c}^{c}\int_{-b}^{b} \mathrm{A}_{11}(\varphi'_{22} + i\alpha_1^1\varphi_2)\times$$

$$\times \exp i[-\alpha_1^1 a + \alpha_2^1 x_2^2 + \alpha_{3-}^1(x_1^2 - b)]dx_1^2 dx_2^2 +$$

$$+ \int_{-a}^{a}\int_{-c}^{c} \mathrm{A}_{33}(\varphi'_{33} + i\alpha_{3-}^1\varphi_3)\times$$

$$\times \exp i[-\alpha_1^1 x_1^3 + \alpha_2^1 x_2^3 - \alpha_{3-}^1 2b]dx_1^3 dx_2^3 -$$

$$- \int_{-c}^{c}\int_{-b}^{b} \mathrm{A}_{11}(\varphi'_{43} - i\alpha_1^1\varphi_4)\times$$

$$\times \exp i[\alpha_1^1 a + \alpha_2^1 x_2^4 - \alpha_{3-}^1(x_1^4 + b)]dx_1^4 dx_2^4 +$$

$$+ \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} \mathrm{A}_{22}(\varphi'_{53} + i\alpha_2^1\varphi_5)\times$$

$$\times \exp i[\alpha_1^1 x_1^5 - \alpha_2^1 c + \alpha_{3-}^1(x_2^5 - b)]dx_1^5 dx_2^5 +$$

$$+ \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} \mathrm{A}_{22}(\varphi'_{63} - i\alpha_2^1\varphi_6)\times$$

$$\left.\times \exp i[-\alpha_1^1 x_1^6 + \alpha_2^1 c + \alpha_{3-}^1(x_2^6 - b)]dx_1^6 dx_2^6\right\} = 0,$$

$$|x_1^1| \le a, \quad |x_2^1| \le c.$$

Положив в уравнении $A_{kk} = 1, A = p^2, a = b = c, \varphi = u$, приходим к трехмерному уравнению Гельмгольца в кубе Ω:

$$[\partial^2 x_1 + \partial^2 x_2 + \partial^2 x_3 + p^2]u(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Рассмотрим случай граничной задачи Неймана. Считаем, ради краткости, что на противоположных гранях куба задаются четные граничные условия:

$$\frac{\partial u(\pm c, x_2, x_3)}{\partial x_1} = g(c, x_2, x_3),$$

$$\frac{\partial u(x_1, \pm c, x_3)}{\partial x_2} = g(x_1, c, x_3),$$

$$\frac{\partial u(x_1, x_2, \pm c)}{\partial x_3} = g(x_1, x_2, c).$$

Здесь произвольные функции g предполагаются одноразово дифференцируемыми по аргументам, а параметр p может быть произвольным комплексным или вещественным числом. Применяя описанный выше алгоритм метода блочного элемента в скалярной граничной задаче, получаем представление решения в форме упакованного блочного элемента:

$$u(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{8\pi^3}\iiint_{R^3}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - p^2)^{-1}\times$$

$$\times\omega(a_1, a_2, a_3)e^{-i\langle \alpha x\rangle}da_1 da_2 da_3,$$

$$\langle ax\rangle = (x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3).$$

Одна и та же внешняя форма ω, в зависимости от ориентации по отношению к осям, может иметь несколько представлений, легко получаемых разной группировкой одних и тех же членов, без перестановок, т.е.

$$\omega(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \equiv \omega_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \equiv$$
$$\equiv \omega_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \equiv \omega_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3),$$

$$\omega_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = b(\alpha_2, \alpha_{2+})b(\alpha_3, \alpha_{3+})\left[T(\alpha_1\alpha_{2+}\alpha_{3+}) -\right.$$
$$\left.- b(\alpha_1, \alpha_{1+})T(\alpha_{1+}\alpha_{2+}\alpha_{3+})\right] + b(\alpha_2, \alpha_{2+})\times$$
$$\times\left[b(\alpha_1, \alpha_{1+})T(\alpha_{1+}\alpha_{2+}\alpha_3) - T(\alpha_1\alpha_{2+}\alpha_3)\right] +$$
$$+ b(\alpha_3, \alpha_{3+})\left[b(\alpha_1, \alpha_{1+})T(\alpha_{1+}\alpha_2\alpha_{3+}) - T(\alpha_1\alpha_2\alpha_{3+})\right] +$$
$$+\left[T(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) - b(\alpha_1, \alpha_{1+})T(\alpha_{1+}\alpha_2\alpha_3)\right],$$

$$\omega_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = b(\alpha_1, \alpha_{1+})b(\alpha_3, \alpha_{3+})\left[T(\alpha_{1+}\alpha_2\alpha_{3+}) -\right.$$
$$\left.- b(\alpha_2, \alpha_{2+})T(\alpha_{1+}\alpha_{2+}\alpha_{3+})\right] + b(\alpha_1, \alpha_{1+})\times$$
$$\times\left[b(\alpha_2, \alpha_{2+})T(\alpha_{1+}\alpha_{2+}\alpha_3) - T(\alpha_{1+}\alpha_2\alpha_3)\right] +$$
$$+ b(\alpha_3, \alpha_{3+})\left[b(\alpha_2, \alpha_{2+})T(\alpha_1\alpha_{2+}\alpha_{3+}) - T(\alpha_1\alpha_2\alpha_{3+})\right] +$$
$$+\left[T(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) - b(\alpha_2, \alpha_{2+})T(\alpha_1\alpha_{2+}\alpha_3)\right],$$

$$\omega_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = b(\alpha_1, \alpha_{1+})b(\alpha_2, \alpha_{2+})\left[T(\alpha_{1+}\alpha_{2+}\alpha_3) -\right.$$
$$\left.- b(\alpha_3, \alpha_{3+})T(\alpha_{1+}\alpha_{2+}\alpha_{3+})\right] + b(\alpha_1, \alpha_{1+})\times$$
$$\times\left[b(\alpha_3, \alpha_{3+})T(\alpha_{1+}\alpha_2\alpha_{3+}) - T(\alpha_{1+}\alpha_2\alpha_3)\right] +$$
$$+ b(\alpha_2, \alpha_{2+})\left[b(\alpha_3, \alpha_{3+})T(\alpha_1\alpha_{2+}\alpha_{3+}) - T(\alpha_1\alpha_{2+}\alpha_3)\right] +$$
$$+\left[T(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) - b(\alpha_3, \alpha_{3+})T(\alpha_1\alpha_2\alpha_{3+})\right].$$

Здесь приняты обозначения

$$b(\alpha_k, \alpha_{k+}) = \frac{\alpha_k \sin c\alpha_k}{\alpha_{k+}\sin c\alpha_{k+}}, \quad b(\alpha_{k+}, \alpha_{k+}) = 1,$$
$$C(\alpha_k) = \cos c\alpha_k, \quad k = 1, 2, 3,$$

$$\alpha_{1+} = i\sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2 - p^2}, \quad \alpha_{2+} = i\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_3^2 - p^2},$$
$$\alpha_{3+} = i\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - p^2},$$
$$G(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \mathbf{F}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\, g(x_1, x_2, x_3),$$
$$T(\alpha_{1+}, \alpha_{2+}, \alpha_{3+}) = [G(c, \alpha_{2+}, \alpha_{3+})C(\alpha_{1+}) +$$
$$+ G(\alpha_{1+}, c, \alpha_{3+})C(\alpha_{2+}) + G(\alpha_{1+}, \alpha_{2+}, c)C(\alpha_{3+})],$$
$$T(\alpha_{1+}, \alpha_{2+}, \alpha_3) = [G(c, \alpha_{2+}, \alpha_3)C(\alpha_{1+}) +$$
$$+ G(\alpha_{1+}, c, \alpha_3)C(\alpha_{2+}) + G(\alpha_{1+}, \alpha_{2+}, c)C(\alpha_3)],$$
$$T(\alpha_{1+}, \alpha_2, \alpha_{3+}) = [G(c, \alpha_2, \alpha_{3+})C(\alpha_{1+}) +$$
$$+ G(\alpha_{1+}, c, \alpha_{3+})C(\alpha_2) + G(\alpha_{1+}, \alpha_2, c)C(\alpha_{3+})],$$
$$T(\alpha_1, \alpha_{2+}, \alpha_{3+}) = [G(c, \alpha_{2+}, \alpha_{3+})C(\alpha_1) +$$
$$+ G(\alpha_1, c, \alpha_{3+})C(\alpha_{2+}) + G(\alpha_1, \alpha_{2+}, c)C(\alpha_{3+})],$$
$$T(\alpha_{1+}, \alpha_2, \alpha_3) = [G(c, \alpha_2, \alpha_3)C(\alpha_1) +$$
$$+ G(\alpha_{1+}, c, \alpha_3)C(\alpha_2) + G(\alpha_{1+}, \alpha_2, c)C(\alpha_3)],$$
$$T(\alpha_1, \alpha_{2+}, \alpha_3) = [G(c, \alpha_{2+}, \alpha_3)C(\alpha_1) +$$
$$+ G(\alpha_1, c, \alpha_3)C(\alpha_{2+}) + G(\alpha_1, \alpha_{2+}, c)C(\alpha_3)],$$
$$T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{3+}) = [G(c, \alpha_2, \alpha_{3+})C(\alpha_1) +$$
$$+ G(\alpha_1, c, \alpha_{3+})C(\alpha_2) + G(\alpha_1, \alpha_2, c)C(\alpha_{3+})],$$
$$T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = [G(c, \alpha_2, \alpha_3)C(\alpha_1) +$$
$$+ G(\alpha_1, c, \alpha_3)C(\alpha_2) + G(\alpha_1, \alpha_2, c)C(\alpha_3)].$$

Опишем свойства внешней формы $\omega(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. К числу ее нулей принадлежат аналитические множества α_{k+}, $k = 1, 2, 3$. Ее полюсами является счетное множество аналитических множеств $\alpha_{k+}^2 = \pi^2 m^2$, $k = 1, 2, 3$, $m = 0, 1, 2, \ldots$. Выбирая любое сечение аналитического множества, например, для $k = 3$, получаем счетное множество однократных полюсов $\alpha_{1m} = \pm i\sqrt{\pi^2 m^2 + \alpha_2^2 - p^2}$. Они позволяют распаковать блочный элемент, вычисляя в области Ω интегралы Дирихле по теории вычетов. Получившийся ряд функций представляет базис разложения решения граничной задачи [13]. Именно эти ряды распакованного вида блочных элементов получаются при решении уравнения Гельмгольца методом разделения переменных. Одно из отличий метода блочного элемента от других методов состоит в том, что он позволяет решать граничную задачу при любых комплексных значениях параметра p. Получить точное решение уравнения Гельмгольца, минуя стадию упакованного вида, по-видимому, невозможно. Решение очень сложно выражается через функции, задаваемые на границе, при отсутствии ортогонального базиса.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, методом блочного элемента можно строить упакованные векторные блочные элементы для достаточно широкого круга граничных задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. Особенность векторного случая, по сравнению со скалярным случаем, состоит в требовании дополнительного построения дифференциальной факторизации матрицы-функции коэффициента функционального уравнения, который является полиномиальной матрицей. Особенностью рассмотренной скалярной задачи в кубе является наличие в числе нулей внешней формы функционального уравнения также всех корней коэффициента функционального уравнения. Это предопределяет, при распаковке блочного элемента, получение разложения решения граничной задачи в виде ряда, представляющего базис решения [13]. С учетом возможности точного решения граничных задач для уравнений Гельмгольца, можно с их применением получать точные решения более сложных граничных задач [9, 10, 15].

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Отдельные фрагменты работы выполнены в рамках реализации Госзадания Минобрнауки России на 2020 г. (проект FZEN-2020-0020) и Южного научного центра РАН на 2020 г. (проект 00-20-13, № госрегистрации 01201354241) и при поддержке грантов Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 19–41–230003, 19–41–230004, 19–48–230014, 18–08–00465, 18–01–00384, 18–05–80008).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* О стадиях преобразования блочных элементов // ДАН. 2016. Т. 468. № 2. С. 154–158.
2. *Александров В.М., Копасенко В.В.* Контактная задача для упругого клина с жестко защемленной гранью // Прикладная механика. Киев: Наукова думка, 1968. Т 4. № 7. С. 75–82.
3. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* О стартовых землетрясениях при горизонтальных воздействиях // ДАН. 2017. Т. 474. № 4. С. 427–431.
4. *Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова О.В.* Об интегральном и дифференциальном методах факторизации // ДАН. 2006. Т. 410. № 2. С. 168–172.
5. *Бабич В.М.* О коротковолновой асимптотике функции Грина для уравнения Гельмгольца // Матем. сб. 1964. Т. 65. С. 577–630.
6. *Бабич В.М., Булдырев В.С.* Асимптотические методы в проблеме дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972. 256 с.
7. *Мухина И.В.* Приближенное сведение к уравнениям Гельмгольца уравнений теории упругости и электродинамики для неоднородных сред // ПММ. 1972. Т. 36. С. 667–671.
8. *Молотков Л.А.* Исследование распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе

эффективных моделей Био и слоистых сред. СПб.: Наука, 2001. 348 с.

9. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
10. *Новацкий В.* Электромагнитные эффекты в твердых телах. М.: Мир, 1986. 160 с.
11. *Улитко А.Ф.* Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. Киев: Наукова думка, 1979. 262 с.
12. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 284 с.
13. *Ворович И.И., Ковальчук В.Е.* О базисных свойствах одной системы однородных решений // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 5. С. 861–869.
14. *Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова О.В.* О проблеме блочных структур академика М.А. Садовского // ДАН. 2009. Т. 427. № 4. С.480–485.
15. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М., Рядчиков И.В.* Метод проектирования неоднородных материалов и блочных конструкций // ДАН. 2018. Т. 482. № 4. С 398–402. https://doi.org/10.1134/S1028335818100014

APPLYING THE BLOCK ELEMENT METHOD IN A CERTAIN BOUNDARY VALUE PROBLEM OF ACADEMICIAN I.I. VOROVICH

Academician of the RAS V. A. Babeshko[a,b], O. V. Evdokimova[a], and O. M. Babeshko[b]

[a] *Federal Research Center The Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russian Federation*

[b] *Kuban State University, Krasnodar, Russian Federation*

In this paper, the features of their solutions using the block element method are demonstrated using the example of boundary value problems of vector, a system of differential equations, and scalar, a single equation. In this method, solutions can be presented in packaged and unpacked form. Properties of solutions in such forms in the scalar case were previously described in publications. This article explains these properties in comparison using the example of two vector and scalar boundary value problems that were solved exactly by the block element method for the first time. The vector boundary value problem was previously set by academician I.I. Vorovich to his student, and its exact solution is given in the paper.

Keywords: boundary value problems, packed vector and scalar block elements, Lame equations in quadrant, Helmholtz equations in cube, pseudo-differential equations, solution's basis