ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2020, том 494, с. 10–12

ФИЗИКА

УДК 539.12.01

НОВЫЕ ТИПЫ РЕШЕНИЙ КЛАССИЧЕСКИХ ТРЕХМЕРНЫХ SU(2)-УРАВНЕНИЙ ЯНГА–МИЛЛСА

© 2020 г. Член-корреспондент РАН А. Б. Борисов[1,2,*]

Поступило 23.06.2020 г.
После доработки 07.07.2020 г.
Принято к публикации 08.07.2020 г.

Найдены новые типы трехмерных решений классических уравнений Янга–Миллса в представлении Фаддеева–Ниеми. В частном случае они описывают трехмерные вихри.

Ключевые слова: уравнения Янга–Миллса, уравнения дуальности, представление Фаддеева–Ниеми, калибровочные поля

DOI: 10.31857/S2686740020050053

В последние годы уравнения Янга–Миллса находят все более широкое применение в физике конденсированных сред [1]. При этом наибольший интерес представляют топологические и сингулярные структуры в этих средах. Функционал Янга–Миллса в евклидовом пространстве R^4 с координатами (x_1, x_2, x_3, x_4) имеет вид

$$S = \int \frac{1}{4}\mathbf{F}_{\mu\gamma}\mathbf{F}_{\mu\gamma}\mathrm{d}^4x, \tag{1}$$

где тензор $\mathbf{F}_{\mu\nu}$ выражается через поле $\mathbf{A}_\mu = (A_\mu^1, A_\mu^2, A_\mu^3)$:

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} = \mathbf{A}_{\mu,\nu} - \mathbf{A}_{\nu,\mu} + \mathbf{A}_\mu \times \mathbf{A}_\nu,$$

зависящее от трех вещественных переменных (x_1, x_2, x_3). Здесь и далее греческие буквы пробегают значения 1, 2, 3, 4, а латинские – 1, 2, 3, подстрочный индекс обозначает знак дифференцирования по независимым переменным $\left(A_{\mu,\nu} = \dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\right)$. Известно [2], что решения уравнений Янга–Миллса (минимизация функционала (1)) удовлетворяют уравнениям дуальности

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\mathbf{F}_{\alpha\beta}. \tag{2}$$

Для решения этих уравнений были использованы различные подстановки (см., например, обзор [3]). В этой работе мы исследуем решения уравнений дуальности в трехмерном евклидовом пространстве с координатами переменных $x_i = (x_1, x_2, x_3)$. Для этой цели удобно использовать представление Фаддеева–Ниеми [4, 5] для полей $\mathbf{A}_\mu$:

$$\mathbf{A}_\mu = -C_\mu\mathbf{n} - \sigma\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x_\mu} - (K-1)\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x_\mu} \times \mathbf{n} \tag{3}$$

через вещественные поля $\mathbf{C}_\mu$, σ, K и единичный вектор $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{n} = (\cos\Phi(x_1,x_2,x_3)\sin\theta(x_1,x_2,x_3),$$
$$\sin\Phi(x_1,x_2,x_3)\sin\theta(x_1,x_2,x_3), \cos\theta(x_1,x_2,x_3)) \tag{4}$$

и положить $C_4 = 0$.

Задача поиска решений уравнения дуальности с использованием параметризации Фаддеева–Ниеми для калибровочного SU(2) поля Янга–Миллса сформулирована в статье [1]. Отметим также, что трехмерные структуры, в отличие от инстантонов, характеризуются бесконечным значением действия [1]. Установлено, что при решении уравнений дуальности удобно использовать замену

$$K(x_1,x_2,x_3) = A(x_1,x_2,x_3)\sin B(x_1,x_2,x_3),$$
$$\sigma(x_1,x_2,x_3) = A(x_1,x_2,x_3)\cos B(x_1,x_2,x_3). \tag{5}$$

При этом в уравнения (2) входят только поля A, $\mathbf{W} = \mathbf{C} + \nabla B$, Φ, θ и их производные. Эти поля инвариантны при калибровочном преобразовании матрицей $U = \exp[\mathrm{i}\alpha\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}]$ группы $SU(2)$ [4, 5] с параметром $\alpha(x_1, x_2, x_3)$. Поля $\mathbf{C}$, B преобразуются как

$$B \to B + \alpha, \quad \mathbf{C} \to \mathbf{C} - \nabla\alpha.$$

Приравнивая нулю все компоненты разложения по степеням $\exp[\mathrm{i}B(x_1, x_2, x_3)]$ уравнений (2) (после подстановки (3), (4)), мы находим калибровочно

[1] *Институт физики металлов им. М.Н. Михеева Уральского отделения Российской академии наук, Екатеринбург, Россия*
[2] *Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия*
**E-mail: borisov@imp.uran.ru*

инвариантные дифференциальные уравнения в простом виде

$$\nabla\theta\times\nabla A + A\sin\theta(\nabla\Phi\times\mathbf{W}) = 0, \quad (6)$$

$$\sin\theta(\nabla\Phi\times\nabla A) - A(\nabla\Phi\times\mathbf{W}) = 0, \quad (7)$$

$$(1 - A^2)\sin\theta\mathbf{F} + \mathrm{rot}\mathbf{W} = 0. \quad (8)$$

Здесь введены сокращенные обозначения: $\mathbf{F} = \nabla\theta\times\nabla\Phi$. Из уравнений (6), (7) или дивергенции уравнения (8) сразу следует дополнительное уравнение $\mathbf{F}\cdot\nabla A = 0$ для поля A. Из теории дифференциальных уравнений первого порядка следует, что поле A зависит от двух независимых интегралов характеристической системы [6]. Нетрудно убедиться в том, что вследствие соотношений $(\nabla\theta\cdot\mathbf{F}) = 0$, $(\nabla\Phi\cdot\mathbf{F}) = 0$ эти интегралы являются произвольными функциями θ, Φ. Однако, как показано далее, наиболее простое уравнение для A получается при выборе

$$A(x_1, x_2, x_3) = A(a(x_1, x_2, x_3), \Phi(x_1, x_2, x_3)), \quad (9)$$

где

$$\theta = 2\mathrm{arccot}(\exp - a). \quad (10)$$

Тогда из (6), (7) поле $\mathbf{W}$ имеет простой вид:

$$\mathbf{W} = \frac{1}{A}\left(\frac{\partial A}{\partial\Phi}\nabla a + \frac{\partial A}{\partial a}\nabla\Phi\right). \quad (11)$$

Наконец, уравнение для поля $T = \ln A$ можно найти подстановкой уравнений (9)–(11) в (8). Тогда все три уравнения (8) приводятся к одному уравнению

$$(1 - \exp[2T])\,\mathrm{ch}^{-2}a + T_{,aa} + T_{,\Phi\Phi} = 0. \quad (12)$$

Преобразованием $T = TT + \ln(\mathrm{ch}a)$ оно сводится к модифицированному уравнению Лиувилля:

$$\exp[2TT] + TT_{,aa} + TT_{,\Phi\Phi} = 0.$$

В итоге решения (12) определяются произвольной аналитической функцией $G[\Omega]$, $\Omega = a + \mathrm{i}\Phi$ и комплексно сопряженной к ней $G^*[\Omega]$:

$$T = \ln(\mathrm{ch}a) + \frac{1}{2}\ln\left[-\frac{4G'^*[\Omega]G'[\Omega]}{(G[\Omega] + G^*[\Omega])^2}\right]. \quad (13)$$

В общем случае структуры, определяемые этим уравнением, сингулярны. Представленные здесь решения зависят от произвольных функций, и их полный анализ будет изложен в другом месте. Отметим также, что они не описывают всех трехмерных решений уравнений дуальности в теории Янга–Миллса. Так, они, в частности, не приводят к сферически симметричным решениям уравнений дуальности в SU(2)-теории Янга–Миллса, найденным в работе [9]. Использованный в этой работе анзатц удовлетворяет уравнениям

$$A^i_\mu n_i = A^b_a n_a = 0$$

и не совпадает с (3) ни при каких значениях полей. В нашем случае все поля зависят от параметров (a, Φ). Обсудим их выбор. Формула (4) представляет структуру “ежа”

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

в сферической системе координат. В координатах (R, a, Φ) евклидова метрика имеет вид

$$(\mathrm{d}s)^2 = \mathrm{d}R^2 + \mathrm{ch}^{-2}a\,(\mathrm{d}a^2 + \mathrm{d}\Phi^2). \quad (14)$$

Слагаемое $\mathrm{d}\overline{s}^2 = \mathrm{ch}^{-2}a\,(\mathrm{d}a^2 + \mathrm{d}\Phi^2)$ в переменных $(\Omega = a + \mathrm{i}\Phi, \Omega^* = a - \mathrm{i}\Phi)$ имеет конформный вид

$$\mathrm{d}\overline{s}^2 = \mathrm{ch}^{-2}\left(\frac{\Omega + \Omega^*}{2}\right)\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\Omega^*,$$

и, следовательно, координаты (a, Φ) являются конформными координатами [7]. Известно, что конформный вид метрики инвариантен относительно комплексно аналитических замен координат. Этот факт и отражает наличие $G(\Omega)$ и $G^*(\Omega)$ в формуле (13). В итоге в качестве параметров (a, Φ) в формуле (12) можно выбрать любые две конформные координаты, которые параметризуют вектор r и классифицируют точные решения уравнения Янга–Миллса. Рассмотрим преобразование $x_i = x_i(y_1, y_2, y_3)$, где $(y_1, y_2) = (a, \Phi)$, при котором евклидова метрика $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2$ преобразуется к виду

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_i = \frac{\partial x_i}{\partial y_k}\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\mathrm{d}y_k\mathrm{d}y_j = g_{kj}\mathrm{d}y_k\mathrm{d}y_j$$

и определяет метрический тензор g_{kj} и обратный ему g^{ik}:

$$g^{ik} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j}\frac{\partial y_k}{\partial x_j}. \quad (15)$$

Тогда система криволинейных координат с ограничениями

$$g_{11} = g_{22}, \quad g_{12} = 0 \quad (16)$$

приводит к конформным координатам. Системы ортогональных координат $g_{kj} = 0$ $(k \neq j)$ приведены во многих справочниках и монографиях (например, см. [8]). Наиболее интересными являются тороидальная (σ, τ, φ) и биполярная (σ, τ, φ) [8] системы координат. Положим $\sigma = \Phi$, $\tau = a$ в тороидальной системе. Тогда

$$\Phi = \mathrm{arctg}\frac{2Ax_3}{r^2 + z^2 - A^2}, \qquad \theta = 2\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{(r + A)^2 + x_3^2}{(r + A)^2 - x_3^2}}. \quad (17)$$

Здесь и далее $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Структура (17) описывает вихревое кольцо, центр которого лежит в плоскости $x_3 = 0$ на окружности $r = A$, с топологическим зарядом

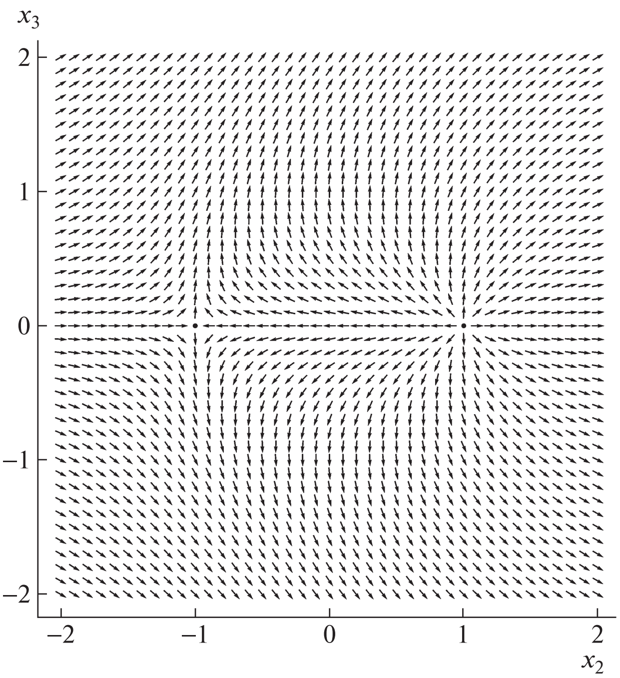

Рис. 1. Распределение вектора Z в плоскости $x_1 = 0$.

$$Q = \frac{1}{2\pi}\oint_{\gamma} \nabla\Phi d\mathbf{r}, \tag{18}$$

равным единице. Здесь γ – произвольный замкнутый контур, охватывающий центр кольца. Интегрирование производится против часовой стрелки. Наиболее простой вид формула (17) имеет на контуре γ вблизи центра вихря:

$$z = p\sin\Psi,$$
$$r = A + p\cos\Psi \quad (0 < \Psi < 2\pi, p \ll 1).$$

Тогда $\Phi \to \Psi$ при $p \to 0$. Структура вихрей более наглядна в распределении векторного поля $Z = (\cos\Phi, \sin\Phi)$. Это поле в плоскости $x_1 = 0$ при $A = 1$ изображено на рис. 1. Ясно видна структура вихря при $x_3 = 0$, $x_2 = 1$ и антивихря при $x_3 = 0$, $x_2 = -1$.

Отметим, что предложенная в этом сообщении процедура обобщается на точные решения в D = 4. Соответствующие результаты будут изложены в другом месте.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор глубоко признателен А.А. Протогенову и В.В. Соколову за обсуждения и полезные замечания, Д.Б. Долгих за неоценимую помощь при подготовке рукописи.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России (тема “Квант”, номер госрегистрации АААА-А18-118020190095-4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Протогенов А.П.* Узлы и зацепления распределений параметра порядка в сильнокоррелированных системах // УФН. 2006. Т. 176. № 7. С. 689–715. https://doi.org/10.3367/UFNr.0176.200607a.0689
2. *Belavin A.A., Polyakov A.M., Schwartz A.S., et al.* Pseudoparticle Solutions of the Yang–Mills Equations // Phys. Lett. B. 1975. V. 59. № 1. P. 85–87. https://doi.org/10.1016/0370-2693(75)90163-X
3. *Actor A.* Classical solutions of SU(2) Yang-Mills Theory // Rev. Mod. Phys. 1979. V. 51. № 3. P. 461–525. https://doi.org/10.1103/RevModPhys.51.461
4. *Faddeev L.D., Niemi A.J.* Partially Dual Variables in SU(2) Yang–Mills Theory // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 82. № 8. P. 1624–1627. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.82.1624
5. *Cho Y.M.* Restricted Gauge Theory // Phys. Rev. D. 1980. V. 21. № 4. P. 1080–1087. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.21.1080
6. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
7. *Дубровин Б.А., Новиков С. П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. М.: Наука, 1979. 760 с.
8. *Корн Г., Корн Т.* Справочник для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1978. 832 с.
9. *Protogenov A.P.* Exact Classical Solutions of Yang–Mills Sourceless Equations // Phys. Lett. B. 1977. V. 67. № 1. P. 62–64. https://doi.org/10.1016/0370-2693(77)90806-1

NEW TYPES OF SOLUTIONS FOR THE CLASSIC 3D SU(2) YANG–MILLS EQUATIONS

Corresponding Member of the RAS A. B. Borisov[a,b]

[a] *M.N. Mikheev Institute of Metal Physics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation*

[b] *Ural Federal University, Yekaterinburg, Russian Federation*

New types of 3D solutions for the classic Yang–Mills equations in the Faddeev–Niemi reformulation are found. In a particular case, these solutions describe 3D vortices.

Keywords: Yang–Mills theory, duality equation, Faddeev–Niemi reformulation, gauge fields