ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2020, том 494, с. 69–74

МЕХАНИКА

УДК 517.977

ПЛОСКИЕ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА, УПРАВЛЯЕМОГО ПРИ ПОМОЩИ ПОДВИЖНОЙ МАССЫ

 Академик РАН Ф. Л. Черноусько[1,*]

Поступило 29.06.2020 г.
После доработки 29.06.2020 г.
Принято к публикации 01.07.2020 г.

Рассматриваются плоские движения твердого тела, управляемого при помощи вспомогательной точечной подвижной массы. Между телом и горизонтальной плоскостью действуют силы сухого трения. Показано, что при определенных условиях тело может быть переведено в любое состояние на плоскости, так что система вполне управляема.

Ключевые слова: динамика твердого тела, сухое трение, управление, мобильные роботы

DOI: 10.31857/S2686740020050065

Проблемы динамики тела, несущего подвижные массы, актуальны в связи с созданием мобильных роботов, не имеющих внешних подвижных элементов [1–3]. Эти роботы, называемые капсульными, могут быть герметичными и способны перемещаться в агрессивных и ранимых средах, в трубах, внутри живых организмов и выполнять операции инспекции, мониторинга, диагностики и др. Ряд работ посвящен одномерным поступательным движениям этих систем при наличии сил внешнего сопротивления, построены оптимальные режимы движения [4, 5].

Двумерные плоские движения, важные для построения поворотов мобильных роботов, исследованы в работах [6, 7] при наличии сил сухого трения между телом и горизонтальной плоскостью. В этих работах предполагается, что внутренние подвижные массы имеют две степени свободы относительно несущего тела и состоят из ротора и материальной точки.

В данной работе, как в [8], рассматривается случай одной подвижной точки, управляющей плоским движением тела при наличии сил сухого трения между телом и плоскостью. Показано, что при довольно общих предположениях система вполне управляема. Она может быть переведена в любое состояние на плоскости даже в том случае, когда точка имеет лишь одну степень свободы и перемещается относительно тела по некоторой кривой.

[1] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, Москва, Россия*
**E-mail: chern@ipmnet.ru*

МЕХАНИЧЕСКАЯ СИСТЕМА

Система состоит из твердого тела P массы M и материальной точки Q массы m (рис. 1). Обозначим через C центр масс тела P и предположим, что одна из главных центральных осей инерции тела направлена вертикально. Тело скользит по неподвижной горизонтальной плоскости OXY в поле тяжести, опираясь на три точки A_i, $i = 1,2,3$. В случае трех опорных точек твердое тело является статически определимой системой, поэтому нормальные реакции N_i в точках A_i определяются однозначно. Силы сухого трения $\mathbf{F}_i$, действующие на тело P в точках A_i, подчиняются закону Кулона с коэффициентом трения f. Если $\mathbf{v}_i$ – скорость точки опоры A_i, то силы трения определяются соотношениями

$$\begin{gathered}\mathbf{F}_i = -\frac{f N_i \mathbf{v}_i}{v_i}, \quad \text{если} \quad v_i = |\mathbf{v}_i| > 0, \\ |\mathbf{F}_i| \le f N_i, \quad \text{если} \quad v_i = 0, \quad i = 1,2,3.\end{gathered} \tag{1}$$

Материальная точка Q снабжена актюатором и движется относительно тела P по горизонтальной плоскости, параллельной плоскости OXY. Точка Q взаимодействует с телом P и не взаимодействует с неподвижной плоскостью OXY. Таким образом, единственными внешними силами, действующими на систему $P + Q$, являются силы тяжести и силы реакции N_i и $\mathbf{F}_i$ в опорах A_i, $i = 1,2,3$.

Будем предполагать для упрощения, что расстояния от центра масс C и от горизонтальной плоскости, по которой движется точка Q, до неподвижной плоскости OXY малы по сравнению с горизонтальными линейными размерами тела P. Предполагаем также, что проекции точек C и Q на

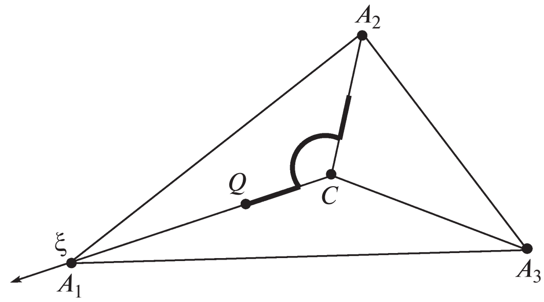

Рис. 1. Механическая система.

плоскость OXY лежат внутри треугольника $A_1A_2A_3$. Эти предположения обеспечивают положительность нормальных реакций N_i и исключают “опрокидывание” тела P. Поэтому будем считать, что центр масс C и точка Q движутся в плоскости OXY.

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Обозначим через $\mathbf{v}_c$ и $\mathbf{v}_Q$ скорости точек C и Q относительно плоскости OXY, а через $\mathbf{F}$ силу, приложенную к точке Q со стороны актюатора. Тогда к телу P в точке Q приложена сила $(-\mathbf{F})$, и уравнение движения центра масс C тела P имеет вид

$$M\dot{\mathbf{v}}_c = \sum_{i=1}^{3}\mathbf{F}_i - \mathbf{F}, \tag{2}$$

где силы $\mathbf{F}_i$ определены формулами (1). Точками обозначаются производные по времени t. Уравнение движения точки Q

$$m\dot{\mathbf{v}}_Q = \mathbf{F}$$

запишем в развернутом виде, представляя ее абсолютное ускорение в виде суммы переносного, кориолисова и относительного ускорений:

$$m\left[\dot{\mathbf{v}}_c + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v} + \mathbf{w}\right] = \mathbf{F}. \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{r} = \overline{CQ}$ – радиус-вектор точки Q относительно центра масс C тела P, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ – относительные скорость и ускорение точки Q относительно тела P, $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$ – угловая скорость тела P, $\mathbf{k}$ – единичный вектор, направленный вертикально вверх.

Составим еще уравнение моментов для тела P вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр C. Обозначая через J момент инерции тела P относительно этой оси, получим

$$J\dot{\omega} = \left(\sum_{i=1}^{3}\overline{CA_i}\times\mathbf{F}_i - \mathbf{r}\times\mathbf{F}\right)\mathbf{k}. \tag{4}$$

На основе уравнений движения (2)–(4) рассмотрим некоторые типы возможных движений системы $P + Q$. Будем считать, что актюатор способен создать достаточно большое по величине и произвольное по направлению относительное ускорение $\mathbf{w}$ точки Q, которое играет роль управляющего воздействия.

МЕДЛЕННЫЕ И ОСТАТОЧНЫЕ ДВИЖЕНИЯ

Если точка Q движется относительно неподвижного тела P с достаточно малым по величине относительным ускорением, то тело P сохраняет состояние покоя из-за сил сухого трения, которые удерживают его в этом состоянии. Этими медленными движениями можно пользоваться для того, чтобы переместить точку Q из начального состояния покоя в произвольное терминальное состояние покоя относительно неподвижного тела P.

Если точка Q неподвижна относительно тела P, то система $P + Q$ представляет собой твердое тело массы $M + m$, которое под действием сил сухого трения остановится за конечное время. Такие движения будем называть остаточными.

ПРЯМОЛИНЕЙНЫЕ ДВИЖЕНИЯ

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ вся система $P + Q$ покоится и точка Q находится на одной из прямых CA_i, $i = 1, 2, 3$, например, на прямой CA_1 (рис. 1). Покажем, что если точка Q движется прямолинейно вдоль прямой CA_1, то реализуется поступательное движение тела P вдоль этой же прямой. Для этого достаточно убедиться, что все уравнения (2)–(4) удовлетворяются при таком движении.

При поступательном движении тела P скорости $\mathbf{v}_i$ всех его точек опоры равны $\mathbf{v}_c$ и параллельны прямой CA_1. Согласно уравнениям (1), все силы трения $\mathbf{F}_i$ также параллельны прямой CA_1 и направлены против скорости $\mathbf{v}_c$. Поэтому векторное уравнение (2) сводится к скалярному уравнению

$$M\dot{v}_c = -f\sum_{i=1}^{3}N_i q(v_c) - F, \tag{5}$$

где введено следующее обозначение, отражающее закон Кулона (1):

$$\begin{aligned} q(v_c) &= \operatorname{sgn} v_c \quad \text{при} \quad v_c \neq 0, \\ |q(v_c)| &\le 1 \quad \text{при} \quad v_c = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Сумма всех нормальных реакций равна весу системы $P + Q$, т.е.

$$N_1 + N_2 + N_3 = (M + m)g, \tag{7}$$

где g – ускорение силы тяжести. Уравнение (5) с учетом равенства (7) примет вид

$$M\dot{v}_c = -f(M + m)gq(v_c) - F. \tag{8}$$

Уравнение (3) для поступательного движения тела P, т.е. при $\omega = 0$, приводится к скалярному уравнению

$$m(\dot{v}_c + w) = F. \tag{9}$$

Исключая F из уравнений (8) и (9) и вводя обозначение

$$\mu = \frac{m}{M+m}, \tag{10}$$

получим

$$\dot{v}_c = -\mu w - fgq(v_c). \tag{11}$$

Обратимся к уравнению (4) при $\omega = 0$. Моменты относительно точки C сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}$, направленных по прямой CA_1, равны нулю, а моменты сил $\mathbf{F}_2$ и $\mathbf{F}_3$ уравновешивают друг друга, так как плечи этих сил, как и сил N_2 и N_3, обратно пропорциональны величинам сил.

Таким образом, все уравнения (2)–(4) удовлетворяются при прямолинейном движении точки Q по прямой CA_1 и поступательном движении тела P вдоль этой прямой. Эти уравнения приводятся к одному динамическому уравнению (11). Имеют место также кинематические соотношения

$$\dot{\xi} = v, \quad \dot{v} = w, \quad \dot{x} = v_c, \tag{12}$$

где ξ – смещение точки Q по прямой CA_1 (рис. 1), отсчитываемое от начального положения этой точки, v – ее скорость относительно тела P, x – абсолютное смещение центра масс C тела P вдоль направления CA_1. Начальные условия для уравнений (11) и (12) имеют вид

$$\xi(0) = v(0) = x(0) = v_c(0) = 0. \tag{13}$$

Зададим управление в виде кусочно-постоянного относительного ускорения

$$\begin{gathered} w(t) = w_1 \quad \text{при} \quad t \in (0,\ t_1), \\ w(t) = -w_2 \quad \text{при} \quad t \in (t_1,\ t_2), \quad 0 < t_1 < t_2, \end{gathered} \tag{14}$$

где постоянные w_1 и w_2 удовлетворяют ограничениям

$$w_1 > fg\mu^{-1}, \quad 0 < w_2 \le fg\mu^{-1}. \tag{15}$$

Интегрируя второе уравнение (12) при $w(t)$, определяемом (14), при начальных условиях (13), получим

$$\begin{gathered} v(t) = w_1 t \quad \text{при} \quad t \in (0,\ t_1), \\ v(t) = w_1 t_1 - w_2(t - t_1) \quad \text{при} \quad t \in (t_1,\ t_2). \end{gathered} \tag{16}$$

Потребуем, чтобы относительная скорость $v(t)$ обращалась в нуль при $t = t_2$. Получим

$$t_2 = \frac{(w_1 + w_2)t_1}{w_2}. \tag{17}$$

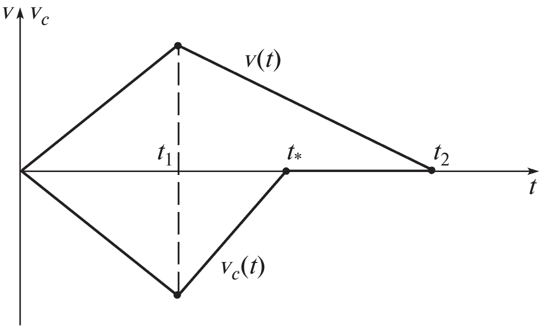

Рис. 2. Функции $v(t)$ и $v_c(t)$.

Проинтегрируем первое уравнение (12) при $v(t)$ из (16) и начальных условиях (13). В результате, используя также формулу (17), определим полное относительное смещение точки Q:

$$\Delta\xi = \xi(t_2) = \frac{w_1(w_1 + w_2)t_1^2}{2\omega_2}. \tag{18}$$

Обращаясь к уравнению (11), будем исходить из того, что неравенство $v_c \le 0$ имеет место при всех $t \in (0, t_2)$. Интегрируя уравнение (11) при $w(t)$, определяемом равенствами (14), и при начальных условиях (13), получим

$$\begin{gathered} v_c(t) = -(\mu w_1 - fg)t \quad \text{при} \quad t \in (0, t_1), \\ v_c(t) = -(\mu w_1 - fg)t + (\mu w_2 + fg)(t - t_1) \quad \text{при} \quad t > t_1. \end{gathered} \tag{19}$$

Из последнего равенства (19) следует, что $v_c(t)$ обращается в нуль при $t = t_*$, где

$$t_* = \mu(w_1 + w_2)t_1(\mu w_2 + fg)^{-1}. \tag{20}$$

Сравнивая равенства (17) и (20), можно убедиться в том, что $t_* \in (t_1,\ t_2)$. При $t \in (t_*,\ t_2)$ в силу (15) имеем неравенство

$$|w(t)| \le fg\mu^{-1}. \tag{21}$$

При условии (21) второе слагаемое в правой части уравнения (11) компенсирует, в силу свойства (6), первое слагаемое, так что имеем $\dot{v}_c = 0$ и, следовательно, $v_c \equiv 0$ при $t \in (t_*,\ t_2)$. Зависимости $v(t)$ и $v_c(t)$ на интервале $(0,\ t_2)$ показаны на рис. 2. Определим еще полное перемещение тела P, которое достигается при $t = t_*$. Используя уравнение (12) и начальные условия (13), получим

$$\Delta x = \frac{-\mu(w_1 + w_2)(\mu w_1 - fg)(\mu w_2 + fg)^{-1} t_1^2}{2}. \tag{22}$$

Управление $w(t)$, заданное соотношениями (14) и (15), обеспечивает относительное перемещение точки Q по прямой CA_1 на величину (18) и одновременно поступательное перемещение тела

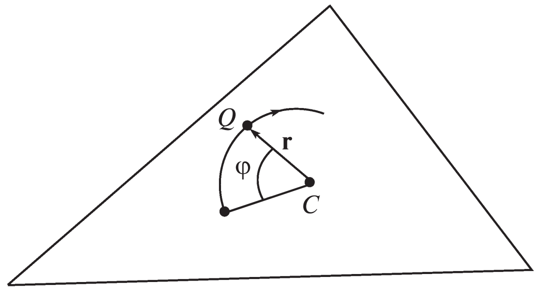

Рис. 3. Вращение.

P на величину (22). В начале и в конце движения вся система находится в состоянии покоя. Оба перемещения противоположны по знаку и пропорциональны t_1^2. Поэтому эти перемещения могут быть как угодно малыми. После окончания маневра перемещения, т.е. при $t > t_2$, точка Q может быть при помощи медленного движения с ускорением, удовлетворяющим условию (21), переведена в начальную точку $\xi = 0$ при неподвижном теле P. Повторяя описанный маневр нужное число раз и подбирая каждый раз его параметры w_1, w_2 и t_1, можно осуществить перемещение тела P на произвольное расстояние вдоль направления CA_1 за конечное время. При этом точка Q может двигаться по любому конечному отрезку вдоль прямой CA_1. Вопросы оптимизации движений применительно к уравнению (11) рассмотрены в работах [4, 5, 8], где построены движения, имеющие максимальную среднюю скорость.

ВРАЩЕНИЕ

Рассмотрим движение точки Q по окружности S радиуса a вокруг точки C (рис. 3). Вектор $\dot{\mathbf{v}}_c$ из уравнения (2) подставим в (3), найдем вектор $\mathbf{F}$ и подставим его в уравнение (4). После преобразований получим

$$(J + \mu M r^2)\dot{\omega} = \\ = \left\{\sum_{i=1}^{3}(\overline{CA_i} - \mu\mathbf{r}) \times \mathbf{F}_i - \mu M\left[2\mathbf{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}) + \mathbf{r}\times\mathbf{w}\right]\right\}\mathbf{k}, \tag{23}$$

где μ введено соотношением (10). Обозначим через φ и $\Omega = \dot{\varphi}$ угловую координату и угловую скорость точки Q при ее движении по окружности S. Относительная скорость $\mathbf{v}$ точки Q направлена перпендикулярно $\mathbf{r}$ и равна по величине $v = a\Omega$, а ее относительное ускорение слагается из касательного ускорения $\dot{v} = a\dot{\Omega}$, направленного перпендикулярно вектору $\mathbf{r}$, и нормального ускорения, равного v^2/a и направленного против $\mathbf{r}$. В результате упрощений уравнение (23) приводится к виду

$$\dot{\omega} = -\mu_1 z + R, \tag{24}$$

где введены обозначения

$$\mu_1 = \mu M a^2 (J + \mu M a^2)^{-1},$$
$$R = \left[\sum_{i=1}^{3}(\overline{CA_i} - \mu\mathbf{r}) \times \mathbf{F}_i\right]\mathbf{k}(J + \mu M a^2)^{-1}. \tag{25}$$

Угловое ускорение $z = \dot{\Omega}$ играет роль управляющего воздействия. Обозначим через ψ угол поворота тела P относительно неподвижной плоскости OXY и запишем кинематические уравнения

$$\dot{\varphi} = \Omega, \quad \dot{\Omega} = z, \quad \dot{\psi} = \omega \tag{26}$$

и начальные условия

$$\varphi(0) = \Omega(0) = \psi(0) = \omega(0) = 0, \tag{27}$$

подобные уравнениям (12) и условиям (13) для прямолинейных движений. Уравнение (24) также подобно уравнению (11), но выражение для R из (25) довольно громоздко, и поэтому здесь будут сделаны более сильные предположения. На основании соотношений (1) и (7) получим оценку

$$|R| \le R_o = (l + \mu a) f g (M + m)(J + \mu M a^2)^{-1} = T^{-2},$$
$$l = \max CA_i, \quad i = 1, 2, 3, \tag{28}$$

где T – характерная величина размерности времени.

Зададим управление $z(t)$ в виде

$$z(t) = Z \quad \text{при} \quad t \in (0, \tau),$$
$$z(t) = -Z \quad \text{при} \quad t \in (\tau, 2\tau), \tag{29}$$

где постоянные Z и τ таковы, что

$$\mu_1 Z / R_o \sim \varepsilon^{-2}, \quad \tau/T \sim \varepsilon, \quad \varepsilon \ll 1. \tag{30}$$

Пренебрегая в уравнении (24) членами порядка ε^2 при $\varepsilon \to 0$, имеем

$$\dot{\omega} + \mu_1 \dot{\Omega} = 0,$$

откуда при начальных условиях (27) получим

$$\omega(t) + \mu_1 \Omega(t) = 0,$$
$$\psi(t) = -\mu_1 \varphi(t) \quad \text{при} \quad t \in (0, 2\tau). \tag{31}$$

Полные угловые перемещения точки Q и тела P за время 2τ определяются равенствами, вытекающими из (29), (26), (27) и (31):

$$\Delta\varphi = \varphi(2\tau) = Z\tau^2, \quad \Delta\psi = \psi(2\tau) = -\mu_1 Z\tau^2. \quad (32)$$

Из соотношений (30) и (32) следует, что угловые перемещения (32) конечны при $\varepsilon \to 0$, пропорциональны друг другу и противоположны по знаку. За счет выбора τ они могут быть сделаны как угодно малыми. Выполняя описанный маневр нужное число раз и выбирая каждый раз параметр τ, можно осуществить поворот тела на заданный угол. Между этими маневрами точка Q может перемещаться по окружности S при помощи медленных движений. В результате можно повернуть тело P на заданный угол и переместить точку Q из начального положения в любое положение на окружности S. Центр масс C тела P может двигаться в течение описанного маневра. После его завершения вращение тела P и относительное движение точки Q прекращаются, но поступательное движение тела P может продолжаться. В этом остаточном движении система $P + Q$ придет в состояние покоя за конечное время.

УПРАВЛЯЕМОСТЬ

Покажем, что при помощи рассмотренных движений систему $P + Q$ можно перевести из произвольного начального состояния покоя в заданное терминальное состояние покоя.

1. Сначала при помощи медленного движения переместим точку Q из начального положения в некоторую точку на окружности S. Тело P при этом не движется.

2. При помощи нескольких вращательных маневров осуществим поворот тела P так, чтобы его конечная ориентация совпала с заданной терминальной ориентацией. Между вращательными маневрами могут быть медленные и остаточные движения, описанные выше. В конце этого этапа система окажется в состоянии покоя, причем ориентация тела P будет совпадать с заданной.

3. При помощи прямолинейных движений по любым двум из трех возможных направлений CA_i, $i = 1, 2, 3$, переместим тело P в заданное конечное положение в плоскости. Маневры прямолинейных движений могут чередоваться с медленными движениями для перемещения точки Q вдоль прямых CA_i. Движение тела P при этом поступательное, его ориентация не меняется. В конце движения точка Q может быть переведена в заданное положение при помощи медленного движения.

Таким образом, установлено, что рассматриваемая система может быть переведена из произвольного начального в заданное конечное положение, если подвижная точка Q может двигаться относительно тела P с достаточно большим ускорением. При этом условии система вполне управляема.

Для реализации заданного перемещения достаточно, чтобы точка Q могла двигаться относительно тела P по некоторой (произвольной) дуге окружности S с центром в точке C и по двум произвольным отрезкам прямых CA_i, $i = 1, 2, 3$. Достаточно потребовать, например, чтобы точка Q могла двигаться относительно тела P по кривой, состоящей из отрезка прямой CA_1, дуги окружности S и отрезка прямой CA_2 (жирная кривая на рис. 1). Таким образом, точка Q может обладать лишь одной степенью свободы относительно тела P.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Твердое тело, движущееся вдоль горизонтальной плоскости при наличии сил сухого трения и управляемое посредством подвижной массы, может быть переведено из произвольного начального состояния покоя в произвольное терминальное состояние покоя за конечное время. Управляемость системы имеет место, если подвижная масса может двигаться относительно тела по некоторой кривой с достаточно большим относительным ускорением.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 20–01–00378).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Vartholomeos P., Papadopoulos E.* Dynamics, design and simulation of a novel microrobotic platform employing vibration microactuators // Trans. ASME. J. Dyn. Syst. Meas. and Control. 2006. V. 128. № 1. P. 122–133.
2. *Huda M.N., Yu H.* Trajectory tracking control of an underactuated capsubot // Autonomous Robots. 2015. V. 39. № 2. P. 183–198.
3. *Liu Y., Pavlovskaya E., Wiercigroch M.* Experimental verification of the vibro-impact capsule model // Nonlinear Dynamics. 2016. V. 83. P. 1029–1041.
4. *Черноусько Ф.Л.* Анализ и оптимизация движения тела, управляемого посредством подвижной внутренней массы // ПММ. 2006. Т. 70. В. 6. С. 915–941.
5. *Черноусько Ф.Л.* Оптимальные периодические движения двухмассовой системы в сопротивляющейся среде // ПММ. 2008. Т. 72. В. 2. С. 202–215.
6. *Черноусько Ф.Л.* Движение тела по плоскости под влиянием подвижных внутренних масс // ДАН. 2016. Т. 470. № 4. С. 406–410.
7. *Chernousko F.L.* Two-dimensional motions of a body containing internal moving masses // Meccanica. 2016. V. 51. № 12. P. 3203–3209.
8. *Chernousko F.L.* Optimal motions of bodies controlled by internal moving masses // IFAC PapersOnLine. 2018. V. 51–32. P. 1–6.

PLANE MOTIONS OF A BODY CONTROLLED BY MEANS OF A MOVABLE MASS

Academician of the RAS F. L. Chernousko[a]

[a] *Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

Plane motions of a rigid body controlled by means of an auxiliary movable point mass are considered. Dry friction forces act between the body and the horizontal plane. It is shown that under certain conditions the body can be transferred to an arbitrary state in the plane so that the system is completely controllable.

Keywords: rigid body dynamics, dry friction, control, mobile robots