ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2020, том 494, с. 21–24

ФИЗИКА

УДК 534.113

СПЕКТР ЧАСТОТ ПРОВОЛОЧНОГО МИКРО- И НАНОРЕЗОНАТОРА

© 2020 г. **Член-корреспондент РАН М. А. Ильгамов**[1,2,3,*]

Поступило 18.06.2020 г.
После доработки 18.06.2020 г.
Принято к публикации 20.06.2020 г.

Определены собственные частоты изгибных колебаний проволоки с поперечным сечением микро- и наноразмеров. Учтены поверхностные эффекты, связанные с увеличением удельной поверхности при уменьшении поперечного размера. Первый эффект обусловлен различием упругих характеристик приповерхностного слоя и основного объема материала. Второй эффект связан с взаимодействием избыточного давления на поверхности проволоки и разности площадей выпуклой и вогнутой частей поверхности, образующейся при изгибе. Рассмотрен случай шарнирного закрепления проволоки по концам. Собственные частоты определены в линейной и нелинейной постановках. Дан анализ влияния поверхностных эффектов и других входных данных на собственные частоты.

Ключевые слова: микро- и нанопроволоки, поверхностные эффекты, резонатор, спектр частот

DOI: 10.31857/S2686740020050089

ВВЕДЕНИЕ

Среди многочисленных видов применения микро- и нанопроволок, нанопленок может быть указано также использование их в качестве детекторов и сенсоров в химии, биологии и т.д. Ввиду уникального применения изучению их эксплуатационных свойств уделяется в литературе большое внимание. Например, в [1, 2] дается обзор 440 статей, посвященных главным образом консольным резонаторам из нанопленок и нанопроволок. Ввиду малой толщины пленки и проволоки адсорбированные на их поверхности молекулы вируса, ДНК и т.д. приводят к заметному уменьшению собственных частот резонатора. При этом в теории учитывается молекулярное взаимодействие в зависимости от числа молекул [2]. Чем меньше резонатор, тем выше его чувствительность.

Резонатор приводится в действие электрическим полем, магнитным полем, оптическим и электромеханическим приводом. Резонаторы могут иметь слоистую структуру в зависимости от предназначения. Например, внешние слои из пьезокристалла позволяют не только поддерживать колебания, но и генерировать слабый электрический ток при возбуждении изгибных колебаний другим источником [3].

Поскольку для рассматриваемых резонаторов характерно большое отношение поверхности к объему, то поверхностные эффекты играют важную роль в их динамике. Это отношение изменяется обратно пропорционально диаметру проволоки. При уменьшении диаметра миллиметровой проволоки до 10^2 нм удельная поверхность увеличивается в 10^4 раз. Как указано в [1, 2] и в других работах (например, [4–8]), при описании динамики учитывались поверхностное натяжение, различие упругих свойств приповерхностного слоя и основного объема, термоупругая диссипация, влияние контактирующей среды и т.д. Насколько известно, до сих пор не учитывалось взаимодействие кривизны осевой линии нанопроволоки и среднего давления на ее поверхности. Такой учет был сделан в [9] для статической задачи изгиба проволоки. При этом учитывалось также указанное выше различие упругих свойств.

В данной работе определяется спектр частот шарнирно закрепленной проволоки с учетом различия упругих свойств приповерхностного слоя и основного объема (первый поверхностный эффект), а также взаимодействия давления среды на поверхности проволоки и кривизны ее осевой линии (второй поверхностный эффект).

Согласно работам [4–9], продольная сила N, изгибающий момент M проволоки круглого по-

[1] *Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук, Москва, Россия*
[2] *Башкирский государственный университет, Уфа, Россия*
[3] *Институт механики Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук, Уфа, Россия*
**E-mail: ilgamov@anrb.ru*

перечного сечения диаметром d, распределенная поперечная сила q выражаются через деформацию ε осевой линии и ее кривизну κ формулами

$$N = K_*\varepsilon, \quad M = D_*\kappa, \quad q = pF\kappa,$$
$$K_* = K(1+\beta), \quad D_* = D(1+2\beta), \quad K = EF, \quad (1)$$
$$D = \frac{EFd^2}{16}, \quad F = \frac{\pi d^2}{4}, \quad \beta = \frac{4E_s}{Ed},$$

где E – модуль упругости основного объема проволоки, определяемый в классической теории упругости, параметр E_s относится к поверхностному слою, K_*, D_* – эффективные жесткости при растяжении и изгибе, p – равномерное давление на боковую поверхность проволоки. Размерность модуля E в МПа, а E_s – в МПа·м. Толщина приповерхностного слоя в этой модели не вводится в рассмотрение. Она неявно входит в E_s. Поэтому размерности E и E_s различаются.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

На круговую поверхность прямой проволоки длиной L и диаметром d действует равномерное давление $p_0 + p$. Для определенности под p_0 будем подразумевать атмосферное давление, которое действует также на поверхности концевых сечений $x = 0$, L проволоки. Это ее состояние под всесторонним равномерным давлением p_0 считаем ненапряженным. Избыточное давление p на концевые сечения не действует. Не учитываются внутреннее трение в материале и излучение волн в окружающую среду, а также ее присоединенная масса. Доля последней имеет порядок $\rho_f L/(\rho d)$, где ρ_f, ρ – плотности среды и материала. Для рассматриваемых резонаторов $L/d \sim 10$. В случае металлов и воздушной среды $\rho_f/\rho \sim 10^{-4}$. Соответствующая присоединенная масса мала. В случае жидкостей $\rho_f L/(\rho d) \sim 1$, который здесь не рассматривается. Если резонатор обтекается потоком газа, то даже при малом отношении $\rho_f L/(\rho d)$ необходимо учитывать влияние среды [10]. Здесь предполагается отсутствие потока газов около поверхности проволоки. Положительное направление поперечной силы q и перемещения w принято вниз. При этих допущениях распределенная поперечная сила q на проволоку определяется выражением (1). Здесь необходимо положить $\kappa = w_{xx}$, где w – прогиб, индексы x обозначают производные.

В уравнении динамики изгиба проволоки

$$M_{xx} - Nw_{xx} + \rho F w_{tt} = q \quad (2)$$

под M, N и q будем подразумевать эффективные изгибающий момент, продольную и поперечную силы по (1). Таким образом, в уравнении (2) коэффициентами D_*, K_* учитывается первый поверхностный эффект, а распределенной поперечной силой q определяется второй поверхностный эффект.

Продольная сила N образуется в результате изгиба и радиального сжатия проволоки под действием избыточного давления p. В случае отсутствия перемещения на опорах ($u = 0$ при $x = 0$, L) эта сила равна [9]

$$N \approx K_*\left(\frac{\nu_1}{2L}\int_0^L w_x^2 dx - \frac{\nu_0 p}{E}\right), \quad (3)$$
$$\nu_1 = \frac{1+\nu-2\nu^2}{1+\nu}, \quad \nu_0 = 2\nu(1-\nu),$$

где ν – коэффициент Пуассона материала.

Из (3) видно, что отклонение оси от прямой линии приводит к продольной растягивающей силе, а внешнее давление $p > 0$ – к продольной сжимающей силе. Уравнению (2) при учете $M = Dw_{xx}$, $q = pFw_{xx}$ и (3) можно придать вид

$$w_{\xi\xi\xi\xi} - \left(\alpha + \gamma\int_0^\pi w_\xi^2 d\xi\right) w_{\xi\xi} + \mu w_{tt} = 0, \quad \xi = \frac{\pi x}{L},$$
$$\alpha = \frac{p}{E}\left(\frac{4L}{\pi d}\right)^2 \frac{(1-\nu_0(1+\beta))}{(1+2\beta)}, \quad (4)$$
$$\gamma = \frac{8\nu_1(1+\beta)}{\pi d^2(1+2\beta)}, \quad \mu = \frac{\rho}{E}\left(\frac{2L}{\pi d}\right)^4 \frac{d^2}{(1+2\beta)}.$$

Здесь параметрами α, γ и μ определяется влияние на динамический изгиб обоих рассматриваемых поверхностных эффектов. Если они не учитываются, то $\alpha = 0$, $\pi\gamma = 8d^{-2}$, $\mu = (\rho/Ed^2)(2L/\pi)^4$.

ЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Рассмотрим наиболее простой случай линейных колебаний проволоки, шарнирно закрепленной на обеих концевых опорах ($w = 0$, $w_{\xi\xi} = 0$ при $\xi = 0, \pi$). Из (4) при функции прогиба

$$w = \sum_{n=1} W_n \sin n\xi \sin \omega_n t, \quad (5)$$

удовлетворяющей указанным условиям, получаем

$$\omega_n = \Omega_n\sqrt{(1+2\beta)\left(1+\frac{\alpha}{n^2}\right)}, \quad \Omega_n^2 = \frac{Ed^2}{\rho}\left(\frac{n\pi}{2L}\right)^4. \quad (6)$$

Здесь Ω_n – собственные частоты изгибных колебаний проволоки с шарнирными опорами, определенные без учета поверхностных эффектов.

Оценим изменение спектра частот ω_n за счет поверхностных эффектов. Приведем значения модулей для двух материалов [4–6]: $E = 0.62 \times 10^5$ МПа, $E_s = 0.84 \times 10^{-5}$ МПа · м (Cu), $E = 0.72 \times 10^5$ МПа, $E_s = -1.24 \times 10^{-5}$ МПа · м (Al). Соответствующие параметры равны $\beta d = 5.42 \times 10^{-10}$ м (Cu), $\beta d =$

$= -6.89 \times 10^{-10}$ м (Al). Если $d = 10^{-7}$ м (10^2 нм), то первый поверхностный эффект не оказывает никакого влияния на значение ω_n. При $d \leq 10$ нм начинается заметное влияние этого эффекта. Таким образом, он зависит только от материала и диаметра проволоки. Как видно из (6), в зависимости от знака $\beta(E_s)$ первый эффект повышает или понижает собственные частоты.

Подкоренное выражение в (6) выразим также через входные параметры. С учетом обозначений (4) имеем

$$\omega_n = \Omega_n\sqrt{1+\frac{8E_s}{Ed}+\frac{p}{E}\left(\frac{4L}{n\pi d}\right)^2\left[1-2\nu(1-\nu)\left(1+\frac{4E_s}{Ed}\right)\right]}. \quad (7)$$

Второй эффект повышает частоты ω_n в зависимости от отношений pE^{-1} и Ld^{-1}. Некоторое влияние на него оказывает также второй эффект. Если $p = 1$ МПа, $Ld^{-1} = 20$, $\nu = 0.3$, $n = 1$, то последний член подкоренного выражения (7) мал по сравнению с единицей. При $p = 10$ МПа, $Ld^{-1} = 40$ он составляет около 0.25. Таким образом, при этих данных второй поверхностный эффект приводит к повышению первой собственной частоты ($n = 1$) более чем на 10%.

Как видно из (6) и (7), влияние второго поверхностного эффекта быстро убывает для высших гармоник. Это объясняется изменением знака кривизны по длине проволоки, что ведет к самоуравновешиванию сил, направленных в разные стороны в соответствии с изменением знака кривизны.

В том случае, когда избыточное давление p отрицательное (вакуумирование), собственная частота ω_n уменьшается ($\omega_n < \Omega_n$). В газовой среде абсолютное значение p не может быть больше, чем давление сборки p_0. Наибольшее снижение ω_n происходит для первой гармоники ($n = 1$). По линейной теории ω_1 обращается в нуль при $\alpha = -1$ или по (4) при избыточном давлении

$$p = -\frac{E(1 + 2\beta)}{1 - 2\nu(1 - \nu)(1 + \beta)}\left(\frac{\pi d}{4L}\right)^2. \quad (8)$$

Значение давления (8) является критическим [9].

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

При определении первой частоты нелинейных колебаний в (5) принимаем $n = 1$. Приближенно ее значение находим подстановкой в уравнение (4) функции $W_1\sin\xi\,\sin\omega_1 t$, умножением на эту функцию и интегрированием уравнения по ξ в пределах от 0 до π и по t – в пределах от 0 до $2\pi/\omega_1$

$$\omega_1 = \Omega_1\sqrt{(1 + \alpha)(1 + 2\beta) + \frac{3\nu_1(1 + \beta)}{8d^2}W_1^2}. \quad (9)$$

Как видно из (9), положительные значения параметров α и β приводят к возрастанию собственной частоты. Из литературы хорошо известно влияние нелинейности на частоту. Оно также усиливается при положительном значении β, но не зависит от параметра α. Так же, как в линейном случае, отрицательные значения α и β приводят к снижению собственной частоты. Однако в нелинейной теории при $\alpha = -1$ частота ω_1 не обращается в нуль.

Если одна из опор допускает свободное осевое перемещение проволоки, то вместо условия $u = 0$ на опорах имеем $N = 0$. При этом по всей длине проволоки $N = 0$. Тогда в (2)–(4) $N = 0$, $\nu_0 = 0$ и нелинейный член также отсутствует. При этом по данной модели нелинейности формула (9) совпадает с выражением (6) при $n = 1$. Если избыточное давление p действует на подвижные опоры, то $N = -pF$. При этом второй эффект не проявляется [9].

Численные значения параметра β или E_s для многих материалов еще не определены ввиду сложности и необходимой высокой точности экспериментов. Последние носят разнообразный характер. Одним из возможных способов определения E_s при всех других известных данных и нулевом избыточном давлении ($p = 0$, $\alpha = 0$) является экспериментальное определение первой собственной частоты (ω_1) и использование формул (7), (9) $1 + 2\beta = ((\omega_1)/\Omega_1)^2$ или

$$E_s = \frac{2\rho L^4(\omega_1)^2}{\pi^4 d} - \frac{Ed}{8}. \quad (10)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По классической теории спектр частот Ω_n изгибных колебаний проволоки с шарнирным закреплением ее концов определяется формулой (6). В литературе установлено, что при диаметре проволоки менее 10^{-7} м начинает проявляться поверхностный эффект, определяемый безразмерным параметром β (1). Для одних материалов значение β является положительным, что в соответствии с (6)–(8) приводит к увеличению частот резонанса ω_n по сравнению с Ω_n. Для других материалов β имеет отрицательное значение, тогда $\omega_n < \Omega_n$. Вид граничных условий не влияет на первый поверхностный эффект. В сообщении указан один из возможных способов определения параметров β или E_s исходя из экспериментального значения первой собственной частоты (10).

Второй поверхностный эффект, определяемый безразмерным параметром α (4), зависит от отношений избыточного давления на поверхности к модулю упругости материала и длины проволоки между опорами к ее диаметру. Имеется слабая зависимость значения α от коэффициента

Пуассона материала и параметра β. Значение α сильно зависит от вида закреплений концов проволоки, так как они влияют на изменение кривизны осевой линии по длине. Положительное избыточное давление приводит к увеличению частот ω_n по сравнению с Ω_n, отрицательное значение (вакуумирование) к $\omega_n < \Omega_n$. При достижении отрицательным избыточным давлением критического значения первая собственная частота может снижаться до нуля. Второй эффект проявляется не только при малых диаметрах проволоки.

Эти результаты не могут быть получены без учета второго поверхностного эффекта, обусловленного взаимодействием давления газовой среды и разности площадей выпуклой и вогнутой частей поверхности проволоки, образующейся при изгибе. Определение спектра частот резонатора слоистой структуры, а также при наличии присоединенных масс различной природы является предметом отдельного исследования.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках государственного задания (проекты № 0246-2019-0088, № 0049-2015-0040) и РФФИ (грант 18–01–00150).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Raman A., Melcher J., Tung R.* // Nano Today. 2008. V. 3. № 1–2. P. 20–27.
2. *Eom K., Park H.S., Yoon D.S., Kwon K.* // Phys. Rep. 2011. V. 503. № 4–5. P. 115–163.
3. *Wang F., Abedini A., Alghamdi T., Onsorynezhad S.* // Int. J. Struct. Stab. Dyn. 2019. № 4. P. 1–17.
4. *Gurtin M.E., Murdoch A.I.* // Int. J. Solids Struct. 1978. V. 14. P. 431–440.
5. *He J., Lilley C.M.* // Appl. Phys. Lett. 2008. V. 93. 263108. P. 1–3.
6. *He Q., Lilley C.M.* // J. Appl. Phys. 2012. V. 112. 074322. P. 1–7.
7. *Wu J.X., Li X.F., Tang A.Y., Lee K.Y.* // J. Vib. Control. 2017. V. 23. P. 2064–2077.
8. *Ilgamov M.A.* Static Problems of Hydroelasticity. M.: Nauka, 1998. 208 p.
9. *Ильгамов М.А.* // ДАН. 2019. Т. 488. № 2. С. 137–141.
10. *Dowell E.A., Ilgamov M.A.* Studies in Nonlinear Aeroelasticity. N.Y., L., Tokyo: SV, 1988. 456 p.

FREQUENCY SPECTRUM OF A WIRE MICRO- AND NANORESONATOR

Corresponding Member of the RAS M. A. Ilgamov[a,b,c]

[a] *Blagonravov Institute of Engineering Science, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

[b] *Bashkir State University, Ufa, Russian Federation*

[c] *Institute of Mechanics, Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russian Federation*

Eigenfrequencies of flexural vibrations are determined for wire with micro and nanosized cross-sections. Account is taken of the surface effects associated with an increase in the specific surface while reducing the cross-sectional area. The first effect occurs due to the difference in elastic characteristics of the surface layer and the main volume of the material. The second effect is associated with the interaction between the excess pressure on the wire surface and the difference in the areas of convex and concave surfaces formed by bending. Consideration is given to the case of the wire hinging attachment at both ends. Eigenfrequencies are determined in the linear and nonlinear programming formulations. Analysis is given concerning the influence of surface effects and other input data on the eigenfrequencies.

Keywords: micro- and nanowires, surface effects, resonator, frequency spectrum