ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2020, том 494, с. 47–50

МЕХАНИКА

УДК 531.36+517.9

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИРКУЛЯЦИОННЫХ СИСТЕМ

© 2020 г. Академик РАН В. В. Козлов[1,*]

Поступило 17.06.2020 г.
После доработки 17.06.2020 г.
Принято к публикации 22.06.2020 г.

Изучается устойчивость линейных механических систем в непотенциальном силовом поле. При наличии циркуляционных сил система не будет консервативной, однако ее всегда можно представить в гамильтоновой форме. Когда потенциальная энергия имеет максимум, то равновесие неустойчиво независимо от присутствия циркуляционных сил.

Ключевые слова: циркуляционная сила, гамильтонова система, теорема Фробениуса, степень неустойчивости

DOI: 10.31857/S2686740020050107

1. ГАМИЛЬТОНОВО ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЦИРКУЛЯЦИОННЫХ СИСТЕМ

Речь пойдет о линейных системах дифференциальных уравнений второго порядка

$$M\ddot{x} + Px = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Здесь $M^T = M > 0$ – симметрическая положительно определенная матрица, а P – произвольная квадратная матрица n-го порядка. Она однозначно представляется в виде суммы

$$P = K + N,$$

где K – симметричная, а N – кососимметрическая матрицы. Квадратичная форма

$$T = \frac{1}{2}(M\dot{x}, \dot{x})$$

будет кинетической энергией системы, а

$$V = \frac{1}{2}(Kx, x)$$

ее потенциальная энергия. Слагаемое $-Nx$ в (1) представляет собственно циркуляционную силу. Из-за наличия циркуляционных сил полная энергия $T + V$ в общем случае не сохраняется. Теория устойчивости таких систем подробно обсуждается в [1].

Т е о р е м а 1. *Невырожденной линейной подстановкой уравнение* (1) *приводится к линейной гамильтоновой системе с n степенями свободы.*

Как следствие получаем, что спектр линейного уравнения (1) симметричен не только относительно вещественной оси комплексной плоскости, но и относительно чисто мнимой оси. Этот факт хорошо известен (см., например, [1]). Менее очевидно, что линейное уравнение (1) всегда допускает квадратичный первый интеграл. Более того, согласно Уинтнеру [2] и Вильямсону [3], каждая линейная гамильтонова система вполне интегрируема: она имеет n независимых квадратичных интегралов с нулевыми попарными скобками Пуассона. Кроме полного набора квадратичных интегралов, уравнение (1), как и любая гамильтонова система, допускает еще интегральные инварианты различных порядков. Любопытно отметить, что задачи о бифуркациях собственных значений линейных гамильтоновых систем и циркуляционных систем обычно рассматриваются независимо (а зачастую и параллельно) (см., например, [4]).

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Как известно, любую вещественную ($n \times n$)-матрицу можно представить в виде произведения двух вещественных симметрических матриц, первая из которых невырождена. Этот факт был отмечен еще Фробениусом в 1910 г.; его простое доказательство содержится в [5].

Приводя кинетическую энергию к сумме квадратов, получаем, что $M = I$. После этого полагаем $P = AB$, где A и B – симметрические матрицы, причем $|A| \neq 0$. Но тогда уравнение (1) представляется в виде уравнений Лагранжа

$$A^{-1}\ddot{x} + Bx = 0$$

[1] *Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия*
**E-mail: kozlov@pran.ru*

с лагранжианом

$$\frac{1}{2}(A^{-1}\dot{x},\dot{x})-\frac{1}{2}(Bx,x).$$

Их можно записать в виде линейных уравнений Гамильтона

$$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial y},\quad \dot{y}=-\frac{\partial H}{\partial x} \tag{2}$$

с квадратичным гамильтонианом

$$H=\frac{1}{2}(Ay,y)+\frac{1}{2}(Bx,x). \tag{3}$$

Что и требовалось.

Гамильтонова система (2) имеет следующий явный вид:

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}^{\bullet}=\Lambda\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix},\quad \text{где}\quad \Lambda=\begin{bmatrix}0 & A\\-B & 0\end{bmatrix}.$$

Степень неустойчивости u линейного уравнения (1) – это число собственных значений матрицы Λ, лежащих в правой комплексной полуплоскости. Через s обозначим степень устойчивости; это половина чисто мнимых собственных значений Λ. По-другому, s равно количеству вещественных отрицательных собственных чисел матрицы P (считая с кратностями).

Ясно, что $|\Lambda|=|P|$. Пусть $|P|\neq 0$. Это равносильно условию изолированности равновесия $x=0$ циркуляционной системы. Пусть i^+ и i^- – положительный и отрицательный индексы инерции квадратичной формы (3). Так как форма (3) невырождена, то

$$2(u+s)=i^-+i^+=2n. \tag{4}$$

Имеют место неравенства

$$u\le\min(i^-,i^+), \tag{5}$$

$$|i^+-i^-|\le 2s. \tag{6}$$

Эти неравенства эквивалентны ввиду (4). Неравенство (5) получено впервые в [6] для механических систем с гироскопическими силами. Для общих гамильтоновых систем оно установлено в [7]. В этой работе получено даже более сильное неравенство: s можно заменить на количество пар чисто мнимых собственных значений с жордановыми клетками нечетного порядка.

Упомянем еще обобщенную теорему Кельвина:

$$u\equiv i^-\pmod 2. \tag{7}$$

Так как $i^+-i^-=2n$, то в (7) i^- можно заменить на i^+. Это сравнение эквивалентно следующему факту: степень неустойчивости четна (нечетна) тогда и только тогда, когда $|P|>0$ ($|P|<0$).

Заключения (5)–(7) можно рассматривать как дополнения к классической теореме Фробениуса о факторизации матриц.

При таком подходе проблема устойчивости циркуляционных систем упирается в эффективное решение задачи факторизации. Правда, можно поступать по-другому, задавая с самого начала матрицу P в виде произведения уже известных симметрических матриц. Например, пусть матрица A или B положительно определена. Тогда критерий устойчивости циркуляционной системы сводится к условию положительной определенности матрицы B или A соответственно. Например, пусть $B>0$. Тогда из уравнений Гамильтона (2) с гамильтонианом (3) получаем уравнение второго порядка для импульсов

$$B^{-1}\ddot{y}+Ay=0.$$

После этого заключение об устойчивости вытекает из классической теоремы Лагранжа. Кстати сказать, вопрос о справедливости обратной теоремы Лагранжа в нелинейном случае является трудной и пока не решенной проблемой (см. [8]).

2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

Чтобы предъявить полный набор инволютивных квадратичных интегралов, надо, согласно Вильямсону [3], сначала решить спектральную задачу: найти собственные числа и собственные векторы линейной гамильтоновой системы. Однако в типичном случае можно обойтись без этого и сразу указать полный инволютивный набор.

Теорема 2. *Линейная гамильтонова система* (2) *с гамильтонианом* (3) *допускает цепочку квадратичных первых интегралов*

$$\begin{gathered}f_1=\frac{1}{2}(Ay,y)+\frac{1}{2}(Bx,x),\\ f_2=\frac{1}{2}(ABAy,y)+\frac{1}{2}(BABx,x),\\ f_3=\frac{1}{2}(ABABAy,y)+\frac{1}{2}(BABABx,x),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{gathered} \tag{8}$$

с нулевыми попарными скобками Пуассона. Если спектр Λ *простой, то квадратичные формы* $f_1,f_2,\ldots,f_n$ *функционально независимы.*

Это – следствие общего результата о линейных гамильтоновых системах, указанного в [9]. Очевидно, все квадратичные формы (8) имеют одну и ту же сигнатуру. Тем не менее, их можно использовать для решения задачи об устойчивости. Как пример укажем один геометрический критерий устойчивости. Введем интегральный конус

$$C=\{f_1=\ldots=f_n=0\}$$

в $2n$-мерном фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n} = \{x, y\}$, содержащий начало координат.

Теорема 3. *Если $C = \{0\}$, то равновесное состояние $x = y = 0$ устойчиво. Если это равновесие устойчиво и спектр матрицы Λ простой, то $C = \{0\}$.*

Следовательно, в случае простого спектра циркуляционная система устойчива тогда и только тогда, когда интегральный конус вырождается в начало координат.

Чтобы пояснить содержание теорем 2 и 3, приведем иллюстративный пример. Пусть $n = 2$, $M = I$ – единичная матрица, а

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

В этом случае спектр циркуляционной системы составляет комплексная четверка. Так что имеется неустойчивость типа флаттера. Здесь $P = AB$, где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Одним из первых интегралов будет гамильтониан

$$f_1 = H = y_1 y_2 + \frac{1}{2}(-x_1^2 + x_2^2).$$

Это невырожденная квадратичная форма с индексами инерции $i^+ = i^- = 2$. Другой квадратичный интеграл получается по формулам (8):

$$f_2 = -x_1 x_2 + \frac{1}{2}(-y_2^2 + y_1^2).$$

Конус $C = \{f_1 = f_2 = 0\}$ не сводится только к началу координат. Действительно, полагая $y_1 = x_2$, $y_2 = -x_1$, из уравнений $f_1 = 0$ и $f_2 = 0$ получим одно и то же квадратичное уравнение

$$2x_1 x_2 - x_1^2 + x_2^2 = 0,$$

которое определяет на плоскости $\{x_1, x_2\}$ две различные прямые. Следовательно, по теореме 3, $u \geq 1$. С другой стороны, согласно (5) и (7), $u \leq 2$ и четно. Значит, $u = 2$.

3. ТЕОРЕМА О НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Теорема 4. *Если в положении равновесия $x = 0$ потенциальная энергия имеет максимум (не обязательно строгий), то это равновесие неустойчиво. Более того, в этом случае спектр линейной системы* (1) *не содержит ни одной пары чисто мнимых чисел.*

Пусть $|P| \neq 0$. Тогда из (4)–(6) вытекает, что $u = i^- = i^+ = n$. В частности, гамильтониан (3) будет нейтральной квадратичной формой.

Для доказательства теоремы воспользуемся известной теоремой о вириале:

$$\ddot{J} = 4(T - V), \tag{9}$$

где $J = (Mx, x)$ – момент инерции циркуляционной системы относительно положения равновесия. Так как $V \leq 0$, то J как функция времени будет выпуклой. В сколь угодно малой окрестности состояния равновесия в начальный момент времени зададим состояние с положительной кинетической энергией. Тогда $J(t) \to \infty$ при $t \to +\infty$. Что доказывает неустойчивость равновесия.

Чтобы выяснить структуру спектра, воспользуемся следующим вспомогательным утверждением.

Лемма. *Если $S^T = S > 0$ и $\Omega^T = -\Omega$, то $|S + \Omega| > 0$.*

Действительно, $C^T SC = I$ для некоторой невырожденной матрицы C. Далее, знак определителя $|S + \Omega|$ совпадает со знаком $|I + \Omega'|$, где $\Omega' = C^{\mathrm{T}} \Omega C$ – кососимметрическая матрица. Но $|I + \Omega'| \neq 0$, иначе $\lambda = -1$ было бы собственным числом кососимметрической матрицы Ω'. Итак, функция $x \mapsto |S + x\Omega|$ сохраняет знак при всех $x \in \mathbb{R}$. Остается вспомнить, что она положительна при $x = 0$. Что и требовалось.

Предложим теперь, что $\lambda = i\omega$, $\omega \in \mathbb{R}$, будет собственным значением. Тогда

$$|-\omega^2 M + K + N| = (-1)^n |\omega^2 M - K - N| = 0. \tag{10}$$

Так как $V \leq 0$, то симметрическая матрица $\omega^2 M - K$ положительно определена при $\omega \neq 0$. Но тогда, согласно лемме, равенство (10) может выполняться лишь при $\omega = 0$. Теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть n нечетно и квадратичная форма V отрицательно определена. Тогда при всех N спектр линейной системы* (1) *будет иметь пару вещественных чисел $\pm\lambda \neq 0$.*

Действительно, характеристический многочлен

$$f(\lambda) = |\lambda^2 I + P|$$

стремится к $+\infty$ при $\lambda \to \pm\infty$, а при $\lambda = 0$ он равен $|P|$. Если $N = 0$, то по условию теоремы $|P| = -|K| < 0$. Однако, согласно лемме, знак определителя $|K + N|$ не зависит от выбора кососимметрической матрицы N. Значит, $f(0) < 0$ и поэтому многочлен f имеет два ненулевых вещественных корня. Что и требовалось.

Теоремы 4 и 5 полезно сравнить с условием флаттера

$$\|N\|^2 > \|K\|^2 - \frac{1}{n}(\mathrm{tr}K)^2,$$

установленным Р. Булатовичем [10]. Здесь $\|A\| = [\mathrm{tr}(A^{\mathrm{T}}A)]^{1/2}$ – норма матрицы по Фробениусу. Оно показывает неустойчивость равновесия при больших циркуляционных силах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kirillov O.N.* Nonconservative stability problems of modern physics. B.; Boston: De Gruyter, 2013. 429 p.
2. *Wintner A.* // Ann. Math. Pura Appl. 1934. V. 13. № 1. P. 105–112.
3. *Williamson J.* // Amer. J. Math. 1940. V. 62. P. 881–911.
4. *Майлыбаев А.А., Сейранян А.П.* Многопараметрические задачи устойчивости. Теория и приложения в механике. М.: Физматлит, 2009. 400 с.
5. *Bosch A.J.* // The American Math. Monthly. 1986. V. 93. № 6. P. 462–464.
6. *Wimmer H.K.* // Linear Algebra and Appl. 1974. V. 8. P. 337–343.
7. *Карапетян А.А., Козлов В.В.* // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 2. С. 186–192.
8. *Паламодов В.П.* // УМН. 2020. Т. 75. № 3. С. 107–122.
9. *Kozlov V.V.* // Regular and Chaotic Dynamics. 2018. V. 23. № 1. P. 26–46.
10. *Bulatovic R.M.* // Phys. Lett. A. 2011. V. 375. P. 3826–3828.

ON THE STABILITY OF CIRCULATORY SYSTEMS

Academician of the RAS V. V. Kozlov[a]

[a] *Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

The stability of linear mechanical systems in nonpotential force fields is studied. Under the presence of circulatory forces the system is nonconservative, yet it can be always presented in a Hamiltonian form. A point where the potential energy has its maximum is an unstable equilibrium, regardless on the presence of circulatory forces.

Keywords: circulatory force, Hamiltonian system, Frobenius theorem, instability degree