МЕХАНИКА

УДК 539.3

МЕТОД БЛОЧНОГО ЭЛЕМЕНТА В РАЗЛОЖЕНИИ РЕШЕНИЙ СЛОЖНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ

© 2020 г. Академик РАН В. А. Бабешко[1,2,*], О. В. Евдокимова[1], О. М. Бабешко[2], В. С. Евдокимов[2]

Поступило 20.09.2020 г.
После доработки 20.09.2020 г.
Принято к публикации 25.09.2020 г.

Строится, наверно, впервые, точное решение в первом квадранте плоской граничной задачи второго рода для динамических уравнений упругости Ламе, разложенное по решениям граничных задач для уравнения Гельмгольца. Эти решения представлены в форме упакованных блочных элементов.

Ключевые слова: граничные задачи, метод блочного элемента, упакованные блочные элементы, уравнения Ламе, уравнения Гельмгольца

DOI: 10.31857/S2686740020060048

В работе дается решение векторной граничной задачи, разложенное по упакованным блочным элементам, являющимся решениями скалярных граничных задач в неклассических областях. Решения ряда векторных дифференциальных уравнений в частных производных механики сплошных сред, электромагнитных явлений, теории поля допускают представления в виде разложений по решениям скалярных уравнений. Этот подход удобен при решении задач во всем пространстве. При решении граничных задач сложность применения этого подхода состоит в трудности удовлетворения граничных условий. В ряде классических областей это удается сделать и получить точные решения граничных задач. К числу таких классических областей относятся полупространство, шар, цилиндр, а также некоторые области, получаемые в результате представлений групп преобразований пространства. В то же время для ряда важных областей, отличных от классических, например, клиновидных, построение точных решений этим подходом пока не удавалось осуществить. В настоящей работе, наверно, впервые, этим подходом строится точное решение в первом квадранте плоской граничной задачи второго рода для динамических уравнений Ламе. Известно, что неограниченность области делает неэффективным использование в этой граничной задаче численных методов. Решение строится методом блочного элемента при произвольных граничных условиях. Это открывает возможность изучить различные свойства решений, изменяя воздействия на границе.

Построение точных решений граничных задач в практических применениях позволяет выявлять свойства и явления, которые оказывались упущенными при использовании различных приближенных подходов. К их числу относятся приближенные аналитические и численные методы.

Так, разработанный недавно метод блочного элемента [1] позволил выявить условия возникновения некоторых типов землетрясений [2, 3]. Этот же метод дал возможность обнаружить существование нового типа трещин, дополняющих трещины Гриффитса [4]. Исследованию граничных задач для уравнения Ламе посвящено огромное количество работ, содержащих как аналитические, так и численные исследования, выполненные более чем за полтора века. Все публикации в этой области невозможно охватить. Отметим те из них, где удавалось построить точные аналитические решения некоторых типов граничных задач для векторных уравнений Ламе в неклассических областях. Опустим из рассмотрения многочисленные работы, посвященные граничным задачам в полупространстве и слоистой среде, где преобразование Фурье решает проблему. В сферических областях следует отметить работы, посвященные построению собственных векторных функций [5]. Этот подход развивался для применения в цилиндрических, эллиптических, клиновидных, конических областях [6, 7].

[1] *Южный научный центр Российской академии наук, Ростов-на-Дону, Россия*
[2] *Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия*
**E-mail: babeshko41@mail.ru*

В настоящей работе развивается подход, основанный на возможности разложения решения векторного уравнения Ламе на потенциальную и вихревую составляющие, каждая из которых описывается в динамическом случае решениями уравнения Гельмгольца [8]. Сложность применения этого метода в граничных задачах в неклассических областях объясняется трудностью удовлетворения граничных условий. Поэтому в работах [8–10], в которых построены важные соотношения представления решений векторных граничных задач скалярными, решения построены только для полупространства. В работе [11] приводится решение этой граничной задачи, построенное прямым применением к ней метода блочного элемента. Это решение имеет довольно сложный вид и не может просто быть проанализировано аналитически. Представление этого решения в виде разложения по блочным элементам, являющимися решениями граничных задач для уравнения Гельмгольца, делает это исследование выполнимым.

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим плоскую граничную задачу второго рода для системы уравнений Ламе, поставленную в первом квадранте при гармонических воздействиях на границе. Ранее точное ее решение получить не удавалось, однако метод блочного элемента в настоящей работе дает возможность это сделать в форме упакованных векторных блочных элементов.

В первом квадранте динамические уравнения Ламе после исключения члена $\exp(-i\omega t)$ имеют вид

$$\begin{gathered}(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_1}+\mu\Delta u_1+k^2u_1=0,\\ \theta=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2},\quad k^2=\rho\omega^2,\\ (\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_2}+\mu\Delta u_2+k^2u_2=0,\\ x_1,x_2\in\Omega,\quad \Delta u=\frac{\partial^2u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2u}{\partial x_2^2}.\end{gathered}\tag{1}$$

Здесь $u_n(x_1,x_2)$ – компоненты векторов перемещений в точке x_1,x_2, Ω – область первого квадранта $x_1\ge 0$, $x_2\ge 0$, λ, μ – параметры Ламе, ρ – плотность материала деформируемого тела, ω – частота внешних гармонических воздействий на границе, задаваемых комплексной функцией $\exp(-i\omega t)$, где t – время. В задаче первого рода значения напряжений на границах квадранта обозначаются на оси абсцисс функциями $X_{x_2x_1}(x_1,0)$, $Y_{x_2x_1}(x_1,0)$ и $X_{x_1x_1}(0,x_2)$, $Y_{x_1x_2}(0,x_2)$ – на оси ординат. Нормальные к границе напряжения обозначаются символом X, а касательные – Y. В задаче второго рода на границе первого квадранта задаются компоненты векторов перемещения $u_1(x_1,0), u_2(x_1,0)$ и $u_1(0,x_2)$, $u_2(0,x_2)$.

РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ПРИМЕНЕНИЕМ БЛОЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Достаточно давно было замечено, что уравнения Ламе как в статическом, так и в динамическом случаях обладают свойством представления решения в виде суммы потенциальной и вихревой составляющих. Оно использовалось в большом числе работ, но только в простых областях – полупространстве, слоистой среде и других областях, получаемых представлениями групп преобразований пространства [5–10].

Это связано с тем, что при разложении решения на потенциальную и вихревую составляющие отсутствовала возможность выполнения подобного разложения в граничных условиях. По мнению авторов, в настоящей работе выполнено определенное продвижение в решении проблемы граничных условий в этом подходе.

Следуя [8], примем разложение решения уравнений Ламе в следующей форме:

$$\begin{gathered}u_1(x_1,x_2)=\partial_1\varphi(x_1,x_2)+\partial_2\psi(x_1,x_2),\\ u_2(x_1,x_2)=\partial_2\varphi(x_1,x_2)-\partial_1\psi(x_1,x_2),\\ \partial_1=\frac{\partial}{\partial x_1},\quad \partial_2=\frac{\partial}{\partial x_2}.\end{gathered}\tag{2}$$

Здесь приняты обозначения

$$\begin{gathered}(\Delta+p_1^2)\varphi=0,\quad (\Delta+p_2^2)\psi=0,\\ p_1^2=k_1^2(\lambda+2\mu)^{-1},\quad p_2^2=k_1^2\mu^{-1},\\ \varphi(x_1,0)=f_1(x_1,0),\quad \varphi(0,x_2)=f_2(0,x_2),\\ \psi(x_1,0)=g_1(x_1,0),\quad \psi(0,x_2)=g_2(0,x_2).\end{gathered}\tag{3}$$

Функции f_m, g_m, $m=1,2$, в граничных условиях являются произвольными, удовлетворяющими лишь условиям корректности постановки граничной задачи. В частности, их можно брать из пространства медленно растущих обобщенных функций, в котором ищутся решения граничной задачи в области Ω.

Рассматривается случай граничной задачи Ламе второго рода. На осях координат задаются условия вида $u_n(x_1,0)$, $u_n(0,x_2)$, $n=1, 2$.

Таким образом, для решений уравнения Гельмгольца формируются граничные условия при $x_2\to 0$ вида

$$\begin{gathered}\partial_1\varphi(x_1,x_2)+\partial_2\psi(x_1,x_2)=u_1(x_1,0),\\ \partial_2\varphi(x_1,x_2)-\partial_1\psi(x_1,x_2)=u_2(x_1,0).\end{gathered}\tag{4}$$

Аналогично при $x_1 \to 0$

$$\begin{aligned}
&\partial_1\varphi(x_1,x_2) + \partial_2\psi(x_1,x_2) = u_1(0,x_2),\\
&\partial_2\varphi(x_1,x_2) - \partial_1\psi(x_1,x_2) = u_2(0,x_2).
\end{aligned} \tag{5}$$

Решение граничной задачи для уравнений Ламе с граничными условиями (4), (5) требует построения решений граничных задач для уравнений Гельмгольца при произвольных граничных условиях (3). Это возможно сделать, используя метод блочного элемента, который описан в работах [1—4]. Примеры решения различных граничных задач с использованием решений уравнений Гельмгольца имеются в работах [12—15]. Решение граничной задачи в первом квадранте, выполненное методом блочного элемента, имеется в [11]. В упакованном виде в первом квадранте в случае граничной задачи Дирихле решения имеют вид

$$\begin{gathered}
\varphi(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi^2}\iint_{R^2}\frac{\omega_1(\alpha_1,\alpha_2)}{(\alpha_1^2+\alpha_2^2-p_1^2)}e^{-i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}d\alpha_1 d\alpha_2,\\
\psi(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi^2}\iint_{R^2}\frac{\omega_2(\alpha_1,\alpha_2)}{(\alpha_1^2+\alpha_2^2-p_2^2)}e^{-i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}d\alpha_1 d\alpha_2,\\
\omega_1 = \left[\frac{\alpha_1}{\alpha_{11+}}-1\right]\left\langle F_1(\alpha_2) - \frac{F_1(\alpha_{21+})\alpha_2}{\alpha_{21+}}\right\rangle +\\
+\left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}}-1\right]\left\langle F_2(\alpha_1) - \frac{\alpha_1F_2(\alpha_{11+})}{\alpha_{11+}}\right\rangle,\\
\omega_2 = \left[\frac{\alpha_1}{\alpha_{12+}}-1\right]\left\langle G_1(\alpha_2) - \frac{G_1(\alpha_{22+})\alpha_2}{\alpha_{22+}}\right\rangle +\\
+\left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{22+}}-1\right]\left\langle G_2(\alpha_1) - \frac{\alpha_1G_2(\alpha_{12+})}{\alpha_{12+}}\right\rangle,\\
\alpha_{11+} = i\sqrt{\alpha_2^2-p_1^2},\quad \alpha_{21+} = i\sqrt{\alpha_1^2-p_1^2},\\
\alpha_{12+} = i\sqrt{\alpha_2^2-p_2^2},\quad \alpha_{22+} = i\sqrt{\alpha_1^2-p_2^2}.
\end{gathered} \tag{6}$$

Разрезы у многозначных функций диктуются требованием выполнения автоморфизмов [1]. В соответствии с построением, для приведенных блочных элементов справедливы свойства (3). Используя их, введем следующие обозначения решений уравнений Гельмгольца:

$$\begin{gathered}
\varphi(x_1,x_2) \equiv \varphi[x_1,x_2,f_1(\xi_1,0),f_2(0,\xi_2)] \to f_1(x_1,0),\\
0 < x_2 \ll 1,\\
\varphi(x_1,x_2) \equiv \varphi[x_1,x_2,f_1(\xi_1,0),f_2(0,\xi_2)] \to f_2(0,x_2),\\
0 < x_1 \ll 1,\\
\psi(x_1,x_2) \equiv \psi[x_1,x_2,g_1(\xi_1,0),g_2(0,\xi_2)] \to g_1(x_1,0),\\
0 < x_2 \ll 1,\\
\psi(x_1,x_2) \equiv \psi[x_1,x_2,g_1(\xi_1,0),g_2(0,\xi_2)] \to g_2(0,x_2),\\
0 < x_1 \ll 1.
\end{gathered}$$

Эти свойства позволяют найти способ удовлетворения граничным условиям граничной задачи для уравнений Ламе. Ниже условимся обозначать интегралы функции $w(x_1,x_2)$ по переменным x_1 и x_2 первого порядка формулами $\partial_1^{(-1)}w(x_1,x_2)$ и $\partial_2^{(-1)}w(x_1,x_2)$ соответственно. Так, имеют место представления

$$\begin{aligned}
\partial_1^{(-1)}w(x_1,x_2) &= \int_0^{x_1} w(\xi_1,x_2)d\xi_1,\\
\partial_2^{(-1)}w(x_1,x_2) &= \int_0^{x_2} w(x_1,\xi_2)d\xi_2.
\end{aligned} \tag{7}$$

Очевидно

$$\begin{aligned}
\partial_1\partial_1^{(-1)}w(x_1,x_2) &= w(x_1,x_2),\\
\partial_2\partial_2^{(-1)}w(x_1,x_2) &= w(x_1,x_2).
\end{aligned}$$

При решении рассматриваемого векторного уравнения Ламе в области Ω, представляющей первый квадрант с двумя пересекающимися границами, для удовлетворения граничным условиям оказывается недостаточно только по одному упакованному блочному элементу каждой граничной задачи для уравнения Гельмгольца. Каждый блочный элемент является решением уравнений Гельмгольца, отвечающего потенциальной и вихревой составляющей решений. Этого оказалось достаточно при решении граничной задачи для уравнения Ламе в полупространстве, имеющем лишь одну прямолинейную границу, выполненной в [8]. Выяснилось, что в случае полигональной области число блочных элементов скалярных задач надо брать в таком количестве, сколько прямолинейных фрагментов содержит граница полигональной области. Таким образом, для описания решения уравнения Ламе в первом квадранте, содержащем в границе два прямолинейных фрагмента, понадобилось взять по два блочных элемента потенциальной и вихревой составляющей решения.

Тогда точное решение второй граничной задачи для уравнения Ламе в первом квадранте представимо в виде

$$\begin{gathered}
u_1(x_1,x_2) = \partial_1\left\langle \varphi_1\left[x_1,x_2,\frac{1}{2}\partial_1^{(-1)}u_1(\xi_1,0),\right.\right.\\
\left.\frac{1}{2}\partial_1^{(-1)}u_1(0,\xi_2) + \frac{1}{2}\partial_1^{(-1)}F(\xi_2)\right] +\\
+\varphi_2\left[x_1,x_2,\frac{1}{2}\partial_2^{(-1)}u_2(\xi_1,0) +\right.\\
\left.\left.+\frac{1}{2}\partial_1^{(-1)}D(x_1),\frac{1}{2}\partial_2^{-1}u_2(0,\xi_2)\right]\right\rangle +\\
+\partial_2\left\langle \psi_1\left[x_1,x_2,\frac{1}{2}\partial_2^{(-1)}u_1(\xi_1,0) +\right.\right.
\end{gathered} \tag{8}$$

$$+\frac{1}{2}\partial_1^{(-1)}C(x_1),\frac{1}{2}\partial_2^{(-1)}u_1(0,\xi_2)\Big]-$$
$$-\psi_2\Big[x_1,x_2,\frac{1}{2}\partial_1^{(-1)}u_2(\xi_1,0),$$
$$\frac{1}{2}\partial_1^{(-1)}u_2(0,\xi_2)+\frac{1}{2}\partial_1^{(-1)}E(x_2)\Big]\Big\rangle,$$

$$u_2(x_1,x_2)=\partial_2\Big\langle\varphi_1\Big[x_1,x_2,\frac{1}{2}\partial_1^{(-1)}u_1(\xi_1,0),$$
$$\frac{1}{2}\partial_1^{-1}u_1(0,\xi_2)+\frac{1}{2}\partial_2^{(-1)}F(\xi_2)\Big]+$$
$$+\varphi_2\Big[x_1,x_2,\frac{1}{2}\partial_2^{(-1)}u_2(\xi_1,0)+\frac{1}{2}\partial_2^{(-1)}D(x_1),$$
$$\frac{1}{2}\partial_2^{-1}u_2(0,\xi_2)\Big]\Big\rangle-\partial_1\Big\langle\psi_1\Big[x_1,x_2,\frac{1}{2}\partial_2^{(-1)}u_1(\xi_1,0)+ \qquad (9)$$
$$+\frac{1}{2}\partial_2^{(-1)}C(x_1),\frac{1}{2}\partial_2^{(-1)}u_1(0,\xi_2)\Big]-$$
$$-\psi_2\Big[x_1,x_2,\frac{1}{2}\partial_1^{(-1)}u_2(\xi_1,0),$$
$$\frac{1}{2}\partial_1^{(-1)}u_2(0,\xi_2)+\frac{1}{2}\partial_2^{(-1)}E(x_2)\Big]\Big\rangle.$$

Здесь функции $C(x_2)$, $D(x_1)$, $E(x_2)$, $F(x_1)$ имеют представление

$$C(x_1)=\partial_2\partial_1^{(-1)}u_1(x_1,0)-\partial_1\partial_2^{(-1)}u_1(x_1,0),$$
$$D(x_1)=\partial_2\partial_1^{(-1)}u_2(x_1,0)-\partial_1\partial_2^{(-1)}u_2(x_1,0),$$
$$E(x_2)=\partial_1\partial_2^{(-1)}u_2(0,x_2)-\partial_2\partial_1^{(-1)}u_2(0,x_2),$$
$$F(x_1)=\partial_1\partial_2^{(-1)}u_1(0,x_2)-\partial_2\partial_1^{(-1)}u_1(0,x_2).$$

В справедливости этого утверждения легко убедиться непосредственной проверкой. Действительно, каждый упакованный блочный элемент после применения соответствующих дифференциальных операторов уравнений Гельмгольца принимает вид

$$\varphi(x_1,x_2)=\frac{1}{4\pi^2}\iint_{R^2}\omega_1(\alpha_1,\alpha_2)e^{-i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}d\alpha_1d\alpha_2,$$
$$\psi(x_1,x_2)=\frac{1}{4\pi^2}\iint_{R^2}\omega_2(\alpha_1,\alpha_2)e^{-i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}d\alpha_1d\alpha.$$

Правые части обращаются в ноль в связи с регулярностью функций $\omega_1(\alpha_1,\alpha_2)$, $\omega_2(\alpha_1,\alpha_2)$ в области $\operatorname{Im}\alpha_1<0$, $\operatorname{Im}\alpha_2<0$ и убыванием экспоненциальных членов. Входящие в формулы (8), (9) функции $\varphi_1(x_1,x_2)$, $\varphi_2(x_1,x_2)$ удовлетворяют первому уравнению (3), а функции $\psi_1(x_1,x_2)$, $\psi_2(x_1,x_2)$ – второму, только с разными граничными условиями.

Покажем алгоритм удовлетворения граничных условий. Ограничимся рассмотрением первого граничного условия (4). Используя приведенные выше свойства упакованных блочных элементов, имеем при $x_2\to 0$ для фрагментов решения (8) следующую цепочку соотношений:

$$u_1(x_1,x_2)\to\partial_1\varphi_1\Big[x_1,x_2,\frac{1}{2}\partial_1^{(-1)}u_1(\xi_1,0),$$
$$\frac{1}{2}\partial_1^{-1}u_1(0,\xi_2)+\frac{1}{2}\partial_1^{(-1)}F_1(\xi_2)\Big]+$$
$$+\partial_2\psi_1\Big[x_1,x_2,\frac{1}{2}\partial_2^{(-1)}u_1(\xi_1,0)+\frac{1}{2}\partial_2^{(-1)}C_1(x_1),$$
$$\frac{1}{2}\partial_2^{(-1)}u_1(0,\xi_2)\Big]\to\frac{1}{2}u_1(x_1,0)+$$
$$+\frac{1}{2}u_1(x_1,0)=u_1(x_1,0);$$

$$\partial_1\varphi_2\Big[x_1,x_2,\frac{1}{2}\partial_2^{(-1)}u_2(\xi_1,0)+$$
$$+\frac{1}{2}\partial_1^{(-1)}D_1(x_1),\frac{1}{2}\partial_2^{-1}u_2(0,\xi_2)\Big]-$$
$$-\partial_2\psi_2\Big[x_1,x_2,\frac{1}{2}\partial_1^{(-1)}u_2(\xi_1,0),\frac{1}{2}\partial_1^{(-1)}u_2(0,\xi_2)+$$
$$+\frac{1}{2}\partial_2^{(-1)}E_1(x_2)\Big]\to\partial_1\frac{1}{2}\partial_2^{(-1)}u_2(x_1,0)+$$
$$+\frac{1}{2}D_1(x_1)-\partial_2\frac{1}{2}\partial_1^{(-1)}u_2(x_1,0)\to$$

$$\to\partial_1\frac{1}{2}\partial_2^{(-1)}u_2(x_1,0)-\partial_2\frac{1}{2}\partial_1^{(-1)}u_2(x_1,0)+$$
$$+\partial_2\frac{1}{2}\partial_1^{(-1)}u_2(x_1,0)-\partial_1\frac{1}{2}\partial_2^{(-1)}u_2(x_1,0)=0.$$

Совершенно аналогично проверяется удовлетворение остальных граничных условий в (8), (9).

ВЫВОД

В работе [11] и настоящей одна и та же плоская граничная задача для векторного уравнения Ламе в первом квадранте решена двумя разными подходами метода блочного элемента. В первом случае решение построено прямым применением метода блочного элемента к векторной граничной задаче Ламе. Во втором случае использовано представление решения уравнения Ламе с помощью решений скалярных уравнений Гельмгольца. В обоих случаях впервые построены точные решения граничных задач. В первом случае, где на некотором этапе потребовалась операция факторизации матрицы-функции, решение представлено сложным выражением. Во втором случае оно представлено достаточно простыми решениями скалярных задач. Таким образом, показано, что в тех случаях, где имеется представление решений векторных граничных задач с помощью решений скалярных задач, целесообразно использовать этот подход.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Отдельные фрагменты работы выполнены в рамках реализации государственного задания Минобрнауки России на 2020 г. (проект FZEN-2020-0020), ЮНЦ РАН (проект 00-20-13) № госрегистрации 01201354241, и при поддержке грантов РФФИ 19–41–230003, 19–41–230004, 19–48–230014, 18–08–00465, 18–01–00384, 18–05–80008.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.* The Theory of the Starting Earthquake // Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation. 2016. № 1. V. 2. P. 37–80. https://doi.org/10.31429/vestnik-13-1-2-37-80
2. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.* On the possibility of predicting some types of earthquake by a mechanical approach // Acta Mechanica. 2018. V. 229. № 5. P. 2163–2175. hpps//doi.org/ https://doi.org/10.1007/s00707-017-2092-0
3. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.* On a mechanical approach to the prediction of earthquakes during horizontal motion of litospheric plates // Acta Mechanica. 2018. hpps//doi.org/ https://doi.org/10.1007/s00707-018-2255-7
4. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Об одном новом типе трещин, дополняющих трещины Гриффитса–Ирвина // ДАН. 2019. Т. 485. № 2. С. 34–38. https://doi.org/10.1134/S1028335819030042
5. *Гельфанд И.М., Минлос З.А., Шапиро З.Я.* Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения. М.: Физматлит, 1958. 368 с.
6. *Улитко А.Ф.* Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. Киев: Наукова Думка, 1979. 262 с.
7. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова Думка, 1981. 284 с.
8. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
9. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.
10. *Новацкий В.* Электромагнитные эффекты в твердых телах. М.: Мир, 1986. 160 с.
11. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Применение метода блочного элемента в одной граничной задаче академика И.И. Воровича // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2020. Т. 493. С. 42–47. https://doi.org/10.1134/S102833582007006X
12. *Бабич В.М.* О коротковолновой асимптотике функции Грина для уравнения Гельмгольца // Матем. сборник. 1964. Т. 65. С. 577–630.
13. *Бабич В.М., Булдырев В.С.* Асимптотические методы в проблеме дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972. 256 с.
14. *Мухина И.В.* Приближенное сведение к уравнениям Гельмгольца уравнений теории упругости и электродинамики для неоднородных сред // ПММ. 1972. Т. 36. С. 667–671.
15. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 502 с.

BLOCK ELEMENT METHOD IN DECOMPOSITION OF COMPLEX SOLUTIONS BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN MECHANICS

Academician of the RAS V. A. Babeshko[a,b], O. V. Evdokimova[a], O. M. Babeshko[b], and V. S. Evdokimov[b]

[a] *Southern Scientific Center Russian Academy of Science, Rostov-on-Don, Russian Federation*
[b] *Kuban State University, Krasnodar, Russian Federation*

In this paper, probably for the first time, we construct an exact solution in the first quadrant of a plane boundary value problem of the second kind for the dynamical Lame equations, decomposed by solutions of ranic problems for the Helmholtz equation. These solutions are presented in the form packed block elements.

Keywords: boundary value problems, block element method, packed block elements, Lame equations, Helmholtz equations