ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2020, том 495, с. 73–77

МЕХАНИКА

УДК 536.423.1

НОВЫЙ ПОДХОД К АНАЛИТИЧЕСКОМУ ОПИСАНИЮ РОСТА ПАРОВОГО ПУЗЫРЬКА В ПЕРЕГРЕТОЙ ЖИДКОСТИ

© 2020 г. А. А. Чернов[1,2,*], академик РАН М. А. Гузев[3], А. А. Пильник[1,2], И. В. Владыко[1,2], В. М. Чудновский[1]

Поступило 28.08.2020 г.
После доработки 13.10.2020 г.
Принято к публикации 14.10.2020 г.

Представлена математическая модель роста парового пузырька в перегретой жидкости, учитывающая как динамические, так и тепловые эффекты и включающая в себя известные классические уравнения – уравнение импульсов и уравнение теплопроводности, записываемые с учетом процесса испарения жидкости. Найдено приближенное полуаналитическое решение задачи, построение которого основано на существовании квазистационарного состояния для процесса роста пузырька. Это позволяет редуцировать исходную краевую задачу с подвижной границей к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Полученное решение справедливо на всех стадиях процесса и в широком диапазоне режимных параметров. Показано, что на больших временах решение становится точным автомодельным и в предельных случаях согласуется с известными решениями других авторов.

Ключевые слова: перегретая жидкость, кипение, паровой пузырек, аналитическое решение

DOI: 10.31857/S2686740020060073

Детальное исследование всего многообразия процессов, происходящих при кипении жидкости, представляет собой как чисто научный, так и практический интерес и актуально по сей день. Элементарным актом процесса кипения является рост парового пузырька, описание которого представляет собой комплексную задачу, в которой следует совместно решать уравнения гидродинамики и теплообмена. Попытки получить закон роста парового пузырька имеют давнюю историю, начиная с классических работ [1–5] и заканчивая многочисленными современными исследованиями [6, 7].

Следует заметить, что при построении математических моделей для роста парового пузырька авторы предлагают учитывать различные факторы: динамические, кинетические, тепловые и другие, которые определяют этот процесс. Поскольку на той или иной стадии процесса происходит смена факторов в зависимости от свойств рассматриваемой двухфазной системы, то для решения задачи используются различные допущения, позволяющие построить упрощенные математические модели, в которых выделен какой-либо один основной управляющий процессом механизм. Основные наиболее распространенные из них [8]: динамическая инерционная модель, в которой рост пузырька происходит исключительно вследствие инерционных эффектов; динамическая вязкая модель, в которой рост пузырька лимитируется вязкими силами; энергетическая молекулярно-кинетическая модель, в которой предпринимается попытка учесть кинетику фазового перехода и энергетическая тепловая модель. Последняя наиболее распространена в литературе. В этой модели рост пузырька обусловлен подводом тепла к межфазной границе от внешних перегретых слоев жидкости; все тепло при этом расходуется на испарение. Зависимость радиуса пузырька от времени в данной модели имеет вид степенной функции с показателем степени 1/2. При этом коэффициент пропорциональности является функцией числа Якоба и находится различными авторами по-разному. Наиболее известной является формула Плессета–Цвика [1], справедливая для больших чисел Якоба. Достаточно полное аналитическое решение задачи в интегральном виде получено Скрайвеном [4]. Наряду с этим, большое распро-

[1] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия*
[2] *Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия*
[3] *Институт прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук, Владивосток, Россия*
**E-mail: chernov@itp.nsc.ru*

странение получили различные эмпирические зависимости [9].

Анализ энергетической тепловой модели показывает, что несмотря на ее широкую распространенность, она имеет ограниченную область применения. В частности, это проявляется в том, что ряд приближений, сделанных в ней, приводит к решению с бесконечной скоростью роста пузырька в начальный момент времени, что физически некорректно. В связи с этим, предпринимаются попытки создания различного рода гибридных моделей, одновременно учитывающих как динамические, так и тепловые эффекты [10–13], что, как показывает опыт, сопряжено со значительными трудностями. Целью настоящей работы является нахождение приближенного аналитического решения данной задачи, которое корректно бы описывало все стадии роста парового пузырька.

Пусть в начальный момент времени в однородно перегретой жидкости зародился и начал расти паровой пузырек. Система уравнений, описывающих данный процесс, включает известные классические уравнения, записываемые применительно к рассматриваемой задаче с учетом специфики, связанной с испарением жидкости. При решении задачи будем использовать приближение однородного равновесного пузырька, согласно которому пар в пузырьке находится в насыщенном состоянии, а температура и давление однородны [14].

Динамика пузырька описывается уравнением импульсов (модифицированным уравнением Рэлея):

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_{lR}R^2) - \frac{v_{lR}^2}{2} = \frac{p_{lR} - p_l^i}{\rho_l}, \qquad (1)$$

где R – радиус пузырька; t – время; p – давление; ρ – плотность; v_{lR} – радиальная скорость жидкости на границе пузырька, которая при наличии фазового перехода отличается от скорости роста пузырька $\dot{R}$ и связана с ней соотношением $\rho_l(\dot{R} - v_{lR}) = j$, где j – плотность потока пара, образующегося при испарении жидкости. Здесь и далее нижние индексы l и v обозначают жидкую и паровую фазу; верхние индексы i и f – начальное и конечное состояние соответственно; индекс R означает значение величины на межфазной границе.

Граничные условия, отражающие законы сохранения массы, импульса и энергии записываются следующим образом:

$$\rho_v\dot{R} + \frac{1}{3}\dot{\rho}_v R = j; \qquad (2)$$

$$p_{lR} = p_v + jv_{lR} - \frac{2\sigma}{R} - 4\eta_l\frac{v_{lR}}{R}; \qquad (3)$$

$$j_{\mathrm{L}} = \lambda_l\left(\frac{\partial T_l}{\partial r}\right)_{r=R}, \qquad (4)$$

где σ – поверхностное натяжение; η – динамическая вязкость; L – удельная теплота фазового перехода; λ – коэффициент теплопроводности; T – температура.

Данную систему уравнений замыкает тепловая задача, в которой динамика температурного поля в жидкости описывается уравнением теплопроводности:

$$\frac{\partial(\rho_l c_l T_l)}{\partial t} + v_l\frac{\partial(\rho_l c_l T_l)}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda_l r^2\frac{\partial T_l}{\partial r}\right), \qquad (5)$$

где r – радиальная координата с началом в центре пузырька; $v_l(r) = v_{lR}\left(\frac{R}{r}\right)^2$ – радиальная скорость жидкости (которая найдена из уравнения неразрывности в предположении о несжимаемости жидкости); c – теплоемкость. Далее величины, характеризующие теплофизические свойства жидкости, будем считать постоянными.

В начальный момент времени температура жидкости однородна и больше температуры насыщения при давлении p_l^i (давлении вдали от пузырька): $(T_l)_{t=0} = T^i > T^s(p_l^i)$. Вдали от пузырька температурное поле остается невозмущенным: $(T_l)_{r\to\infty} = T^i$. На поверхности пузырька выполняется условие локального термодинамического равновесия: $(T_l)_{r=R} = T^s(p_v)$. Здесь и далее верхний индекс s означает значение величины на линии насыщения.

Задачу следует дополнить уравнением состояния пара в пузырьке и зависимостью давления насыщения от температуры, которые в общем случае имеют следующий вид:

$$\rho_v = \rho_v(p_v, T_v); \qquad (6)$$

$$p_v = p^s(T_v) \quad \text{или} \quad T_v = T^s(p_v). \qquad (7)$$

Это могут быть как модельные, так и более точные эмпирические зависимости. Как правило, в качестве уравнения состояния используют уравнение Менделеева–Клапейрона, считая пар идеальным газом, а для кривой равновесия – уравнение Клапейрона–Клаузиуса. Надо сказать, что это несколько сужает общность как самой постановки задачи, так и получаемых решений. Однако в большинстве случаев этого вполне достаточно, чтобы обеспечить приемлемую точность получаемого решения. Отметим также, что зависимости (6), (7) однозначно определяют функции $T^s(p_v)$ и $p^s(\rho_v)$, которые появятся ниже.

В общем случае сформулированную задачу (даже без учета инерционных эффектов) можно решить только численно. Однако можно предложить подход, на основе которого построить приближенное решение задачи почти во всем временном интервале эволюции пузырька. С математической точки зрения его удобно сконструировать,

если перейти от переменных (t, r) к переменным (t,χ), где $\chi = \dfrac{r}{R(t)}$, тем самым сведя краевую задачу к задаче с неподвижными границами (аналогично тому, как это сделано в работе [15] при решении задачи о диффузионным росте газового пузырька).

Уравнение теплопроводности (5) примет следующий вид:

$$\frac{R^2}{a_l}\frac{\partial\Theta_l}{\partial t} = \left(-\frac{\alpha}{\chi^2} + \frac{2}{\chi} + \beta\chi\right)\frac{\partial\Theta_l}{\partial\chi} + \frac{\partial^2\Theta_l}{\partial\chi^2}, \qquad (8)$$

где $\Theta_l = \dfrac{T_l - T_l^i}{\Delta T_l^i}$ – безразмерная температура; $\Delta T_l^i = T_l^i - T^s(p_l^i)$ – начальный перегрев жидкости; $\alpha = \dfrac{v_{lR}R}{a_l}$ и $\beta = \dfrac{\dot{R}R}{a_l}$ – функции времени; $a = \dfrac{\lambda}{\rho c}$ – температуропроводность.

Начальное и граничные условия запишутся следующим образом:

$$(\Theta_l)_{t=0} = 0; \quad (\Theta_l)_{\chi=1} = \Theta^s(\overline{\rho}_v); \quad (\Theta_l)_{\chi\to\infty} = 0, \quad (9)$$

где $\overline{\rho}_v = \dfrac{\rho_v}{\rho_l}$ – безразмерная плотность пара.

Переходя к анализу уравнения (8), заметим, что структура решения зависит от поведения управляющих функций $\alpha = \alpha(t)$, $\beta = \beta(t)$. На начальном этапе эволюции пузырька скорость его роста мала, поэтому величины $\alpha,\beta \ll 1$. Тогда член $\dfrac{2}{\chi}$ в круглых скобках в правой части (8) становится ведущим слагаемым по сравнению с остальными. В этом случае (8) редуцируется к известному для тепловой задачи уравнению, решение которого асимптотически убывает во времени. При дальнейшей эволюции системы структура решения изменяется из-за монотонного роста α, β. Но оно, по-прежнему, содержит асимптотически убывающее во времени слагаемое. Однако учет α, β приводит к распределению температуры, для которого начальная стадия процесса становится несущественной. Такое решение для температуры можно найти при условии обращения в нуль правой части (8), и с учетом условий (9) оно дается формулой

$$\Theta_l(\tau,\chi) = \Theta^s(\overline{\rho}_v)\frac{\int\limits_0^{1/\chi}\exp\{-\alpha\zeta - \beta\zeta^{-2}/2\}d\zeta}{\int\limits_0^{1}\exp\{-\alpha\zeta - \beta\zeta^{-2}/2\}d\zeta}. \qquad (10)$$

Решение (10) не является стационарным с точки зрения математики, поскольку зависит от времени через $\alpha = \alpha(t)$, $\beta = \beta(t)$, поэтому его естественно называть квазистационарным. При этом численные расчеты для (8) показывают, что время установления квазистационарного состояния существенно меньше времени всего процесса эволюции пузырька. Это означает, что решение (10) с хорошей точностью описывает динамику температурного поля, формирующегося вокруг пузырька на протяжении всего его роста.

Модифицируя исходную систему уравнений (1)–(4) и подставляя найденный профиль температуры (10) в обезразмеренное уравнение (4), получим следующую систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\Delta p_v^i}{\rho_l a_l}\Pi^s(\overline{\rho}_v) - \frac{2\sigma}{\rho_l a_l}\frac{1}{R} - \frac{4\eta_l}{\rho_l}\frac{\alpha}{R} - \frac{a_l}{2}\frac{\alpha^2}{R^2};$$

$$\frac{d\overline{\rho}_v}{dt} = \frac{3a_l(\beta(1-\overline{\rho}_v) - \alpha)}{R^2};$$

$$\frac{dR}{dt} = \frac{a_l\beta}{R}, \qquad (11)$$

где $\Pi = \dfrac{p_v - p_l^i}{\Delta p_v^i}$ – безразмерное давление; $\Delta p_v^i = p^s(T_l^i) - p_l^i$ – начальное избыточное давление пара, обусловленное перегревом жидкости. Функция $\beta = \beta(\alpha,\overline{\rho}_v)$ при этом неявно задана уравнением

$$(\beta - \alpha)\int\limits_0^1\exp\{\{\alpha(1-\zeta) + \beta(1-\zeta^{-2})/2\}d\zeta = \\ = -\mathrm{Ku}^{-1}\theta^s(\overline{\rho}_v), \qquad (12)$$

а функции $\Pi^s(\overline{\rho}_v)$ и $\theta^s(\overline{\rho}_v)$ находятся из соотношений (6), (7); $\mathrm{Ku} = \dfrac{L}{c_l\Delta T_l^i}$ – число Кутателадзе, характеризующее исходную степень метастабильности. При таком подходе решение тепловой задачи фактически свелось к решению трансцендентного уравнения (12).

Таким образом, задача свелась к решению системы из трех обыкновенных дифференциальных уравнений вида $\dfrac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$, где $\mathbf{y} = (\alpha,\overline{\rho}_v, R)$ – искомая векторная функция, а функция $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ задана правой частью уравнений (11).

По мере роста пузырька давление в нем постепенно падает и асимптотически стремится к давлению окружающей жидкости; плотность пара в пузырьке и температура жидкости на межфазной границе при этом стремятся к постоянным значениям: $\rho_v \to \rho_v^f$; $(\Theta_l)_{\chi=1} \to -1$, где ρ_v^f – плотность пара при давлении p_l^i. На этой стадии процесса, которая, к слову, может быть описана в рамках энергетической тепловой модели, рост пузырька

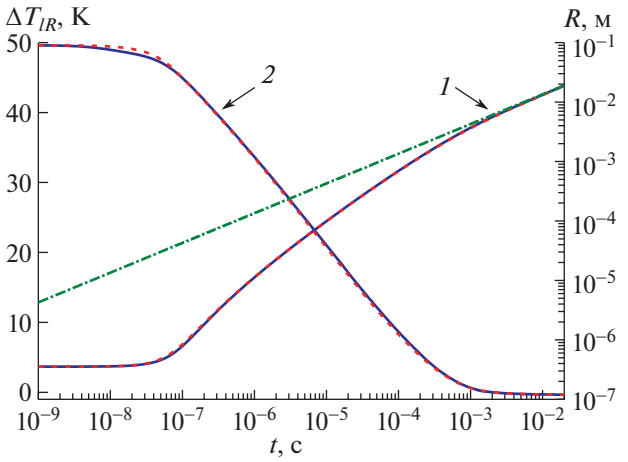

Рис. 1. Зависимость радиуса пузырька R (*1*) и перегрева жидкости на межфазной границе ΔT_{lR}; (*2*) от времени: сплошная линия – полученное полуаналитическое решение (11), (12); штриховая линия – прямое численное моделирование; штрих-пунктирная линия – автомодельное решение (13), (14).

определяется исключительно теплопередачей к межфазной границе, температурное поле в жидкости становится стационарным, функции α и β – константами, а решение краевой задачи – точным автомодельным:

$$\Theta_l(\chi) = -\frac{\int\limits_0^{1/\chi} \exp\{-\beta^f(\zeta(1-\bar{\rho}_v^f)+\zeta^{-2}/2)\}d\zeta}{\int\limits_0^{1} \exp\{-\beta^f(\zeta(1-\bar{\rho}_v^f)+\zeta^{-2}/2)\}d\zeta}; \quad (13)$$

$$R = \sqrt{2\beta^f a_l t}.$$

Отметим, что аналогичное решение было получено Скрайвеном [4]. Коэффициент β^f, фигурирующий в уравнении (13), на данной стадии является функцией только числа Якоба $\mathrm{Ja} = (\bar{\rho}_v^f \mathrm{Ku})^{-1} = \frac{\rho_l}{\rho_v^f}\frac{c_l \Delta T_l^i}{\mathrm{L}}$ и находится из следующего интегрального уравнения (которое напрямую следует из уравнения (12)):

$$\beta^f \int\limits_0^1 \exp\left\{\beta^f\left((1-\zeta)(1-\bar{\rho}_v^f)+\frac{1-\zeta^{-2}}{2}\right)\right\}d\zeta = \mathrm{Ja}. \quad (14)$$

В случае малых и больших перегревов при $\bar{\rho}_v^f \ll 1$ уравнение (14) имеет следующие приближенные решения:

$$\beta^f \approx \mathrm{Ja} \quad \text{при} \quad \mathrm{Ja} \ll 1;$$

$$\beta^f \approx \frac{6}{\pi}\left(\mathrm{Ja}+\frac{4}{9}\right)^2 \quad \text{при} \quad \mathrm{Ja} \gg 1.$$

Последнее совпадает с известным решением Плессета–Цвика [1] (если не брать во внимание аддитивную поправку к числу Якоба, которая значительно улучшает данное асимптотическое приближение).

На рис. 1 представлены зависимости радиуса пузырька и температуры жидкости на межфазной границе от времени, построенные для воды при атмосферном давлении и начальном перегреве 50 K, наглядно иллюстрирующие механизм роста парового пузырька в перегретой жидкости, объединяющий в себе динамические и тепловые эффекты. Начальный размер пузырька полагался равным 1.1 R_{cr}, где $R_{\text{cr}} = \frac{2\sigma}{\Delta p_v^i}$ – критический радиус, при начальной нулевой скорости роста и температуре пара, равной температуре окружающей жидкости. Как видно из рисунка, различие в результатах расчета, полученных в результате прямого численного моделирования исходной системы уравнений (1)–(7) и на основе найденного полуаналитического решения (11), (12), достаточно мало, что говорит о состоятельности последнего (это же наблюдалось в расчетах и для других перегревов, и для других жидкостей). Отметим также, что автомодельное решение (13), (14) справедливо лишь на больших временах, так как по сути является асимптотическим, что говорит о его ограниченности применительно к реальным системам, особенно в случае больших перегревов, где характерное время переходной стадии может оказаться много больше характерного времени наблюдения.

Таким образом, в работе найдено сравнительно простое полуаналитическое решение задачи о росте парового пузырька в изначально однородно перегретой жидкости, которое одновременно описывает как инерционные, так и тепловые эффекты, управляющие данным процессом, и которое может послужить хорошей альтернативой прямым численным расчетам.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19–19–00122).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Plesset M.S., Zwick S.A.* The growth of vapor bubbles in superheated liquids // J. Appl. Phys. 1954. V. 25. № 4. P. 493–500.
2. *Forster H.K., Zuber N.* Growth of a vapor bubble in a superheated liquid // J. Appl. Phys. 1954. V. 25. № 4. P. 474–478.
3. *Birkhoff G., Margulies R. S., Horning W.A* Spherical bubble growth // The Physics of Fluids. 1958. V. 1. № 3. P. 493–500.
4. *Scriven L.E.* On the dynamics of phase growth // Chemical Engineering Science. 1959. V. 10. № 1. P. 1–13.

5. *Mikic B.B., Rohsenow W.M., Griffith P.* On bubble growth rates // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 1970. V. 13. № 4. P. 657–666.
6. *Prosperetti A.* Vapor bubbles // Annual Review of Fluid Mechanics. 2017. V. 49. № 1. P. 221–248.
7. *Zudin Y.B.* Non-equilibrium Evaporation and Condensation Processes. Springer, 2019. 404 p.
8. *Лабунцов Д.А.* Физические основы энергетики. Избранные труды по теплообмену, гидродинамике, термодинамике. М.: Издательство МЭИ, 2000. 388 с.
9. *Авдеев А.А.* Закономерности роста парового пузыря в объеме перегретой жидкости (Тепловая энергетическая схема) // Теплофизика высоких температур. 2014. Т. 52. № 4. С. 617–632.
10. *Lee H.S., Merte H.* Spherical vapor bubble growth in uniformly superheated liquids // International J. Heat and Mass Transfer. 1996. V. 39. № 12. P. 2427–2447.
11. *Robinson A.J., Judd R.L.* The dynamics of spherical bubble growth // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 2004. V. 47. № 23. P. 5101–5113.
12. *Коледин В.В., Шагапов В.Ш.* К динамике роста паровых пузырьков в перегретой жидкости // Прикладная математика и механика. 2013. Т. 77. № 5. С. 754–767.
13. *Wang Q., Gu J., Li Z., Yao W.* Dynamic modeling of bubble growth in vapor-liquid phase change covering a wide range of superheats and pressures // Chemical Engineering Science. 2017. V. 172. P. 169–181.
14. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Т. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
15. *Chernov A.A., Pil'nik A.A., Davydov M.N., Ermanyuk E.V., Pakhomov M.A.* Gas nucleus growth in high-viscosity liquid under strongly non-equilibrium conditions // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 2018. V. 123. P. 1101–1108.

DESCRIPTION OF VAPOR BUBBLE GROWTH IN A SUPERHEATED LIQUID

A. A. Chernov[a,b], Academician of the RAS M. A. Guzev[c], A. A. Pil'nik[a,b], I. V. Vladyko[a], and V. M. Chudnovsky[a]

[a] *Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation*

[b] *Kutateladze Institute of Thermophysics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation*

[c] *Institute of Applied Mathematics, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Vladivostok, Russian Federation*

A mathematical model of vapor bubble growth in a superheated liquid is presented, which simultaneously takes into account both dynamic and thermal effects and includes the well-known classical equations - the equation of momenta and the heat equation, written to take into account the process of liquid evaporation. An approximate semi-analytical solution of the problem is found. It is constructed on the basis on the existence of a quasi-stationary state for the bubble growth process. This allows the original boundary value problem with a moving boundary to be reduced to a system of ordinary differential equations of the first order. The obtained solution is valid at all stages of the process and for a wide range of system parameters. It is shown that at large times the solution becomes self-similar and in limiting cases it agrees with the known solutions of other authors.

Keywords: superheated liquid, boiling, vapor bubble, analytical solution