

УДК 532.522

СВЯЗЬ ДАЛЬНЕЙ АСИМПТОТИКИ СТРУИ С ПРОФИЛЕМ СКОРОСТИ В ОТВЕРСТИИ

© 2020 г. Член-корреспондент РАН А. М. Гайфуллин^{1,2,*}, В. В. Жвик^{1,2,**}

Поступило 24.09.2020 г.
После доработки 01.10.2020 г.
Принято к публикации 05.10.2020 г.

В приближении пограничного слоя рассмотрена затопленная незакрученная струя вязкой несжимаемой жидкости, вытекающая из отверстия. При помощи закона сохранения установлена связь неизвестной константы во втором члене обратного координатного разложения дальнего поля струи с профилем скорости в отверстии.

Ключевые слова: затопленная струя, пограничный слой, асимптотика, закон сохранения, инвариант

DOI: 10.31857/S2686740020060103

ВВЕДЕНИЕ

Выяснена роль недавно обнаруженного закона сохранения [1] в теории осесимметричной свободной струи. Данный закон сохранения позволяет определить неизвестную константу в асимптотике Лойцянского [2] дальнего поля затопленной незакрученной струи. Общепринятый способ [2, 3] определения этой константы через расход в отверстии ошибочен.

Ниже будет рассмотрен случай ламинарной струи. Полученные результаты без труда обобщаются на случай турбулентной струи, поскольку осредненное по времени поле скорости в турбулентной струе в рамках модели турбулентной вязкости описывается теми же уравнениями [3], что и ламинарная струя.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается ламинарная осесимметричная незакрученная струя вязкой несжимаемой жидкости, вытекающая из отверстия в пространство, затопленное той же жидкостью. Введем безразмерные переменные:

$$z = \frac{z^*}{a}, \quad r = \frac{r^*}{a}, \quad u = \frac{u^*}{U}, \quad v = \frac{v^*}{U}, \quad \text{Re} = \frac{aU}{\nu},$$

где (u, v) – проекции вектора скорости на орты цилиндрической системы координат (z, r) ; Re – число Рейнольдса, определенное по радиусу трубы a и максимальной скорости U в ней; ν – кинематический коэффициент вязкости. Индексом * обозначены размерные величины.

При больших числах Рейнольдса течение можно рассматривать в приближении пограничного слоя:

$$(ru)_z + (rv)_r = 0, \quad (1)$$

$$uu_z + vv_r = \text{Re}^{-1} r^{-1} (ru_r)_r. \quad (2)$$

Точное решение [4] уравнений (1), (2) описывает струю, порожденную точечным источником импульса:

$$u^{(1)}(z, \eta) = \frac{2\alpha^2}{(1 + \alpha^2 \eta^2/4)^2} \frac{\text{Re}}{z}, \quad (3)$$

$$v^{(1)}(z, \eta) = \frac{\alpha^2 \eta (1 - \alpha^2 \eta^2/4)}{(1 + \alpha^2 \eta^2/4)^2} \frac{1}{z}, \quad \eta = \text{Re} \frac{r}{z},$$

где $\alpha = \sqrt{3J/(16\pi)}$, J – поток импульса через поперечное сечение струи, одинаковый для всех $z > 0$,

$$J = 2\pi \int_0^{+\infty} u^2 r dr. \quad (4)$$

¹ Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского, Жуковский, Московская обл., Россия

² Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия

*E-mail: gaifullin@tsagi.ru

**E-mail: vladzhvick@yandex.ru

Для неавтономной струи следующее приближение [2] на большом расстоянии от источника имеет вид

$$u = u^{(1)} + \beta u^{(2)} + o(z^{-2}), \quad v = v^{(1)} + \beta v^{(2)} + o(z^{-2}),$$

$$u^{(2)}(z, \eta) = -\frac{1}{2} \alpha^2 \frac{1 - 3\alpha^2 \eta^2 / 4}{(1 + \alpha^2 \eta^2 / 4)^3} \frac{\text{Re}^2}{z^2}, \quad (5)$$

$$v^{(2)}(z, \eta) = -\frac{1}{2} \alpha^2 \eta \frac{1 - 3\alpha^2 \eta^2 / 4}{(1 + \alpha^2 \eta^2 / 4)^3} \frac{\text{Re}}{z^2}.$$

В терминах функции тока $u = r^{-1} \psi_r$, $v = -r^{-1} \psi_z$ данное решение принимает вид

$$\psi(z, \eta) = \psi^{(1)}(z, \eta) + \beta \psi^{(2)}(\eta) + o(1),$$

$$\psi^{(1)}(z, \eta) = \text{Re}^{-1} z \frac{\alpha^2 \eta^2}{1 + \alpha^2 \eta^2 / 4}, \quad (6)$$

$$\psi^{(2)}(\eta) = -\frac{\alpha^2 \eta^2}{4} \frac{1 - \alpha^2 \eta^2 / 4}{(1 + \alpha^2 \eta^2 / 4)^2}.$$

Константа β в решении (5), (6) связывалась [2] с объемным расходом в отверстии:

$$Q = 2\pi \int_0^1 u(0, r) r dr = 2\pi \psi(0, +\infty) = 2\pi \beta. \quad (7)$$

Выражение (7) базируется на предположении, что разложение (6) справедливо вплоть до отверстия $z = 0$, что в общем случае неверно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНСТАНТЫ

Кроме (4) существует еще один инвариант затопленной струи. Умножим уравнение (2) на r и сложим с уравнением (1), умноженным на u :

$$(u^2 r)_z + (u v r - \text{Re}^{-1} u, r)_r = 0.$$

Полученное уравнение умножим на $\psi - \text{Re}^{-1} z$ и приведем к дивергентному виду:

$$(u^2 (\psi - \text{Re}^{-1} z) r)_z + ((\psi - \text{Re}^{-1} z) \times (u v r - \text{Re}^{-1} u, r) + \text{Re}^{-1} (u r)^2 / 2)_r = 0.$$

Проинтегрируем данное уравнение по r :

$$\frac{dE}{dz} = -((\psi - \text{Re}^{-1} z)(u v r - \text{Re}^{-1} u, r) + \text{Re}^{-1} (u r)^2 / 2)_{r=0}^{r=+\infty}, \quad (8)$$

$$E = \int_0^{+\infty} u^2 (\psi - \text{Re}^{-1} z) r dr.$$

Если предположить, что $u = O(r^{-4})$, $v = O(r^{-1})$ при $r \rightarrow +\infty$, то интеграл (8) является инвариантом струи.

Приведем выражение интеграла (8) в размерных переменных:

$$E^* = \int_0^{+\infty} u^{*2} (\psi^* - v z^*) r^* dr^*.$$

На решении (3) инвариант (8) равен нулю, что позволяет использовать его для корректного определения константы β :

$$E = \text{Re}^{-2} z^2 \int_0^{+\infty} (\beta (u^{(1)})^2 \psi^{(2)} + 2\beta u^{(1)} u^{(2)} (\psi^{(1)} - \text{Re}^{-1} z) + o(z^{-2})) \eta d\eta = \frac{2}{3} \beta \alpha^2. \quad (9)$$

При этом инвариант E вычисляется через профиль скорости в отверстии с помощью формулы (8), в которой следует положить $z = 0$.

Инвариант E является обобщением инварианта плоской пристенной струи [5, 6] на осесимметричные течения.

СРАВНЕНИЕ С ЧИСЛЕННЫМ РЕШЕНИЕМ

Сформулируем граничные условия неавтономной задачи для уравнений (1), (2). В плоскости отверстия $z = 0$ задан начальный профиль скорости $u(r) = 1 - r^n$ при $r < 1$, $u(r) = 0$ при $r \geq 1$. На оси струи $r = 0$ выполняется $u_r = v = 0$, при $r \rightarrow +\infty$ выполняется $u \rightarrow 0$. Рассмотрены параболический $n = 2$ и линейный $n = 1$ начальные профили скорости.

Численное решение данной задачи при $\text{Re} = 100$ получено маршевым методом [7] для полностью неявной конечно-разностной схемы второго порядка точности по обеим координатам. Расчет проведен в области $0 \leq z \leq 300$, $0 \leq r \leq 300$ при дискретизации $\Delta z = \Delta r = 0.01$. Удвоение шага по каждому направлению приводит к изменению осевой скорости на величину порядка 0.01% при $r \leq 200$ в сечении $z = 300$ в случае $n = 2$.

На каждом шаге по z проверялось сохранение интегралов (4) и (8). Для используемых начальных профилей скорости отклонение интегралов от начального значения не превосходит 2% вплоть до сечения $z = 300$.

Таблица 1. Константы

n	J , (4)	E , (8)	β , (7)	β , (9)
2	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}$
1	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{13}{2520}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{26}{105}$

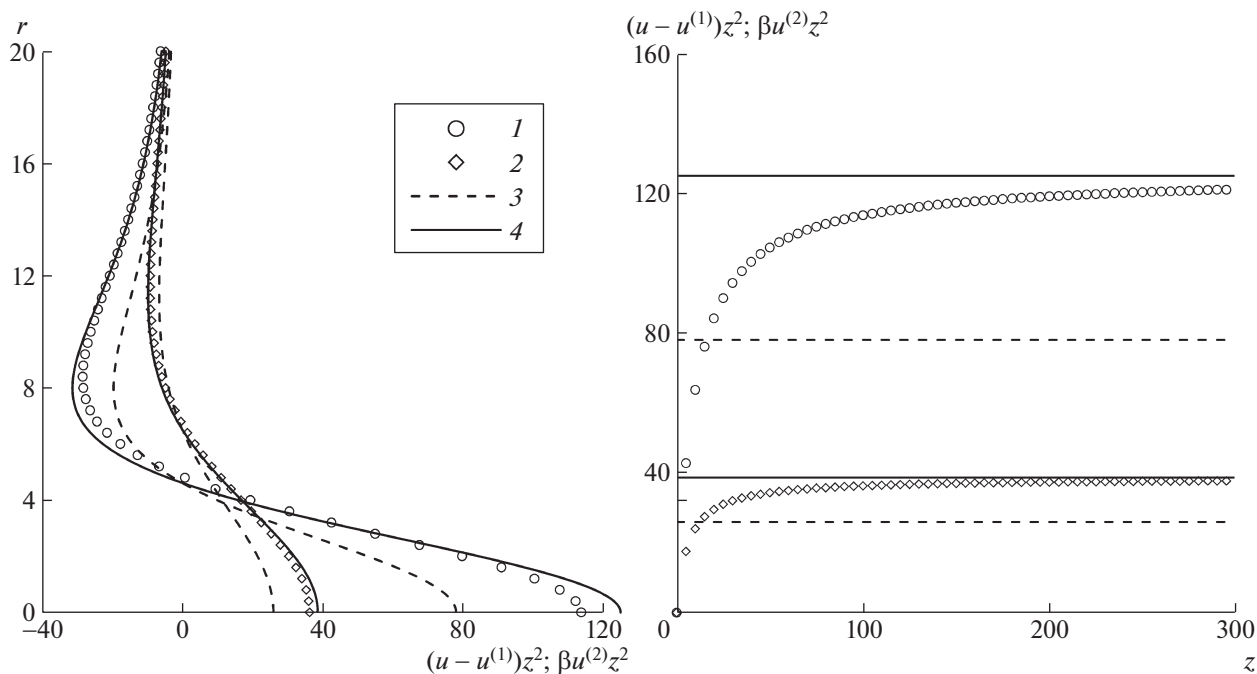


Рис. 1. Сравнение отклонений численного и асимптотического (5) решений от решения (3): 1 – численное решение при $n = 2$; 2 – численное решение при $n = 1$; 3 – решение (5), (7); 4 – решение (5), (9); слева $z = 100$; справа $r = 0$.

В табл. 1 представлены значения инвариантов (4) и (8), вычисленных по профилю скорости в сечении $z = 0$, а также значения константы β , определенные по формуле (7) и по формуле (9). На рис. 1 приведено сравнение численного и асимптотического (5) решений для профиля осевой скорости в сечении $z = 100$ и для скорости на оси струи. Из всех решений вычтено решение (3). Легко видеть, что решение (5), (9) гораздо ближе к численному решению, чем (5), (7).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Известное выражение для поля скоростей осесимметричной затопленной струи [2], бьющей из конечного источника, дополнено определением константы β . Данная константа появляется во втором приближении координатного разложения на больших расстояниях от источника. В отличие от сложившегося мнения, что константа β определяется расходом в начальном сечении струи [2], показано, что она определяется инвариантом (8). Данный инвариант позволил выразить значение константы β через профиль скорости в начальном сечении.

Приведенные выше соотношения обобщаются на случай турбулентной осесимметричной затопленной струи несжимаемой жидкости, так как в этом случае кинематический коэффициент турбулентной вязкости $\varepsilon_\tau \sim \sqrt{J} = \text{const}$.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 19–01–00163.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Naz R. Conservation laws for laminar axisymmetric jet flows with weak swirl // *Applicable Analysis*. 2012. V. 91. № 5. P. 1045–1052.
2. Лойцянский Л.Г. Распространение закрученной струи в безграничном пространстве, затопленном той же жидкостью // *Прикл. математика и механика*. 1953. Т. 17. № 1. С. 3–16.
3. Лойцянский Л.Г. *Механика жидкости и газа*. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
4. Schlichting H. Laminare Strahlausbreitung // *Z. angew. Math. Mech.* 1933. Bd 13. № 4. S. 260–263.
5. Акатнов Н.И. Распространение плоской ламинарной струи вязкой жидкости вдоль твердой стенки // *Тр. Ленингр. политехн. ин-та*. 1953. № 5. С. 24–31.
6. Glauert M.B. The wall jet // *J. Fluid Mech.* 1956. V. 1. P. 625–643.
7. Hornbeck R.W. *Numerical Marching Techniques for Fluid Flows with Heat Transfer*. Washington: D.C. NASA, 1973. V. 297. 349 p.

A CONNECTION OF A JET FAR FIELD ASYMPTOTICS WITH A VELOCITY PROFILE AT AN ORIFICE

Corresponding Member of the RAS **A. M. Gaifullin^{a,b}** and **V. V. Zhvick^{a,b}**

^a *The Central Aerohydrodynamic Institute named after prof. N.E. Zhukovsky, Moscow oblast, Russian Federation*

^b *Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University),
Dolgoprudny, Moscow oblast, Russian Federation*

A submerged non-swirling jet of viscous incompressible fluid issuing from an orifice is considered under the boundary layer approximation. A connection of an unknown constant in the second term of a jet far field inverse coordinate expansion with a velocity profile at the orifice is obtained using a conservation law.

Keywords: submerged jet, boundary layer, asymptotics, conservation law, invariant