

УДК 517.958, 539.3(5), 517.956.8

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДВУХРЯДНОГО КЛЕПАНИЯ ПЛАСТИН КИРХГОФА

© 2020 г. С. А. Назаров^{1,2,*}

Представлено академиком РАН Н.Ф. Морозовым 05.06.2020 г.

Поступило 21.09.2020 г.

После доработки 24.09.2020 г.

Принято к публикации 25.09.2020 г.

Рассмотрены две пластины Кирхгофа, соединенные посредством двух шеренг заклепок, которые расположены с малым периодом h и моделируются точечными условиями сопряжения Соболева. Обнаружен новый и неожиданный эффект: в случае зеркальной симметрии шеренг почти полное сцепление пластин происходит при экспоненциально малом (относительно h) расстоянии между шеренгами. Тот же эффект при расположении заклепок в шахматном порядке возникает лишь в случае степенной малости расстояния. Эти результаты получены при помощи анализа явления пограничного слоя. Найдены условия, при которых в пределе реализуется шарнирное соединение с трением.

Ключевые слова: склепанные пластины, точечные условия Соболева, полное сцепление и шарнирное соединение

DOI: 10.31857/S2686740020060140

1. *Преамбула.* В настоящем сообщении представлен новый и неожиданный эффект в задаче о двух пластинах Кирхгофа, соединенных периодическими рядами мелких заклепок, которые моделируются точечными условиями Соболева, связывающими прогибы пластин. В сообщении [1] при расстояниях $\ell = O(h)$ между рядами, сравнимых по порядку с малым периодом h , было описано отличие многорядья заклепок и однорядья: в первом случае реализуется “почти полное” сцепление пластин (поля смещений и напряжений в пределе при $h \rightarrow +0$ оказываются непрерывными на линии стыка), а во втором – лишь шарнирное сочленение (углы поворота одной пластины относительно другой не фиксируются, но на стыке аннулируется изгибающий момент). Далее будет продемонстрировано, что почти полное сцепление сохраняется и при малых расстояниях $\ell = o(h)$, а именно, в ситуациях “визави” (V на рис. 1а) и “зиг-заг” (Z на рис. 1б) нужны соответственно такие ограничения:

$$\ell = hl_0 \exp(-\beta_0 h^{-2\alpha}), \quad \alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \quad (1)$$

$$\ell_0 > 0, \quad \beta_0 > 0,$$

$$\ell = \ell_0 h^{1+\alpha}, \quad \alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \quad \ell_0 > 0. \quad (2)$$

Иными словами, при клепании весьма сближенными (на экспоненциально малое расстояние) парами (рис. 1а) пластины в пределе соединяются в цельную пластину, но при разрозненном клепании (рис. 1б) даже гораздо большее расстояние между рядами приводит к шарнирному сочленению пластин. Именно сдвоенное расположение заклепок рекомендуется в инженерной практике (см., например, справочник [2]). Уменьшение расстояний между заклепками позволяет сузить область перехлеста пластин при сохранении прочности соединения и тем самым способствует экономии материала. Однако соотношения (1) и (2) относятся исключительно к идеализированной модели клепания, и в реальности сближение заклепок приходится ограничивать по причине возможного разрушения перемычек. К сожалению, применяемая модель не приспособлена к детализированному изучению процесса разрушения, который на практике обычно осуществляется путем “срезания головок”, а не разрывом за-

¹ Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

² Институт проблем машиноведения Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия

*E-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

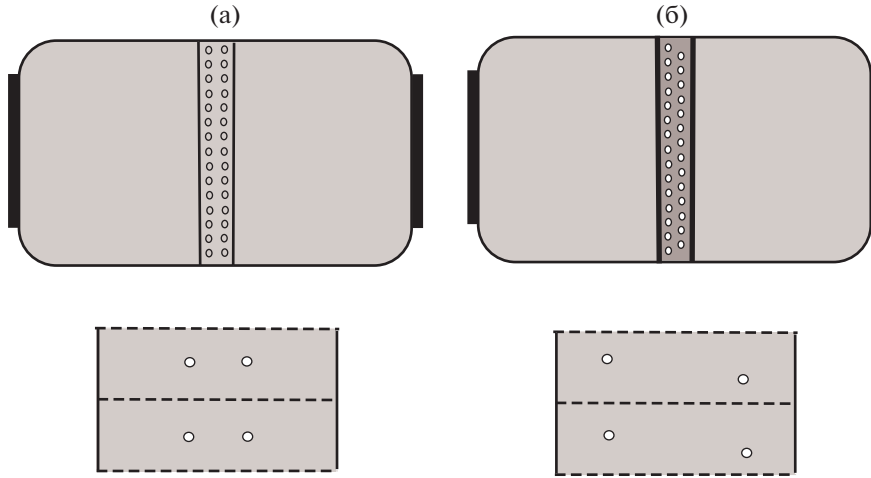


Рис. 1. Расположение заклепок по схеме “визави” (а) и “зиг-заг” (б). Внизу растянутые ячейки периодичности.

клепок, который все-таки можно включить в разрабатываемую модель.

При предельном значении $\alpha = 1/2$ показателя в (1) и (2) установлены новые предельные условия сопряжения на линии стыка, оставляющие непрерывными прогибы и перерезывающие силы, но связывающие моменты на краях пластин со скачком углов поворотов. Эти условия выводятся путем построения разномасштабных пограничных слоев, а предложенные асимптотические конструкции встретились в теории пластин Кирхгофа, по-видимому, впервые.

2. Постановка задачи. Пусть Ω – односвязная область на плоскости \mathbb{R}^2 , ограниченная простым замкнутым кусочно-гладким контуром $\Gamma = \partial\Omega$ с двумя уплощенными участками $\{x = (x_1, x_2): |x_1| < L, x_2 = \pm 1\}$ – масштабированием полудлина отрезка $\Upsilon = \{x \in \Omega: x_1 = 0\}$ сведена к двум, и декартова система координат x сделана безразмерной. Возьмем большое натуральное число $N \in \mathbb{N}$ и введем налегающие одна на другую пластины

$$\Omega_{\pm}^h = \{x \in \Omega: \pm x_1 > -hN = -H/N\} \quad (3)$$

и точки внутри общей их части $Q^h = \Omega_+^h \cap \Omega_-^h = \{x \in \Omega: |x_1| < hN\}$:

$$P_{(j\pm)}^h = (\pm hl, h(j \pm d)) \in Q^h, \quad j = 0, \pm 1, \dots, \pm N. \quad (4)$$

Здесь $h = (1 + 2N)^{-1}$ – малый параметр, а следующие безразмерные величины зафиксированы:

$$H > 0, \quad l \in (0, H), \quad d \geq 0.$$

Положим $\Upsilon_{\pm}^h = \{x \in \Omega: \pm x_1 = -hN\}$ и выделим непустые замкнутые дуги $\Sigma_{\pm} \subset \partial\Omega_{\pm}^0 \setminus \bar{\Upsilon}$, причем $\Omega_{\pm}^0 = \{x \in \Omega: \pm x_1 > 0\}$.

Прогибы u_{\pm}^h пластин Кирхгофа (3), скрепленных в точках (4), удовлетворяют уравнению Софи Жермен (см., например, [3, § 30])

$$\Delta_x^2 u_{\pm}^h(x) = f_{\pm}(x), \quad x \in \Omega_{\pm}^h \setminus \mathcal{P}^h, \quad (5)$$

краевым условиям свободного и защемленного края

$$N^q(x, \nabla_x) u_{\pm}^h(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega_{\pm}^h \setminus \bar{\Sigma}_{\pm}, \quad q = 2, 3, \quad (6)$$

$$u_{\pm}^h(x) = 0, \quad \partial_n u_{\pm}^h(x) = 0, \quad x \in \Sigma_{\pm}, \quad (7)$$

а также условиям сопряжения Соболева

$$u_+^h(x) = u_-^h(x), \quad (8)$$

$$x \in \mathcal{P}^h = \{P_{(j\pm)}^h: j = 0, \pm 1, \dots, \pm N\},$$

корректность постановки которых обеспечена теоремой Соболева (см., например, [4]) о вложении $H^2 \subset C$ на плоскости. Здесь $\nabla_x = \text{grad}$, $\Delta_x = \nabla_x \cdot \nabla_x$ – оператор Лапласа, а операторы краевых условий имеют вид [5, 3]

$$N^2(x, \nabla_x) = \Delta_x - (1 - \nu)(\partial_s^2 + \kappa(s)\partial_n),$$

$$N^3(x, \nabla_x) = \partial_n \Delta_x - (1 - \nu)(\partial_s \kappa(s)\partial_s - \partial_n \partial_s^2), \quad (9)$$

$$\partial_n = \frac{\partial}{\partial n}, \quad \partial_s = \frac{\partial}{\partial s},$$

где (n, s) – система криволинейных координат в окрестности \mathcal{V} контура Γ , n – ориентированное расстояние до Γ , $n < 0$ в $\Omega \cap \mathcal{V}$, s – длина дуги, измеренная в направлении против часовой стрелки,

а $\kappa(s)$ – кривизна в точке $s \in \Gamma$. На прямолинейных участках, разумеется, $\kappa = 0$, а угловые точки границы не принимаются во внимание в краевых условиях (6) и (7). Наконец, $\nu \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ – коэффициент Пуассона, отсутствующий в бигармонических уравнениях (5), но фигурирующий в функционале упругой энергии $\frac{1}{2} DE(u_{\pm}^h, u_{\pm}^h; \Omega_{\pm}^h)$, запасенной пластиной Ω_{\pm}^h под действием поперечной нагрузки Df_{\pm} , $D > 0$ – цилиндрическая жесткость пластин,

$$E(u, v; \Omega) = \int_{\Omega} \left(\Delta_x u \Delta_x v + (1 - \nu) \times \right. \\ \left. \times \left(2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right) \right) dx.$$

При учете формулы Грина (см. [3, § 30]), включающей дифференциальные операторы (9), вариационная формулировка задачи (5)–(8)

$$\sum_{\pm} E(u_{\pm}^h, \psi_{\pm}^h; \Omega_{\pm}^h) = \sum_{\pm} (f_{\pm}, \psi_{\pm}^h)_{\Omega_{\pm}^h} \quad \forall \psi^h \in \mathcal{H}^h \quad (10)$$

осуществляется на пространстве

$$\mathcal{H}^h = \{u^h = (u_+^h, u_-^h) \in H^2(\Omega_+^h) \times H^2(\Omega_-^h): \\ \text{выполнены условия (7) и (8)}\}.$$

Здесь $(\cdot, \cdot)_{\Omega}$ – натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега $L^2(\Omega)$, а $H^l(\Omega)$ – пространство Соболева порядка $l \in \mathbb{N}$.

В силу условий Дирихле (7) и простого неравенства

$$E(u_{\pm}^h, u_{\pm}^h; \Omega_{\pm}^h) \geq (1 - \nu) \|\nabla_x \nabla_x u_{\pm}^h; L^2(\Omega_{\pm}^h)\|^2$$

задача (10) с правыми частями $f_{\pm} \in L^2(\Omega)$ имеет единственное решение $u^h \in \mathcal{H}^h$ и верна оценка

$$\sum_{\pm} \|u_{\pm}^h; H^2(\Omega_{\pm}^h)\| \leq c \sum_{\pm} \|f_{\pm}; L^2(\Omega_{\pm}^h)\|.$$

Следовательно, сужения полей u_{\pm}^h на подобласти Ω_{\pm}^0 подчинены сходимостям

$$u_{\pm}^h \rightarrow u_{\pm}^0 \text{ слабой в } H^2(\Omega_{\pm}^0) \\ \text{и сильной в } H^1(\Omega_{\pm}^0) \text{ и } H^1(\Upsilon). \quad (11)$$

Предел $u^0 = (u_+^0, u_-^0)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\sum_{\pm} E(u_{\pm}^0, \psi_{\pm}^0; \Omega_{\pm}^0) = \sum_{\pm} (f_{\pm}, \psi_{\pm}^0)_{\Omega_{\pm}^0} \quad \forall \psi^0 \in \mathcal{H}^0, \quad (12)$$

а строение пространства \mathcal{H}^0 составных функций $\psi^0 = (\psi_+^0, \psi_-^0)$ представлено далее для различных ситуаций.

3. Не слишком сближенные ряды заклепок. Сначала допустим, что в обеих ситуациях Z и V справедливо соотношение

$$l = l_0 h^{\alpha} \quad (13)$$

с показателем $\alpha \in [0, 1/2)$. Для следов на $\bar{\Upsilon} = \partial\Omega_+^0 \cap \partial\Omega_-^0$ функций $u_{\pm}^h \in H^2(\Omega_{\pm}^h)$, подчиненных условиям Соболева (8), выполнено неравенство

$$h^{-3/2} \|u_+^h - u_-^h; L^2(\Upsilon)\| + \\ + h^{2\alpha-1} \left\| \frac{\partial u_+^h}{\partial x_1} - \frac{\partial u_-^h}{\partial x_1}; L^2(\Upsilon) \right\| \leq c \sum_{\pm} \|u_{\pm}^h; H^2(\Omega_{\pm}^h)\|. \quad (14)$$

Таким образом, $L^2(\Upsilon)$ -нормы из левой части (14) оказываются бесконечно малыми при $h \rightarrow +0$, т.е. предел $u^0 = (u_+^0, u_-^0)$ из (11) и его градиент становятся непрерывными на разделительном отрезке Υ . Таким образом, в случае (13) имеем

$$\mathcal{H}^0 = \{u^0 \in H^2(\Omega): u^0 = \partial_n u^0 = 0 \text{ на } \Sigma = \Sigma_+ \cup \Sigma_-\}. \quad (15)$$

В итоге $\Delta^2 u^0 = f$ в Ω и $u^0 \in H^4(\Omega)$, т.е. все упругие поля оказываются непрерывными на стыке пластин Ω_{\pm}^0 , которые тем самым в пределе образуют единое целое.

4. Ситуация Z: заклепки сближены. Предположим, что $\alpha > 1/2$ в формуле (13). Тогда в интегральном тождестве (12) появляется более широкое, чем (15), пространство

$$\mathcal{H}^0 = \{u^0 = (u_+^0, u_-^0) \in H^2(\Omega_+^0) \times H^2(\Omega_-^0): \\ u_+^0 = u_-^0 \text{ на } \Gamma, u_{\pm}^0 = \partial_n u_{\pm}^0 \text{ на } \Sigma_{\pm}\}, \quad (16)$$

в котором углам поворота $\frac{\partial u_{\pm}^0}{\partial x_1}$ разрешено претер-

певать скачки на общей кромке Υ пластин Ω_{\pm}^0 . Если при $\alpha \in [0, 1/2)$ предельный переход в интегральном тождестве (10) осуществляется для пробных функций ψ_{\pm}^h , полученных сужением $\psi^0 \in C_c^{\infty}(\bar{\Omega} \setminus \bar{\Sigma})$ на подобласти Ω_{\pm}^h , и потому заведомо удовлетворяющие условиям Соболева (8), то теперь нужна пробная функция (ψ_+^h, ψ_-^h) , для которой пределы ψ_{\pm}^0 совпадают на Υ , но производным $\frac{\partial \psi_{\pm}^0}{\partial x_1}$ разрешены разрывы. Из-за последнего условия конструкция нужной пробной функции усложняется:

$$\begin{aligned} \psi_-^h(x) &= \Psi_-(x), \\ \psi_+^h(x) &= \Psi_+(x) - \sum_{\pm} \sum_{j=-N}^N \chi(h^{-1}(x - P_{(j\pm)}^h)) \times \\ &\times (\Psi_+(P_{(j\pm)}^h) - \Psi_-(P_{(j\pm)}^h)). \end{aligned} \quad (17)$$

При этом Ψ_{\pm} – продолжение ψ_{\pm} с Ω_{\pm}^0 на Ω при сохранении гладкости,

$$|\Psi_+(P_{(j\pm)}^h) - \Psi_-(P_{(j\pm)}^h)| \leq ch^{1+\alpha}, \quad (18)$$

а $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ – срезающая функция, равная единице вблизи начала координат. Поскольку в ситуации Z расстояния между парами точек из множества \mathcal{P}^h превосходят ch , $c > 0$, уменьшением носителя срезки χ добиваемся дизъюнктивности семейства носителей слагаемых суммы из (17). Таким образом, квадрат $H^2(Q^h)$ -нормы поправочной суммы не превосходит $Ch^{-4}h^2(1 + 2N)h^{2+2\alpha}$ (соответственно вклады вторых производных функции $\chi(h^{-1}\cdot)$, площадей носителей слагаемых и их количества, а также мажоранты из оценки (18)) и окзывается бесконечно малой $O(h^{2\alpha-1})$ при $\alpha > 1/2$. В итоге предельный переход $h \rightarrow +0$ в соотношении (10) действительно дает интегральное тождество (12) на пространстве (16).

Дифференциальная постановка полученной предельной задачи на сочленении пластин $\Omega_+^0 \cup \Omega_-^0$ включает два условия сопряжения

$$u_+^0(+0, x_2) = u_-^0(-0, x_2),$$

$$N^3(\nabla_x)u_+^0(+0, x_2) = N^3(\nabla_x)u_-^0(-0, x_2), \quad |x_2| < 1,$$

и два краевых условия

$$N^2(\nabla_x)u_{\pm}^0(\pm 0, x_2) = 0, \quad |x_2| < 1. \quad (19)$$

Операторы (9) упрощаются на Υ , так как $\kappa = 0$, а функциональное пространство в интегральном тождестве (12) принимает вид (16).

5. Ситуация V: критический показатель. При $d = 0$ расстояние между соседними точками $P_{(j+)}^h$ и $P_{(j-)}^h$ равно $2hl$ (см. формулу (4)) и составляет $o(h)$ в случае (13) при $\alpha > 1/2$, а значит, рассуждения из предыдущего раздела не приводят к успеху. К сожалению, автор не знает простого приема, позволяющего осуществить предельный переход в ситуации Z при $\ell = o(h^{1/2})$, но заменяет его более сложным асимптотическим анализом. Примем соотношения

$$d = 0, \quad \ell = \ell_0 \exp(-\beta/h), \quad \ell_0 > 0, \quad \beta > 0, \quad (20)$$

и поясним, почему в случае (1) при $\alpha < 1/2$ предельном служит задача (12), (15) о цельной пластине Ω .

При растяжении координат $x \mapsto \xi = h^{-1}x$ и переходе к $h = 0$ получаем следующую задачу о двух полуполосах $\Pi_{\pm} = \{\xi \in \mathbb{R}^2: \pm \xi_1 > -H, |\xi_2| < 1/2\}$, соединенных в начале координат,

$$\Delta_{\xi}^2 w_{\pm}(\xi) = 0, \quad \xi \in \Pi_{\pm} \setminus \mathcal{P}^0, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} N^q(\nabla_{\xi})w_{\pm}(-H, \xi_2) &= g_{\pm}^q(\xi_2), \\ |\xi_2| < 1/2, \quad q &= 2, 3, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^p w_{\pm}}{\partial \xi_2^p} \left(\xi_1, +\frac{1}{2} \right) &= \frac{\partial^p w_{\pm}}{\partial \xi_2^p} \left(\xi_1, -\frac{1}{2} \right), \\ \pm \xi_1 > -H, \quad p &= 0, 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (23)$$

$$w_+(\xi) = w_-(\xi), \quad \xi \in \mathcal{P}^0. \quad (24)$$

Множество \mathcal{P}^0 содержит только начало координат $P^0 = (0, 0)$, так как точки $P_{(j-)}^h$ и $P_{(j+)}^h$ совпали в пределе. Медленная переменная $x_2 \in (-1, 1)$ осталась в качестве параметра, и

$$g_{\pm}^2(\xi_2) = -N^2(\nabla_x)u_{\pm}^0(\pm 0, x_2), \quad g_{\pm}^3(\xi_2) = 0. \quad (25)$$

Такая задача не имеет решения, если $g_{\pm}^2 \neq 0$.

Для того чтобы учесть малое расстояние $2lh$ между точками $P_{(j+)}^h$ и $P_{(j-)}^h$ (см. формулы (4) и (20)), введем сверхбыстрые переменные $\eta = \ell^{-1}\xi = h^{-1}e^{\beta/h}x$ и получим еще одну предельную задачу

$$\begin{aligned} \Delta_{\eta}^2 v_{\pm}(\eta) &= 0, \quad \eta \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{P}, \\ v_+(\eta) &= v_-(\eta), \quad \eta \in \mathcal{P}, \end{aligned} \quad (26)$$

с условиями Соболева в двух точках $P_{\pm} = (\pm \ell_0, 0)$, т.е. $\mathcal{P} = \{P_+, P_-\}$. Вспомнив фундаментальное решение $\Phi(\eta) = -(8\pi)^{-1}|\eta|^2 \ln|\eta|$ бигармонического оператора на плоскости, находим решения $v_{\pm} = \pm V$ задачи (26), где бигармоническая функция

$$\begin{aligned} V(\eta) &= \Phi(\eta_1 - \ell_0, \eta_2) - \\ &- \Phi(\eta_1 + \ell_0, \eta_2) + \ell_0^{-1}\eta_1\Phi(2\ell_0, 0) \end{aligned} \quad (27)$$

имеет такое поведение в координатах η и ξ :

$$\begin{aligned} V(\eta) &= -2\ell_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_1}(\eta) + O(|\eta|) = \\ &= \frac{\ell_0}{2\pi} \eta_1 \ln|\eta| + O(|\eta|) = \\ &= e^{\beta/h} \frac{\ell_0}{2\pi} \left(\xi_1 \ln|\xi| - \frac{\beta}{h} \xi_1 + O(h^0|\xi|) \right). \end{aligned} \quad (28)$$

При учете множителя h^{-1} в правой части (28) члены внутреннего разложения около пар точек $P_{(j\pm)}^h$

$$v_{\pm}^0(x_2) + he^{-\beta/h} (\eta_1 a'(x_2) \pm ha''(x_2)V(\eta) + \dots), \quad (29)$$

которое предстоит срастить с внешним разложением

$$u_{\pm}^0(x) = u_{\pm}^0(\pm 0, x_2) + h\xi_1 \frac{\partial u_{\pm}^0}{\partial x_1}(\pm 0, x_2) + \dots,$$

приобретает вид $v_{\pm}^0(x_2) = u_{+}^0(+0, x_2) = u_{-}^0(-0, x_2)$ и

$$a'(x_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{+}^0}{\partial x_1} (+0, x_2) + \frac{\partial u_{-}^0}{\partial x_1} (-0, x_2) \right),$$

$$a''(x_2) = \pm \frac{2\pi}{\beta l_0} \left(\frac{\partial u_{+}^0}{\partial x_1} (+0, x_2) - \frac{\partial u_{-}^0}{\partial x_1} (-0, x_2) \right).$$

Кроме того, производная фундаментального решения, присутствующая в (28), уточняет уравнения (21) для члена $h^2 w_{\pm}(\xi, x_2)$ типа пограничного слоя:

$$\Delta_{\xi}^2 w_{\pm}(\xi; x_2) = \pm \frac{2}{\beta} \frac{\partial \delta}{\partial \xi_1}(\xi) \left(\frac{\partial u_{+}^0}{\partial x_1} (+0, x_2) - \frac{\partial u_{-}^0}{\partial x_1} (-0, x_2) \right), \quad (30)$$

$$\xi \in \Pi_{\pm}.$$

Правая часть содержит производную дельта-функции Дирака. Условия разрешимости задачи (30), (22)–(25) принимают вид

$$N^2 (\nabla_x)_x u_{\pm}^0(\pm 0, x_2) = m \left(\frac{\partial u_{+}^0}{\partial x_1} (+0, x_2) - \frac{\partial u_{-}^0}{\partial x_1} (-0, x_2) \right), \quad (31)$$

$$|x_2| < 1,$$

с коэффициентом $m = 2/\beta$, которые заменяют краевые условия (19) в предельной задаче и означают шарнирное соединение пластин с трением. В вариационной постановке новой задачи функциональное пространство (16) сохраняется, но в левую часть интегрального тождества (5) добавляется положительная билинейная форма

$$m \left(\frac{\partial u_{+}^0}{\partial x_1} - \frac{\partial u_{-}^0}{\partial x_1}, \frac{\partial \psi_{+}^0}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_{-}^0}{\partial x_1} \right)_{\Gamma},$$

и полученная задача остается однозначно разрешимой.

5. З а м е ч а н и я. 1°. Для критического показателя в ситуации Z, т.е. при $d > 0$ и $\alpha = 1/2$ в формулах (4) и (2), соответственно, в пределе при $h \rightarrow +0$ также возникают краевые условия (31), однако коэффициент $m > 0$ определяется более сложной формулой, включающей некую инте-

гральную характеристику задачи (21)–(24) о скреплении полубесконечности полос в двух точках $\mathcal{P}^0 = \{P^{\pm} = (0, \pm d)\}$.

2°. Если в ситуации V выполнено соотношение (1) с $\alpha < 1/2$, то в правой части (28) появляется слагаемое $-\beta h^{2\alpha} \xi$, у которого порядок роста при $h \rightarrow +0$ недостаточен для взаимодействия с членами $\eta_1 a'(x_2)u$ и $\pm ha''(x_2)V(\eta)$ внутреннего разложения (29). В итоге предельная задача (12) ставится на пространстве (15) и описывает сцепление пластин Ω_{\pm}^0 в единое целое.

3°. Ключевое различие ситуаций Z и V обусловлено разным количеством точек, в которых назначены условия сопряжения Соболева в предельной задаче (26) о мелком пограничном слое. Если $d > 0$ в определении (4), то расстояние между соседними точками $P_{(j\pm)}^h$ составляет $O(h)$, а значит, после введения сверхбыстрых переменных условия Соболева в задаче (26) ставятся в одной точке $\mathcal{P} = \{P^0 = (0, 0)\}$, а решение однородной задачи растет на бесконечности как $O(|\eta|^2 \ln |\eta|)$. Если же $d = 0$, то упомянутое расстояние есть $o(h)$, и у двуточечной (т.е. $\mathcal{P} = \{P^{\pm} = (\pm l_0, 0)\}$) задачи (26) появляется решение (27) с меньшим ростом $O(|\eta| \ln |\eta|)$. Расхождение порядков роста сказывается на процедуре сращивания, которая, в свою очередь, требует существенно отличающихся ограничений (2) и (1) для обеспечения полного сцепления пластин в пределе.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 17–11–01003).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Назаров С.А. Моделирование клепания: асимптотический анализ пластин Кирхгофа с точечными условиями Соболева // ДАН. 2019. Т. 489. № 1. С. 29–34.
2. Анурьев В.И. Справочник конструктора–машиностроителя. В 3 т. / Под. ред. И.Н. Жестковой. 9-е изд., перераб. и доп. М.: Машиностроение, 2006. 928 с.
3. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
4. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988. 334 с.
5. Бирман М.Ш. О вариационном методе Трэффца для уравнения $\Delta^2 u = f$ // ДАН СССР. 1955. Т. 101. № 2. С. 201–204.

ASYMPTOTIC ANALYSIS OF DOUBLE-ROW RIVETING OF THE KIRCHHOFF PLATES

S. A. Nazarov^{a,b}

^a Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, Russian Federation

^b Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, Saint-Petersburg, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS N.F. Morozov

Two Kirchhoff plates are considered which are joined by means of two rows of rivets posed with the small period h and modelled by point Sobolev transmission conditions. A new and unexpected effect is observed, namely the almost complete clutch of the plates occurs even for an exponentially small (with respect to h) distance between the rows in the mirror symmetry case. The same effect appears in the case of rivets' chessboard order for the power-law smallness of the distance only. These results are obtained with the help of analysis of boundary layer phenomena. Conditions are found to provide the swivel joint of the plates with friction in the limit.

Keywords: riveted plates, Sobolev point conditions, complete clutch and swivel joint