ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2020, том 495, с. 9–13

ФИЗИКА

УДК 517.958

О ВЫВОДЕ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ И ГРАВИТАЦИИ ИЗ ПРИНЦИПА НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ

© 2020 г. В. В. Веденяпин[1,*], М. Ю. Воронина[1], А. А. Руссков[1]

Представлено академиком РАН Б.Н. Четверушкиным 07.09.2020 г.
Поступило 22.09.2020 г.
После доработки 29.09.2020 г.
Принято к публикации 30.09.2020 г.

Проблема обоснования уравнений гравитации и электродинамики с помощью принципа наименьшего действия является классической. Предлагается вывод уравнений Власова–Максвелла–Эйнштейна из классического, но немного более общего принципа наименьшего действия. При этом получается впервые вывод правых частей уравнений Максвелла и Эйнштейна, а потому и замкнутая система уравнений для гравитации и электродинамики.

Ключевые слова: уравнение Власова, уравнение Власова–Эйнштейна, уравнение Власова–Максвелла, уравнение Власова–Пуассона

DOI: 10.31857/S268674002006019X

В классических работах (см. [1–4]) уравнения для полей даются без вывода правых частей. Здесь мы предлагаем вывод правых частей уравнений Максвелла и Эйнштейна в рамках уравнений Власова–Максвелла–Эйнштейна из классического, но немного более общего принципа наименьшего действия.

1. Действие в общей теории относительности и уравнения для полей. Пусть $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e)$ – функция распределения частиц по пространству $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, по скоростям $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, массам $m \in \mathbb{R}$ и заряду $e \in \mathbb{R}$ в момент времени $t \in \mathbb{R}$. Это означает, что число частиц в объеме $d\mathbf{x}\,d\mathbf{v}\,dm\,de$ равно $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e)\,d\mathbf{x}\,d\mathbf{v}\,dm\,de$. Рассмотрим действие:

$$S = -c\int mf(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e)\sqrt{g_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu}}\,d^3x d^3v\,dm\,de\,dt - \\ -\frac{1}{c}\int ef(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e)\,A_{\mu}u^{\mu}d^3x d^3v\,dm\,de\,dt + \\ + k_1\int(R + \Lambda)\sqrt{-g}\,d^4x + k_2\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,d^4x, \tag{1}$$

где c – скорость света, $u^0 = c$ и $u^i = v^i$ $(i = 1, 2, 3)$ – трехмерная скорость, $x^0 = ct$ и x^i $(i = 1, 2, 3)$ – координата, $g_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t)$ – метрика $(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$, $A_{\mu}(\mathbf{x}, t)$ – 4-потенциал электромагнитного поля, $F_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) = \dfrac{\partial A_{\mu}(\mathbf{x}, t)}{\partial x^{\nu}} - \dfrac{\partial A_{\nu}(\mathbf{x}, t)}{\partial x^{\mu}}$ – электромагнитные поля, R – полная кривизна, Λ – лямбда-член Эйнштейна, $k_1 = -\dfrac{c^3}{16\pi\gamma}$ и $k_2 = -\dfrac{1}{16\pi c}$ – константы [1–4], g – определитель метрики $g_{\mu\nu}$, γ – постоянная тяготения, по повторяющимся индексам, как обычно, идет суммирование.

Вид действия (1) удобен для получения уравнений Эйнштейна и Максвелла при варьировании по полям $g_{\mu\nu}$ и A_{μ}. Такой способ вывода уравнений Власова–Максвелла и Власова–Эйнштейна использовался в работах [5–8]. При варьировании (1) по $g_{\mu\nu}$ получим уравнение Эйнштейна:

$$k_1\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(R + \Lambda)\right)\sqrt{-g} = \\ = \int m\frac{f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e)}{2\sqrt{g_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu}}}u^{\mu}u^{\nu}d^3v\,dm\,de - \\ -\frac{1}{2}k_2F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}g^{\mu\nu}\sqrt{-g}. \tag{2}$$

Первое слагаемое правой части этого уравнения и является по определению Гильберта тензором энергии-импульса. Он выписан впервые в таком виде в работах [7, 8] в менее общем виде без распределения по массам и зарядам. Попытки выписать тензор энергии-импульса через функцию распределения предпринимались, насколько нам известно, только в релятивистской кине-

[1] *Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук, Москва, Россия*
******E-mail: vicveden@yahoo.com*

тической теории для уравнения Власова–Эйнштейна [5–15]. Однако использование функции распределения от четырехмерного импульса приводило к необходимости использовать дельта-функцию $\delta((mc^2)-g^{\mu\nu}P_\mu P_\nu)$. Также и уравнения движения, приводящие к уравнению типа Власова, также оказывались неудовлетворительными.

Уравнение электромагнитных полей получается варьированием (1) по A_μ и называется уравнением Максвелла:

$$k_2\frac{\partial\sqrt{-g}F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=\frac{1}{c^2}\int eu^\mu f(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e)\,d^3v\,dm\,de. \qquad (3)$$

Покажем, что вид действия (1) является более общим, чем в [1–4]. Для получения стандартного вида действия возьмем функцию распределения в виде δ-функции для одной частицы:

$$\begin{gathered}f(\mathbf{x},\mathbf{v},m,e,t)=\\=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'(t))\,\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}'(t))\,\delta(m-m')\,\delta(e-e').\end{gathered} \qquad (4)$$

Подставляя (4) в действие (1) и опустив знак ('), получаем стандартные [1–4] выражения для всех слагаемых:

$$\begin{gathered}S=-cm\int\sqrt{g_{\mu\nu}(\mathbf{x},t)u^\mu u^\nu}\,dt-\frac{e}{c}\int A_\mu(\mathbf{x},t)u^\mu dt+\\+k_1\int(R+\Lambda)\sqrt{-g}d^4x+k_2\int(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})\sqrt{-g}\,d^4x.\end{gathered} \qquad (5)$$

В роли частиц могут быть электроны и ионы в плазме, планеты в галактиках, галактики в супергалактиках, скопление галактик во Вселенной. В равенстве (4) мы можем взять сумму дельта-функций и получить обычное действие [1–4] для конечной системы частиц: этим обосновывается выбор более общего действия (1).

2. Уравнения движения частиц в заданных полях, уравнение Лиувилля и уравнение Власова–Максвелла–Эйнштейна. Воспользуемся инвариантностью первых двух слагаемых уравнения (5) относительно замены $t=\phi(\lambda)$. Здесь λ – произвольный параметр. Такая инвариантность хорошо известна [1–4]. Перепишем первые два слагаемых из уравнения (5):

$$S=-cm\int\sqrt{g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu}\,d\lambda-\frac{e}{c}\int A_\mu u^\mu d\lambda, \qquad (6)$$

и варьируя по $\mathbf{x}(\lambda)$, получаем уравнение Эйлера–Лагранжа:

$$\begin{gathered}cm\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{g_{\mu\nu}u^\nu}{\sqrt{g_{\eta\xi}u^\eta u^\xi_\nu}}+\frac{e}{c}A_\mu\right]=\\=cm\frac{1}{\sqrt{g_{\eta\xi}u^\eta u^\xi_\nu}}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\mu}u^\mu u^\nu+\frac{e}{c}\frac{\partial A_\nu}{x^\mu}u^\nu.\end{gathered} \qquad (7)$$

Уравнение (7) перепишем, обозначив через $I=g_{\eta\xi}\dfrac{\partial x^\eta}{\partial\lambda}\dfrac{\partial x^\xi}{\partial\lambda}$ интеграл движения:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2}+\Gamma^\mu_{\nu\eta}\frac{dx^\eta}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}=\frac{e}{mc^2}\sqrt{I}F^\mu_\nu\frac{dx^\nu}{d\lambda}, \qquad (8)$$

здесь $\Gamma^\mu_{\nu\eta}$ – символ Кристофеля:

$$\Gamma^\mu_{\nu\eta}=\frac{1}{2}g^{\mu m}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^\nu}+\frac{\partial g_{m\nu}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{k\nu}}{\partial x^m}\right).$$

Уравнение (8) отличается от приведенных в руководствах [1–4] наличием $\sqrt{I}$ в правой части: в этих руководствах дифференцирование идет по собственному времени $ds=d\lambda\sqrt{I}$. Это неудобно, так как для каждой частицы это собственное время индивидуально. Далее будет использована формула (8), которая обладает симметрией при замене $\mathbf{x}\to\alpha\mathbf{x}$, $\lambda\to\alpha\lambda$, что и позволяет понизить ее порядок. Для этого перепишем уравнение (8) в виде

$$\begin{gathered}\frac{dx^\mu}{d\lambda}=v^\mu,\\\frac{dv^\mu}{d\lambda}=-\Gamma^\mu_{\nu\eta}\frac{dx^\eta}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}+\frac{e\sqrt{I}}{mc^2}F^\mu_\nu\frac{dx^\nu}{d\lambda}.\end{gathered} \qquad (9)$$

Избавляемся от λ, поделив остальные уравнения на первое из уравнений системы (9). Так как $x^0=ct$ пропорционально времени, обозначим $v^\mu/v^0=\dfrac{dx^\mu}{dx^0}=w^\mu$ – безразмерная скорость, где $w^0=1$. При этом из-за симметрии, описанной выше, можно избавиться от уравнения $\dfrac{dv^0}{dx^0}$ и написать уравнения по x^i,w^i $(i=1,2,3)$. Такое понижение порядка описано для гравитации в книгах Фока [1] и Вейнберга [3]. Там этот переход в уравнениях приведен для гравитации, где уравнения не отличаются для параметра λ и собственного времени s. Однако если добавляется электромагнетизм, то отличие заключается как раз в появлении корня в правой части, который обеспечивает необходимую симметрию. Нам это понижение переходом к собственному времени необходимо, так как наша цель – получить уравнение на функцию распределения $f(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e)$. Тогда

$$\begin{gathered}\frac{dx^i}{dx^0}=v^i,\\\frac{dv^i}{dx^0}=G^i,\end{gathered} \qquad (10)$$

где G^i обозначено следующее выражение:

$$G^i = -\Gamma^i_{\nu\eta}v^\nu v^\eta + \frac{v^i}{c}\Gamma^0_{\eta\nu}v^\eta v^\nu + \frac{e\sqrt{J}}{mc^2}\left[F^i_\eta v^\eta - \frac{v^i}{c}F^0_\eta v^\eta\right],$$

а $J = g_{\nu\xi}v^\nu v^\xi$, v^i – трехмерная скорость.

Мы получили уравнения движения заряженных частиц в электромагнитных и гравитационных полях в релятивистской форме из принципа наименьшего действия.

В заключение выпишем уравнение Лиувилля для функции распределения $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e, t)$ и системы (10):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v^i\frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{\partial(G^i f)}{\partial v^i} = 0. \quad (11)$$

Уравнения (10), (2) и (3) образуют систему уравнений Власова–Максвелла–Эйнштейна. Это замкнутая система уравнений релятивистской электродинамики и гравитации. Общий смысл уравнений типа Власова именно таков: они позволяют замкнуть систему электродинамики (уравнение Власова–Максвелла) и гравитации (уравнение Власова–Эйнштейна) и вывести их из принципа наименьшего действия.

3. Общий переход к гидродинамике [6, 7]. Рассмотрим произвольную систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = v(x), \quad x \in R^n, \quad v(x) \in C^1(R^n).$$

Перепишем ее в виде $x = (q, p)$, $q \in R^m$, $p \in R^{n-m}$:

$$\frac{dq}{dt} = w(q, p), \quad \frac{dp}{dt} = g(q, p).$$

Выпишем уравнение Лиувилля для функции распределения $f(t, q, p)$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(w_i f)}{\partial q_i} + \frac{\partial(g_j f)}{\partial p_j} = 0.$$

Выполним гидродинамическую подстановку $f(t, q, p) = \rho(q, t)\delta(p - Q(q, t))$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial\rho(q,t)}{\partial t}\delta(p - Q(q,t)) - \\ - \rho(q,t)\frac{\partial\delta(p - Q(q,t))}{\partial p_i}\frac{\partial Q_i(q,t)}{\partial t},$$

$$\frac{\partial(w_i(q,p)f)}{\partial q_i} = \frac{\partial(w_i(q,Q)\rho(q,t))}{\partial q_i}\delta(p - Q(q,t)) - \\ - \rho(q,t)w_i(q,Q(q,t))\frac{\partial(p - Q(q,t))}{\partial p_k}\frac{\partial Q_k(q,t)}{\partial q_i},$$

$$\frac{\partial(g_j(q,p)f)}{\partial p_j} = \rho(q,t)g_j(q,Q(q,t))\frac{\partial\delta(p - Q(q,t))}{\partial p_j}.$$

При дифференцировании мы воспользовались правилами дифференцирования обобщенных функций. Собирая множители при дельта-функции и ее производных, получаем систему уравнений:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho w_i(q,Q))}{\partial q_i} = 0,$$

$$\rho(q,t)\left(\frac{\partial Q_j(q,t)}{\partial t} + \right. \\ \left. + w_i(q,Q(q,t))\frac{\partial Q_j(q,t)}{\partial q_i} - g_j(q,Q(q,t))\right) = 0.$$

Гидродинамическая подстановка была изобретена в рамках уравнений Власова [4], а для произвольных систем обыкновенных дифференциальных уравнений введена в [6]. Это система уравнений имеет яркий геометрический смысл: она описывает движение m-мерных поверхностей в n-мерном пространстве в силу исходной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Получающаяся система квазилинейных уравнений не общая, а в терминологии Куранта и Гильберта называется системой уравнений с одинаковой главной частью. Для гамильтоновых систем из нее получается уравнение Гамильтона–Якоби естественным способом: проходит подстановка для скоростей в виде градиента функции, которая оказывается действием [6]. В случае линейной исходной системы ОДУ решение системы с одинаковой главной частью можно искать в виде $Q_k(t,q) = \lambda^a_k(t)q_a$, линейном по координатам q. Получается система обыкновенных дифференциальных уравнений в матричном виде на матрицу $\lambda^a_k(t)$. Это обобщение слет-разлетных решений, которые мы используем ниже.

4. Нерелятивистская гидродинамика. Применим этот способ в нерелятивистском случае для вывода уравнений Власова–Пуассона–Пуассона и гравитационной газодинамики заряженных частиц, действуя по той же схеме. Нерелятивистский случай соответствует действию [5, 6]:

$$S = \int\left[\frac{mv^2}{2} - e\varphi - mU\right]\times \\ \times f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e)\,d\mathbf{x}d\mathbf{v}dmdedt + \quad (12) \\ + \frac{1}{8\pi}\int(\nabla\varphi)^2\,d\mathbf{x}dt - \frac{1}{8\pi\gamma}\int(\nabla U)^2\,d\mathbf{x}dt.$$

Варьируем по φ и по U, получая дважды уравнения Пуассона:

$$\Delta\varphi = -4\pi\int ef(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e)\,d\mathbf{v}dmde, \\ \Delta U = 4\pi\gamma\int mf(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e)\,d\mathbf{v}dmde. \quad (13)$$

Действие для одной частицы следует при выборе

$$f(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e) = \\ = \delta(e-q)\delta(m-M)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}(t))\delta(\mathbf{v}-\mathbf{y}'(t)).$$

Рассмотрим для такой функции распределения первое слагаемое в (12), получая стандартное действие:

$$S_1 = \int\left[\frac{my'^2}{2} - q\varphi(\mathbf{y}) - MU(\mathbf{y})\right]dt.$$

Варьируем, как обычно в механике, и получаем уравнение Ньютона:

$$M\mathbf{y}'' - M\frac{\partial U}{\partial \mathbf{y}} - q\frac{\partial\varphi}{\partial \mathbf{y}} = 0.$$

Переходим к уравнению Лиувилля для соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{v},$$
$$\dot{\mathbf{v}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} - \frac{q}{M}\frac{\partial\varphi}{\partial \mathbf{x}},$$

тогда

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left(\mathbf{v}, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\right) - \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q}{M}\frac{\partial\varphi}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}\right) = 0. \qquad (14)$$

Система (13)–(14) и есть система уравнений Власова–Пуассона–Пуассона.

Получим гидродинамические следствия этих уравнений, как это было сделано выше в п. 3 [4–6]: $f(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e) = \rho(t,\mathbf{x},m,e)\delta(\mathbf{v}-\mathbf{w}(t,\mathbf{x},m,e))$. Тогда

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{w}) = 0,$$
$$\frac{\partial w_k}{\partial t} + w_i\frac{\partial w_k}{\partial x_i} + \frac{\partial U}{\partial x_k} + \frac{q}{M}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} = 0,$$
$$\Delta\varphi = -4\pi\int e\rho\, dmde,$$
$$\Delta U = 4\pi\gamma\int m\rho\, dmde.$$

Получим автомодельное решение этой системы, предполагая однородность по пространству правых частей в (12). Пусть $w_k(t,\mathbf{x},m,e) = x_k w(t)$ – слет-разлетные решения, $\rho(t,\mathbf{x},m,e) = h(t,m,e)$ (однородность по пространству). Тогда

$$\varphi = -x^2\frac{2\pi}{3}\int eh(t,m,e)dmde,$$

$$U = x^2\frac{2\pi\gamma}{3}\int mh(t,m,e)dmde.$$

Поэтому получаем уравнение

$$\frac{\partial h}{\partial t} + 3hw = 0,$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} + w^2 + \frac{2\pi\gamma}{3}\int mh(t,m,e)\,dmde - \\ - \frac{2\pi q}{3M}\int eh(t,m,e)\,dmde = 0.$$

Получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для $w(t)$ и

$$\alpha(t) = -\frac{2\pi q}{3M}\int eh(t,m,e)dmde + \\ + \frac{2\pi\gamma}{3}\int mh(t,m,e)dmde:$$

$$\frac{d\alpha}{dt} + 3w\alpha = 0,$$
$$\frac{dw}{dt} + w^2 + \alpha = 0. \qquad (15)$$

Это есть нерелятивистский аналог уравнений Фридмана – обобщенные уравнения Милна–МакКри. В случае нейтральности функция $\rho(t,\mathbf{x},m,e) = h(t,m,e)$ положительная и четная по зарядам, поэтому первое слагаемое в $\alpha(t)$ равно нулю и функция $\alpha(t)$, связанная только с гравитацией, положительна. Отметим, что это точное решение уравнения Власова–Пуассона и его гидродинамического следствия. Из второго уравнения видим, что ускорение $\frac{dw}{dt}$ отрицательно, и единственный способ сделать его положительным – это сделать $\alpha(t)$ отрицательным, т.е. включить первое слагаемое. Либо добавить лямбда-член Эйнштейна, и тогда к $\alpha(t)$ добавляется отрицательная постоянная. Это дает то, что наблюдается в эксперименте как ускоренное расширение галактик, что ассоциируется с темной энергией. Это случай заряженных частиц одного знака или случай каких-либо гипотетических отталкивающих взаимодействий. Таким образом, при отрицательных $\alpha(t)$ мы получаем модель ускоренного расширения в области под параболой $\alpha < -w^2$ (уравнение (15) как возможная математическая модель).

Итак, мы получили уравнения электродинамики и гравитации в замкнутой форме из принципа наименьшего действия в форме уравнения Власова (ср. [5–15]). Проясняется смысл уравнений типа Власова: это единственный пока способ получить и уравнение гравитации, и уравнения электродинамики из принципа наименьшего действия, а также единственный пока способ замкнуть систему уравнений гравитации и электродинамики с помощью принципа наименьшего действия, используя функцию распределения объектов (электронов, ионов, звезд в галактиках, галактик в супергалактиках или Вселенной) по скоростям и пространству. Соответствующие уравнения гидродинамического уровня (например, уравнения магнитной гидродинамики) также естественно получать из уравнений типа Власова гидродинамической подстановкой (пока единственный способ связи с классическим действием и для этих уравнений).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фок В.А.* Теория пространства, времени и тяготения. М.: ЛКИ, 2007.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М.: Наука, 1988.
3. *Вейнберг С.* Гравитация и космология. М.: Мир, 1975. 696 с.
4. *Власов А.А.* Статистические функции распределения. М.: Наука, 1966. 356 с.
5. *Веденяпин В.В., Негматов М.А.* // Теоретическая и математическая физика. 2012. Т. 170. № 3. С. 468–480.
6. *Веденяпин В.В., Негматов М.-Б.А., Фимин Н.Н.* // Изв. РАН. Сер. матем. 2017. Т. 81. № 3. С. 45–82.
7. *Vedenyapin V., Fimin N., Chechetkin V.* // European Physical J. Plus. 2020. № 400. 14 с.
8. *Vedenyapin V.V., Fimin N.N., Chechetkin V.M.* // Intern. J. Modern Physics D. 2020. V. 29. № 1. 23 p.
9. *Huanchun Ye., Morrison P.* Action principles for the Vlasov equations // Phys. Fluids. 1992. V. 4. № 4. P. 771–777.
10. *Choquet-Bruhat Y.* General Relativity and the Einstein Equations. Oxford: Oxford Univ. Press, 2009.
11. *O'Neill E.* Hamiltonian structure and stability of relativistic gravitational theories: Dissertation for degree D. Ph. University of Florida, 2000.
12. *Cercigniani C., Kremer G.M.* The relativistic Boltzmann Equation: theory and applications. Boston, Basel, B.: Birghause, 2002.
13. *Choquet–Bruhat Y., Damour T.* Introduction to general relativity, black holes and cosmology. N.Y.: Oxford University Press, 2015.
14. *Rein G., Rendall A.D.* Global existence of solutions of the spherically symmetric Vlasov–Einstein system with small initial data // Commun. Math. Phys. 1992. V. 150. P. 561–583.
15. *Kandrup H.E., Morrison P.J.* Hamiltonian structure of the Vlasov–Einstein system and the problem of stability for spherical relativistic star clusters // Ann. Phys. 1993. V. 225. P. 114–166.

ON THE DERIVATION OF THE EQUATIONS OF ELECTRODYNAMICS AND GRAVITATION FROM THE PRINCIPLE OF LEAST ACTION

V. V. Vedenyapin[a], M. Yu. Voronina[a], and A. A. Russkov[a]

[a] *Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS B.N. Chetverushkin

The problem of justification of gravitation and electrodynamic equations with the help of minimal action principle is a classical one. A derivation of Vlasov–Maxwell–Einstein equation is proposed from classical but a little bit general minimal action principle. So we get new derivation of right hand side of Maxwell and Einstein Equations and so one gets a closed system of equations for gravitation and electrodynamics.

Keywords: Vlasov equation, Vlasov–Einstein equation, Vlasov–Maxwell equation, Vlasov–Poisson equation