

УДК 534.1; 539.3

## ПОЛОЖЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ ИЗОГНУТОГО ТРУБОПРОВОДА С ВИБРИРУЮЩИМИ ОПОРАМИ

© 2021 г. Член-корреспондент РАН М. А. Ильгамов<sup>1,2,3,\*</sup>, М. М. Шакирьянов<sup>1,\*\*</sup>

Поступило 22.12.2020 г.

После доработки 23.12.2020 г.

Принято к публикации 25.12.2020 г.

Определяются области притяжения прогиба к верхнему и нижнему равновесным положениям двухопорного трубопровода при его пространственных колебаниях. Предполагается, что опоры совершают вертикальные высокочастотные колебания с равными амплитудами и фазами. Используются нелинейные уравнения изгиба и углового движения трубопровода вокруг оси, проходящей через опоры. Для решения задачи применяется теория движения маятника Капицы. Установлено, что преобладающее влияние на изгиб внутреннего давления среды в трубопроводе над его весом и превышение момента сил вибрации опор над моментом сил гравитации обуславливают наличие верхнего и нижнего равновесных положений и соответствующих областей притяжения.

*Ключевые слова:* трубопровод, пространственный изгиб, вибрация опор, равновесные положения

**DOI:** 10.31857/S2686740021010053

1. Поведение механической системы значительно зависит от вибраций основания, на котором она установлена. Ярким примером является динамика маятника с вибрирующей точкой подвеса [1–3]. Его перевернутое положение при определенных условиях является устойчивым. К ним относится, в частности, достаточная интенсивность вибрации точки подвеса.

В настоящей работе исследуются устойчивые изогнутые положения пролета трубопровода между двумя опорами в том случае, когда обе опоры совершают вертикальные колебания равной амплитуды в одной фазе. Насколько известно, напряженно-деформированное состояние трубопровода в указанной постановке не изучалось. Вопросам динамики трубопроводов посвящено большое количество работ, например, [4–10]. Обзор соответствующих исследований приводится в [5].

2. Рассматриваются пространственные колебания двухопорной трубы с заключенной в ней жидкостью относительно горизонтальной оси, проходящей через опоры. Труба, изогнутая собственным весом и действием постоянного внутреннего давления  $p_0$  и в момент времени  $t = 0$  отклоненная на угол  $\theta_0$  от вертикальной плоскости, освобождается от связей без начальной угловой скорости. С этого момента времени основание, с которым закреплены опоры, начинает совершать вертикальные вибрационные движения  $s(t)$ . Предполагается, что опоры допускают свободное вращение трубы вокруг продольной оси. Деформации трубы, связанные с ее выходом из плоскости изгиба, считаются малыми, нет деформации кручения. Поэтому изогнутая ось трубопровода является плоской кривой. Согласно этим допущениям движение трубопровода может рассматриваться как совокупность относительных изгибных перемещений  $w(x, t)$  в одной плоскости и ее переносных вращений  $\theta(t)$  вокруг оси  $x$ . Малыми считаются также продольные распределенные нагрузки (продольные силы инерции, трение потока). Расстояние между концевыми сечениями трубы на опорах остается неизменным.

Дифференциальные уравнения пространственных колебаний трубопровода по изгибно-вращательной модели приведены в [8]. Используемые в настоящей работе уравнения совместных изгибных

<sup>1</sup> Институт механики Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук, Уфа, Россия

<sup>2</sup> Институт машиноведения им А.А. Благонравова Российской академии наук, Москва, Россия

<sup>3</sup> Башкирский государственный университет, Уфа, Россия

\*E-mail: [ilgamov@anrb.ru](mailto:ilgamov@anrb.ru)

\*\*E-mail: [shakmar9@mail.ru](mailto:shakmar9@mail.ru)

и вращательных колебаний трубопровода имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \left( g + \frac{d^2 s}{dt^2} \right) \cos \theta + w \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \\ &\quad - \frac{EJ}{m} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{T - p_0 F_0}{m} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \left( \frac{J_p}{m} + \int_0^L w^2 dx \right) \frac{d^2 \theta}{dt^2} &+ 2 \frac{d\theta}{dt} \int_0^L w \frac{\partial w}{\partial t} dx = \\ &= - \left( g + \frac{d^2 s}{dt^2} \right) \sin \theta \int_0^L w dx, \quad m = \rho_0 F_0 + \rho F, \\ J &= \frac{\pi}{4} [(R+h)^4 - R^4], \quad T = \frac{EF}{2L} \int_0^L \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx, \end{aligned} \quad (1)$$

$$F_0 = \pi R^2, \quad F = \pi [(R+h)^2 - R^2], \quad J_p = 2\rho L J.$$

Здесь  $L$ ,  $R$ ,  $h$ ,  $E$ ,  $\rho$  – длина, внутренний радиус, толщина стенки, модуль Юнга и плотность материала трубы;  $g$ ,  $\rho_0$  – гравитационное ускорение и плотность несжимаемой жидкости. В соответствии с принятой моделью деформации прогиб  $w(x, t)$  отсчитывается по радиусу в цилиндрической системе координат, а угол  $\theta(t)$  – от нижней точки до плоскости изгиба.

Представим угол  $\theta$  и прогиб  $w$  в виде сумм

$$\theta = \theta_0 + \theta_1 + \theta_2, \quad w = w_0 + w_1 + w_2, \quad (2)$$

где величины с индексами 0, 1, 2 относятся к начальному состоянию (без маятникового качения и движения опор), вращательному движению трубы вокруг оси, проходящей через опоры, и к движению, вызванному вибрацией опор. В соответствии с указанной выше моделью изгиба трубы углы  $\theta_1(t)$ ,  $\theta_2(t)$  отсчитываются только в одной плоскости.

Примем, что  $s = s_0 \sin \Omega t$ , где  $s_0$ ,  $\Omega$  – амплитуда и круговая частота колебаний основания. Предполагается, что амплитуда  $s_0$  мала по сравнению с амплитудой прогиба трубопровода, а частота  $\Omega$  значительно выше частоты упругих колебаний. Принимаем также допущение, что все три функции прогиба по длине трубы изменяются одинаково:

$$\begin{aligned} w_0 &= W_0 \sin \beta x, \quad w_1 = W_1(t) \sin \beta x, \\ w_2 &= W_2(t) \sin \beta x, \quad \beta = \frac{\pi}{L}. \end{aligned} \quad (3)$$

Эти выражения удовлетворяют граничным условиям  $w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$  при  $x = 0, L$ . Ввиду предполагаемой высокой частоты движения опор может возбуждаться по длине трубы не одна, а несколько полуволн составляющей прогиба  $w_2$ . Однако для простоты анализа принимаем (3). Такое допуще-

ние может быть приемлемым для относительно короткой трубы.

Подставив функции (3) с учетом сумм (2) в систему (1) и применив в первом уравнении метод Бубнова–Галёркина, имеем

$$\begin{aligned} \ddot{W} + [\omega^2(1-p) - \dot{\theta}^2] W &= \frac{4}{\pi} \cos \theta (g - \Omega^2 s) - \gamma W^3, \\ (k^2 + W^2) \ddot{\theta} + 2 \dot{\theta} \dot{W} W &= \frac{4}{\pi} \sin \theta (\Omega^2 s - g) W, \\ p &= \frac{p_0}{p_*}, \quad k^2 = \frac{4\rho J}{m}, \quad \omega^2 = \frac{EJ\beta^4}{m}, \quad p_* = \frac{\beta^2 EJ}{F_0}, \\ W &= W_0 + W_1 + W_2, \quad \gamma = \frac{\beta^4 EF}{4m}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь и далее точка над буквой обозначает производную по времени. Для упрощения дальнейших преобразований  $\theta_0$  принято равным нулю. Также будем пользоваться приближениями  $\cos \theta = \cos \theta_1 - \theta_2 \sin \theta_1$ ,  $\sin \theta = \sin \theta_1 + \theta_2 \cos \theta_1$ . Тогда из (4) получаем

$$\begin{aligned} \ddot{W}_1 + \ddot{W}_2 + [\omega^2(1-p) - \dot{\theta}_1^2] (W_0 + W_1 + W_2) &= \\ = \frac{4}{\pi} (g - \Omega^2 s_0 \sin \Omega t) (\cos \theta_1 - \theta_2 \sin \theta_1) - \gamma W_0^3, \\ (k^2 + W_0^2) (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + 2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (\dot{W}_1 + \dot{W}_2) &\times \\ \times (W_0 + W_1 + W_2) &= \frac{4}{\pi} (W_0 + W_1 + W_2) \times \\ \times (\Omega^2 s_0 \sin \Omega t - g) (\sin \theta_1 + \theta_2 \cos \theta_1). \end{aligned} \quad (5)$$

В силу предположения, что в составе амплитуды общего прогиба наибольшей является  $W_0$ , принято  $W^2 \approx W_0^2$ ,  $W^3 \approx W_0^3$ . Это приближение будет оценено далее.

Исходя из первого уравнения системы (5), выпишем уравнения относительно  $W_0$ ,  $W_1$ ,  $W_2$ :

$$\begin{aligned} W_0^3 - a W_0 - b \cos \theta_1 &= 0, \quad \ddot{W}_1 - \omega^2(p-1) W_1 = 0, \\ \ddot{W}_2 - [\omega^2(p-1) + \dot{\theta}_2^2] W_2 - (W_0 + W_1) \dot{\theta}_2^2 &= \\ = - \frac{4s_0 \Omega^2 \cos \theta_1}{\pi} \sin \Omega t, \\ a &= \frac{4J}{F} (p-1), \quad b = \frac{4g}{\pi \gamma}. \end{aligned} \quad (6)$$

При малых значениях статической составляющей  $W_0$  прогиба трубы кубическим членом в первом уравнении (6) можно пренебречь. Тогда

$$W_0 = \frac{4mg \cos \theta_1}{\pi EJ \beta^4 (1-p)}. \quad (7)$$

При  $p = 1$  решение (7) неограниченно возрастает, когда среднее давление  $p_0$  достигает значения

$p_* = \frac{\beta^2 EJ}{F_0}$ , которое может быть названо критическим [8].

3. Для зримого представления вклада внутреннего давления и силы веса на значение статического прогиба  $W_0$  при  $p > 1$ , когда членом  $W_0^3$  в первом уравнении (6) следует считаться, рассмотрим его приближенное решение. С этой целью представим  $W_0 = W_p + W_g \cos \theta_1$ , где  $W_p$  и  $W_g$  – прогибы, обусловленные внутренним давлением и весом трубы. Исследуем случай преобладающего вклада давления на значение прогиба над вкладом силы веса. В приближенном решении будем пренебрегать  $W_g^2$  по сравнению с  $W_p^2$ . Это справедливо при  $\frac{b^2}{4a^3} \ll 1$ . Подставляя указанную сумму в (6), получаем уравнения

$$W_p(W_p^2 - a) = 0, \quad (3W_p^2 - a)W_g - b = 0.$$

В первом из них физический смысл имеет корень  $W_p = \sqrt{a}$ . Тогда

$$W_g = \frac{b}{2a}, \quad W_0 = \sqrt{a} + \frac{b}{2a} \cos \theta_1. \quad (8)$$

При  $g = 0$  точное решение кубического уравнения (6) совпадает с его приближенным решением (8). На рис. 1 приведена зависимость (8). При принятых данных приближенные значения (8) удовлетворительно описывают картину.

Решение второго уравнения системы (7) при нулевых начальных условиях – тривиальное:  $W_1 = 0$ . При установившихся вынужденных колебаниях  $\dot{W}_2 = \Omega W_2$ ,  $\ddot{W}_2 = \Omega^2 W_2$ ,  $\dot{\theta}_2 = \Omega \theta_2$  и  $\omega^2 \ll \Omega^2$ . Поэтому в третьем уравнении системы (6) вторым и третьим членами можно пренебречь. Приближенным решением этого уравнения является функция  $\pi W_2 = 4s_0 \cos \theta_1 \sin \Omega t$ , откуда следует, что  $W_2$  имеет порядок амплитуды колебаний опор. Ввиду этого в дальнейшем принимаем  $W \approx W_0$ . Эта оценка была использована также в (5). С учетом сказанного из второго уравнения системы (5) получаем

$$\pi(k^2 + W_0^2)(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + 2\pi W_0(\dot{W}_1 + \dot{W}_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) - 4W_0(\Omega^2 s - g)(\sin \theta_1 + \theta_2 \cos \theta_1) = 0.$$

Следуя работам [1–3], разбиваем это уравнение на два:

$$\pi(k^2 + W_0^2)\ddot{\theta}_2 + 2\pi W_0(\dot{W}_1 + \dot{W}_2)\dot{\theta}_2 - 4W_0(s_0 \Omega^2 \sin \theta_1 \sin \Omega t - g \theta_2 \cos \theta_1) = 0, \quad (9)$$

$$\pi(k^2 + W_0^2)\ddot{\theta}_1 + 2\pi W_0(\dot{W}_1 + \dot{W}_2)\dot{\theta}_1 - 4W_0(s_0 \Omega^2 \cos \theta_1 (\theta_2 \sin \Omega t) - g \sin \theta_1) = 0, \quad (10)$$

где угловые скобки обозначают операцию усреднения по времени за период  $\frac{2\pi}{\Omega}$ .

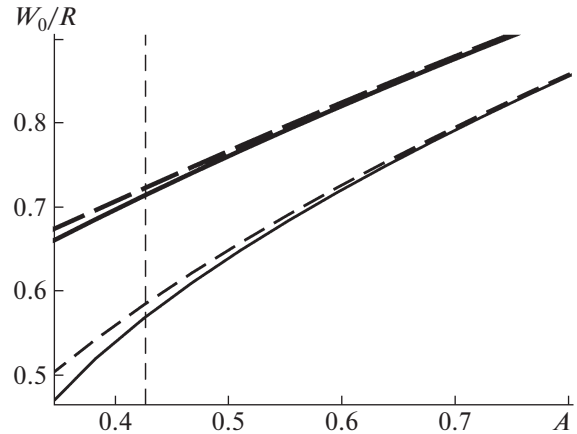


Рис. 1. Зависимости относительного прогиба  $\frac{W_0}{R}$  от

безразмерного параметра  $A = a/R^2$  внутреннего давления. Сплошные линии – результаты численного решения первого уравнения (6) соответственно для нижней ( $\theta_1 = 0$ ) и верхней ( $\theta_1 = \pi$ ) точек притяжения трубы, а штриховые – приближенного аналитического решения (8). Размеры трубы:  $L = 2$  м,  $R = 0.02$  м,  $h = 0.0005$  м, материал – армированный магниевый сплав:  $E = 0.64 \times 10^5$  МПа,  $\rho = 2400$  кг/м<sup>3</sup>, заполнение – газ метан:  $p_0 = 1.98$  МПа,  $\rho_0 = 64.8$  кг/м<sup>3</sup>. Кольцевые напряжения:  $\sigma_\theta = p_0 R/h = 79.2$  МПа. Предел прочности материала  $\sigma_s = 600$  МПа. Значения коэффициентов уравнения (6) для принятых данных:  $\frac{a}{R^2} = 0.426$  (вертикальная штриховая линия),  $\frac{b}{R^3} = 0.0590$ .

Ввиду большой частоты возбуждения  $\Omega$  из (9) получаем приближенное дифференциальное уравнение и его решение:

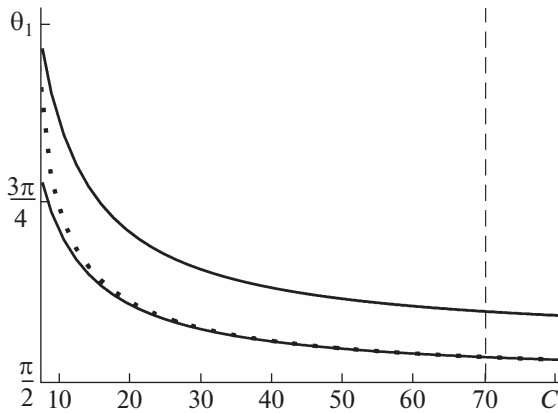
$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_2 &= \frac{4W_0 s_0 \Omega^2 \sin \theta_1 \sin \Omega t}{\pi(k^2 + W_0^2)}, \\ \theta_2 &= -\frac{4W_0 s_0 \sin \theta_1 \sin \Omega t}{\pi(k^2 + W_0^2)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Теперь могут быть оценены отброшенные члены при определении  $W_2$  и  $\theta_2$ .

Подставляя (11) в уравнение (10) и желая получить только решение вблизи положений динамического равновесия, положим в нем  $\ddot{\theta}_1 = 0$ ,  $\dot{\theta}_1 = 0$ . В результате находим

$$\sin \theta_1 [\pi g(k^2 + W_0^2) + 2W_0(s_0 \Omega^2) \cos \theta_1] = 0.$$

Из равенства  $\sin \theta_1 = 0$  имеем корни 0 и  $\pi$ , которые представляют собой нижнюю и верхнюю точки притяжения. При  $\sin \theta_1 \neq 0$  равенство нулю выражения в квадратных скобках с учетом значения  $W_0$  (8) дает



**Рис. 2.** Зависимость границы областей притяжения ( $\theta_1$ , рад.) от параметра  $C = \frac{(s_0\Omega)^2}{gW_p}$ , характеризующего деформацию трубопровода и интенсивность колебаний опор.

Пунктирной линией нанесены результаты вычислений по уравнению (12), а сплошными линиями (нижняя и верхняя) – соответственно по приближенным формулам (13) и (14) при данных  $g = 9.81 \text{ м/с}^2$ ,  $s_0 = 6 \times 10^{-4} \text{ м}$ ,  $\Omega = 5 \times 10^3 \text{ рад/с}$ ,  $W_p = 1.31 \times 10^{-2} \text{ м}$  параметр  $C = 70.0$  (вертикальная штриховая линия).

$$\cos \theta_1 = -\frac{\pi g(W_p + W_g \cos \theta_1)}{2(s_0\Omega)^2} \times \left(1 + \frac{k^2}{(W_p + W_g \cos \theta_1)^2}\right). \quad (12)$$

Этим уравнением определяется то значение угла  $\theta_1$ , выше которого изогнутый вверх трубопровод имеет тенденцию к повороту в направлении к вертикальному положению (к верхней точке  $\theta_1 = \pi$ ). Ниже этого значения  $\theta_1$  изогнутый трубопровод опускается к естественному нижнему положению ( $\theta_1 = 0$ ). Применение (12) оправдано при условии  $W_p > W_g$ , которое было использовано при их определении (8).

При сильной вибрации опор и относительно малой гравитации правая часть (12) существенно меньше единицы и угол  $\theta_1$  будет близок к значению  $\frac{\pi}{2}$ . Приняв в этом случае  $W_p + W_g \cos \theta_1 \approx W_p$  и  $\theta_1 = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$ ,  $\varepsilon^2 \ll \frac{\pi}{2}$ ,  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) = -\sin \varepsilon \approx -\varepsilon$ , находим из линейного уравнения относительно величины  $\varepsilon$  ее значение. Тогда

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi g W_p}{2(s_0\Omega)^2} \left(1 + \frac{k^2}{W_p^2}\right). \quad (13)$$

Такой случай реализуется, в частности, для вертикального трубопровода при сохранении направления вибрации опор перпендикулярно его оси. При этом области притяжения к точкам 0 и  $\pi$  являются одинаковыми ( $0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{2} < \theta_1 < \pi$ ).

При относительно слабой вибрации граница двух областей стремится к верхней точке ( $\theta_1 = \pi$ ) притяжения. Положив  $\theta_1 = \pi - \varepsilon$  и  $W_p + W_g \cos \theta_1 \approx W_p - W_g$ ,  $\cos(\pi - \varepsilon) = -\cos \varepsilon \approx -1 + \frac{\varepsilon^2}{2}$ , получаем приближение

$$\theta_1 = \pi - \sqrt{2} \left[1 - \frac{\pi g(W_p - W_g)}{(s_0\Omega)^2} \left(1 + \frac{k^2}{(W_p - W_g)^2}\right)\right]^{1/2}. \quad (14)$$

Из (14) следует, что при отношении

$$\frac{(s_0\Omega)^2}{\pi g} \leq \frac{(W_p - W_g)^2 + k^2}{W_p - W_g}$$

изогнутое вверх положение трубопровода невозможно.

На рис. 2 приведены зависимости по формулам (13) и (14), из которых следует, что в пределах своего применения они удовлетворительно описывают процесс.

4. Явление изгибания вверх пролета трубопровода между вибрирующими опорами может быть объяснено тем же механизмом, что приводит к подобному эффекту в случае маятника Капицы. В данном случае картина осложняется изменением общего прогиба, играющего роль длины маятника, в зависимости от игры сил гравитации и внутреннего давления, угла качения пролета вокруг оси, проходящей через опоры. При вертикальных колебаниях опор рассмотрен случай преобладающего влияния на изгиб внутреннего давления. При высоких частотах и малых амплитудах колебаний опор общий прогиб в принятом приближении может быть определен из нелинейного уравнения статического изгиба. Условие равенства момента распределенных по длине трубопровода сил гравитации и момента сил вибрации опор определяет границу областей выпучивания к нижнему и верхнему положениям. Около этой границы мало влияние на изгиб центробежных и кориолисовых сил. Предельные значения областей притяжения получаются при малой (большой) гравитации и сильной (слабой) вибрации опор. В случае преобладания сил веса над распределенной силой от внутреннего давления имеется только нижнее положение выпучивания. Сильное влияние на поведение системы оказывает значение критического внутреннего давления, при достижении которого труба между опорами испытывает выпучивание (по линейной теории). Необходимым, но недостаточным условием су-

существования двух точек притяжения является превышение внутреннего давления над его критическим значением.

#### ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках государственного задания (проекты № 0246-2019-0088, № 0049-2015-0040) и при поддержке РФФИ (грант № 18-01-00150).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Каница П.Л.* // ЖЭТФ. 1951. Т. 21. Вып. 5. С. 588–597.
2. *Каница П.Л.* // УФН. 1951. Т. 44. Вып. 1. С. 7–20.
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Механика. М.: Физматлит, 2004. Т. 1. 224 с.
4. *Panda L.N., Kar R.C.* // J. of Sound and Vib. 2008. V. 309. P. 375–406.
5. *Li S., Karney B.W., Liu G.* // J. of Fluids and Struct. 2015. V. 57. P. 277–297.
6. *Łuczko J., Czerwiński A.* // J. of Fluids and Struct. 2017. V. 70. P. 235–260.
7. *Yan H., Dai H., Ni Q., Wang L., Wang Y.* // J. of Fluids and Struct. 2018. V. 81. P. 36–57.
8. *Ганиев Р.Ф., Ильгамов М.А., Хакимов А.Г., Шакирьянов М.М.* // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2018. № 6. С. 3–12.
9. *Шакирьянов М.М.* // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 6. С. 76–84.
10. *Lu Z.Q., Zhang K.K., Ding H., Chen L.Q.* // Nonlinear Dyn. 2020. V. 100. № 2. P. 1091–1104.

## DYNAMIC EQUILIBRIUM POSITIONS OF BENDED PIPELINE WITH VIBRATING SUPPORTS

Corresponding Member of the RAS **M. A. Ilgamov<sup>a,b,c</sup>** and **M. M. Shakiryaynov<sup>a</sup>**

<sup>a</sup> *Institute of Mechanics, Ufa Federal Research Center, Russian Academy of Sciences, Ufa, Russian Federation*

<sup>b</sup> *Blagonravov Institute of Mechanical Engineering of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

<sup>c</sup> *Bashkir State University, Ufa, Russian Federation*

Areas of attraction of the deflection to the upper and lower equilibrium positions of a two-support pipeline during its spatial vibrations are determined. It is assumed that the supports perform vertical high-frequency vibrations with equal amplitudes and phases. Non-linear equations of bending and angular motion of the pipeline around the axis passing through the supports are used. The theory of motion of the Kapitza pendulum is used to solve the problem. It has been established that the prevailing influence on the bending of the internal pressure of the medium in the pipeline over its weight and the excess of the moment of vibration forces of the supports over the moment of gravitational forces determine the presence of upper and lower equilibrium positions and corresponding areas of attraction.

*Keywords:* pipeline, spatial bending, vibration of supports, equilibrium positions