

УДК 517.958;531.33;517.956.8

## АНОМАЛЬНОЕ ПРОХОЖДЕНИЕ ВОЛН ЧЕРЕЗ ТОНКИЙ КАНАЛ, СОЕДИНЯЮЩИЙ ДВА АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДА

© 2021 г. С. А. Назаров<sup>1,\*</sup>, Л. Шенель<sup>2,\*\*</sup>

Представлено академиком РАН Н.Ф. Морозовым 20.08.2020 г.

Поступило 21.09.2020 г.

После доработки 09.10.2020 г.

Принято к публикации 10.10.2020 г.

Найден критерий почти полного прохождения поршневой моды из одного трехмерного цилиндрического волновода в другой полубесконечный волновод через тонкий соединительный канал. Изложена асимптотическая процедура точной настройки параметра канала, нарушение которой приводит к почти полному или существенному отражению волны. В том случае, когда детали волновода — прямые цилиндры, критерий принимает особенно простой вид.

*Ключевые слова:* акустический волновод, почти полное прохождение волн, тонкий канал, асимптотика коэффициентов рассеяния

DOI: 10.31857/S2686740021010107

1. **Мотивировка.** Классическая задача о распространении акустических волн в полубесконечном цилиндре с прямым торцом и жесткими стенками решается при помощи метода Фурье, а простейшая форма волновода обеспечивает “идеальное” отражение приходящей из бесконечности волны: коэффициент отражения  $R$  равен единице. Возмущение конца полуцилиндра — образование резонатора Гельмгольца — обычно не может изменить дифракционную картину кардинально, так как коэффициент отражения  $R = e^{i\psi}$  не покидает единичную окружность на комплексной плоскости в силу закона сохранения энергии, однако при определенных, заведомо не всех, формах резонатора на изолированных частотах происходит захват волны. Иными словами, задача Неймана для оператора Гельмгольца приобретает решение, затухающее на бесконечности, а значит, и собственную частоту, причем окружающий ее узкий частотный диапазон характеризуется “странным” поведением коэффициентов рассеяния, которое ассоциируется с разнообразными аномалиями рассеяния — аномалии Вуда [1] и Вайнштейна [2], резонансы Фано [3] и пр. (см. обзорную статью [4]).

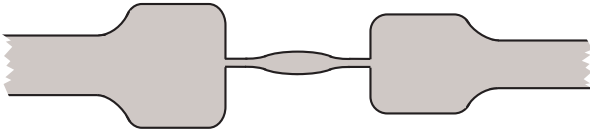
Поиск собственных частот, вкрапленных в непрерывный спектр и потому обладающих природной неустойчивостью, — занятие трудоемкое и требующее применения продвинутых методов, например, асимптотических. В настоящем сообщении изучается похожий вопрос, однако не связанный непосредственно со спектром: рассматриваются два полубесконечных цилиндра, соединенные тонкой перемычкой (рис. 1). На первый взгляд кажется, что ввиду предсказуемо плохой проводимости узкого акустического канала дифракционная картина мало отличается от описанной в предыдущем абзаце, за тем исключением, что модуль  $|R|$  коэффициента отражения становится чуть меньше единицы из-за незначительного, но все-таки ненулевого коэффициента прохождения  $T$ . В самом деле, почти полное отражение волны — ситуация общего положения, но далее будет показано, что на частотах, близких к собственной частоте  $k_*$  одномерной модели тонкого канала, может происходить обратное явление — почти полное прохождение волны (инвертированная аномалия Вайнштейна по терминологии [4]): большая часть энергии, приносимой волной с бесконечности в одной трубе, проникает через тонкую перемычку в другую трубу и уносится на бесконечность в ней, а амплитуда отраженной волны пропорциональна малому относительному диаметру узкого канала (ср. далее формулу (7)). Вместе с тем на самой частоте  $k_*$  указанная аномалия отсутствует, и для ее образования требуется “точная настройка” формы резонирующего канала.

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup> École Polytechnique, Université Paris-Saclay, Paris, France

\*E-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

\*\*E-mail: lucas.chesnel@inria.fr



**Рис. 1.** Двумерное изображение акустического волновода, состоящего из широких рукавов и узкого соединительного канала.

Для упрощения изложения задача дифракции решается в наиболее простой постановке, хотя предложенный подход допускает разнообразные обобщения, представляющие интерес в инженерной практике и годящиеся для создания волновых фильтров и демпферов. Так, соединение двух полубесконечных цилиндрических волноводов тонкими искривленными трубками в количестве  $N$  штук может обеспечить значительное прохождение волн из низкочастотного диапазона спектра только на заданном наперед наборе частот  $\{k_1, \dots, k_N\}$ . Еще одно важное обстоятельство: локализованные деформации трубок позволяют варьировать избранные частоты, т.е. изменять настройку фильтра.

Аномальное прохождение волн было описано, например, в статьях [5, 6] в случае падения плоской волны на толстую стенку с периодически расположенными узкими щелями и в [7] для одномерной модели неоднородного волновода с загруженным участком. Изученная далее задача о прохождении поршневой моды вдоль акустического волновода на рис. 1 различается с изученными ранее во многих аспектах. Во-первых, рассмотрен пространственный волновод, для которого строеные абсолютного большинства промежуточных и финальных формул отличается от плоского случая. Во-вторых, допускается существенно общая форма сечений волновода, не позволяющая применять использованные в предшествующих работах приемы сведения дифференциальной задачи к интегральным уравнениям или решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. В-третьих, сечения широких двух рукавов волновода не обязаны быть одинаковыми, и тем самым получен критерий (6) возникновения обсуждаемой аномалии. Наконец, изменена и суть вопроса: вместо проверки, что “почти полное прохождение реализуется на какой-то частоте”, установлено, что параметры соединительного канала можно подобрать так, чтобы искомый эффект наблюдался на заданной наперед частоте. Наконец, разработанная процедура точной настройки формы канала – то новшество, которое отличает данное сообщение от всех предшествующих публикаций.

Результат получен при помощи асимптотических методов: на канале применяется процедура

понижения размерности, а в зонах соединения – анализ сингулярно возмущенных задач (см. книги [8, 9] соответственно). Новый подход позволяет исследовать сочленения разнообразных (акустических, квантовых, упругих и т.д.) волноводов с различными предельными размерностями, причем не только для основных мод (поршневых в рассматриваемой ситуации). Незначительные ограничения на геометрию акустического волновода  $\Pi^\varepsilon$  с жесткой стенкой  $\partial\Pi^\varepsilon$  вводятся далее для упрощения изложения, и только в разд. 6 рукава волновода и канал становятся прямыми цилиндрами для полной конкретизации асимптотических формул.

2. Постановка задачи. Волновод состоит из двух рукавов-труб  $\Omega_\pm^\varepsilon$  и соединяющего их тонкого ( $\varepsilon \ll 1$ ) канала  $\Theta^\varepsilon$  переменного сечения (рис. 1), которые заданы формулами

$$\Omega_\pm^\varepsilon = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}: (y, \pm z - L_\pm^\varepsilon) \in \Omega_\pm\}, \quad (1)$$

$$\Omega_\pm(\ell) := \{x \in \Omega_\pm: \pm z > \ell\} = \omega_\pm \times (\ell, +\infty), \quad \ell > 0, \quad (2)$$

$$\Theta^\varepsilon = \{x: z \in [-L_-^\varepsilon, L_+^\varepsilon], \varepsilon^{-1}H(z)^{-1}y \in \theta\}, \quad (3)$$

$$\theta_\pm = \{y = (y_1, y_2): H_\pm^{-1}y \in \theta\},$$

$$L_\pm^\varepsilon = L_\pm^0 + \varepsilon L_\pm^1 + \varepsilon^2 L_\pm^2, \quad L := L_-^0 = L_+^0 > 0. \quad (4)$$

Здесь  $\varepsilon > 0$  – малый параметр,  $\omega_\pm$  и  $\theta$  – области на плоскости, ограниченные простыми замкнутыми гладкими контурами и содержащие начало декартовых координат  $y \in \mathbb{R}^2$ . Гладкая профильная функция  $H$  положительна на сегменте  $[-L - \ell_0, L + \ell_0]$  и

$$H(z) = H_\pm \quad \text{при} \quad |z \mp L| < \ell_0 \quad (5)$$

с некоторым  $\ell_0 > 0$ .

Наконец, поверхности  $\partial\Omega_\pm$  содержат начало  $\mathcal{O}$  декартовой системы координат  $x = (x_1, x_2, x_3)$  и совпадают с частями плоскости  $\{x: z = x_3 = 0\}$  в окрестности точки  $\mathcal{O}$ . Все специфические черты волновода отражены на рис. 1.

Гармонические во времени свободные колебания акустического поля с частотой  $k > 0$  описываются решениями задачи Неймана

$$\begin{aligned} -\Delta_x u^\varepsilon(x) &= k^2 u^\varepsilon(x), & x \in \Pi^\varepsilon, \\ \partial_n u^\varepsilon(x) &= 0, & x \in \partial\Pi^\varepsilon, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $u^\varepsilon$  – давление,  $\Delta_x$  – оператор Лапласа и  $\partial_n$  – производная вдоль внешней нормали  $n$ . Непрерывный спектр задачи (6) занимает полуось  $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ , а частота  $k$  берется из первого интервала  $(0, k_+)$  постоянной кратности, т.е.  $k_+ = \min k_\pm$  и  $k_\pm^2$  – первые положительные собственные числа задачи Неймана для оператора Лапласа

$\Delta_y$  на сечениях  $\omega_{\pm}$ . Таким образом, в цилиндрических частях (2) волновода (1) распространяются только поршневые моды  $w^{\pm}(x) = e^{\pm i\kappa z}$ .

Приходящая с бесконечности в рукаве  $\Omega_-^{\varepsilon}$  волна  $sw^+$  рассеивается в “резонаторе”  $\{x \in \Pi^{\varepsilon}: z \in (-L^{\varepsilon}, L^{\varepsilon})\}$ , возвращаясь в рукав  $\Omega_-^{\varepsilon}$  с коэффициентом отражения  $R^{\varepsilon}$  и проникая в рукав  $\Omega_+^{\varepsilon}$  с коэффициентом прохождения  $T^{\varepsilon}$ . Основная цель сообщения — показать, что подбор параметров канала (3), в частности, длин (4) может обеспечить соотношения

$$R^{\varepsilon} = O(\varepsilon), \quad |T^{\varepsilon}| = 1 + O(\varepsilon) \quad (7)$$

для коэффициентов рассеяния в дифракционном решении

$$u^{\varepsilon}(x) = \chi_-(z)(2\kappa|\omega_-|)^{-1/2} (e^{+i\kappa(z+L^{\varepsilon})} + R^{\varepsilon}e^{-i\kappa(z+L^{\varepsilon})}) + \chi_+(z)(2\kappa|\omega_+|)^{-1/2} T^{\varepsilon}e^{+i\kappa(z-L^{\varepsilon})} + \tilde{u}^{\varepsilon}(x) \quad (8)$$

задачи (6). Здесь остаток  $\tilde{u}^{\varepsilon}$  экспоненциально затухает на бесконечности, а  $\chi_{\pm}$  — гладкая срезающая функция, служащая для локализации волн в рукаве  $\Omega_{\pm}^{\varepsilon}$ ,

$$\begin{aligned} \chi_{\pm}(z) &= 0 \quad \text{при} \quad \pm z < L + \ell, \\ \chi_{\pm}(z) &= 1 \quad \text{при} \quad \pm z > L + 2\ell. \end{aligned} \quad (9)$$

Подчеркнем, что закон сохранения энергии гарантирует равенство  $|R^{\varepsilon}|^2 + |T^{\varepsilon}|^2 = 1$ , а нормирующий множитель  $(2\kappa|\omega_{\pm}|)^{-1/2}$  в поршневых модах содержит площадь  $|\omega_{\pm}|$  сечения  $\omega_{\pm}$

3. Специальные решения предельных задач. Задача в изолированном рукаве

$$\begin{aligned} -\Delta_x u_{\pm}(x) &= \kappa^2 u_{\pm}(x), \quad x \in \Omega_{\pm}, \\ \partial_n u_{\pm}(x) &= 0, \quad x \in \partial\Omega_{\pm}, \end{aligned}$$

имеет два используемых далее решения: поле

$$\zeta_{\pm}(x) = \chi(z)(2\kappa|\omega_{\pm}|)^{-1/2} (e^{-i\kappa z} + S_{\pm}e^{+i\kappa z}) + \tilde{\zeta}_{\pm}(x), \quad (10)$$

включающее приходящую и уходящую волны, и обобщенную функцию Грина

$$\begin{aligned} G_{\pm}(x) &= \chi_0(x)((2\pi|x|)^{-1} + G_{\pm}^0) + \\ &+ \chi(z)(2\kappa|\omega_{\pm}|)^{-1/2} K_{\pm}e^{+i\kappa z} + \tilde{G}_{\pm}(x). \end{aligned} \quad (11)$$

При этом остатки  $\tilde{\zeta}_{\pm}(x)$  и  $\tilde{G}_{\pm}(x)$  исчезают на бесконечности с экспоненциальной скоростью и справедливо равенство  $\tilde{G}_{\pm}(\mathbb{O}) = 0$ , а  $S_{\pm}$  и  $K_{\pm}$ ,  $G_{\pm}^0$  — комплексные числа, зависящие от формы рукава  $\Omega_{\pm}$  и частоты  $\kappa$ , причем выполнены соотношения

$$|S_{\pm}| = 1, \quad \zeta(\mathbb{O}) = iS_{\pm}\bar{K}_{\pm}. \quad (12)$$

Наконец,  $\chi_0$  — гладкая срезающая функция с малым носителем, равная единице в окрестности точки  $\mathbb{O}$ , а функция  $\chi$  определена формулой (9) при  $L = 0$ .

Одномерная модель тонкого канала (3) выглядит следующим образом (см., например, книги [8; 9, гл. 15]):

$$-|\theta|\partial_z H(z)\partial_z v(z) = \kappa^2 |\theta| H(z)v(z), \quad z \in (-L, L), \quad (13)$$

$$v(\pm L) = 0. \quad (14)$$

Пусть параметры  $L = L_{\pm}^0$  и  $H$  в формулах (3)–(5) подобраны так, что

$$(0, \kappa_{\mp}^2) \ni \kappa^2 \quad (15)$$

есть собственное число задачи (13), (14) и  $v \in C^{\infty}[-L, L]$  — соответствующая собственная функция. Ясно, что

$$A_{\pm} := |\theta_{\pm}|\partial_z v(\pm L) \neq 0. \quad (16)$$

Уравнение (13) с неоднородными краевыми условиями

$$v(\pm L) = g_{\pm} \quad (17)$$

имеет решение в том и только в том случае, если

$$g_+ A_+ - g_- A_- = 0. \quad (18)$$

Последняя из нужных предельных задач возникает в результате растяжения координат

$$x \mapsto \xi^{\pm} = (\varepsilon^{-1}y, \varepsilon^{-1}(L_{\pm}^{\varepsilon} \mp z)) \quad (19)$$

и формального перехода к  $\varepsilon = 0$ , которые переделывают область  $\Pi^{\varepsilon}$  в объединение  $\Xi_{\pm}$  полупространства  $\mathbb{R}_-^3 = \{\xi; \xi_3 < 0\}$  (освободили обозначения от верхних индексов  $\varepsilon^{\pm}$ ) и полуцилиндра  $Q_{\pm} = \theta_{\pm} \times [0, +\infty)$ , а задачу (6) — в задачу Неймана для уравнения Лапласа

$$\begin{aligned} -\Delta_{\xi} W(\xi) &= 0, \quad \xi \in \Xi_{\pm}, \\ \partial_{\nu(\xi)} W(\xi) &= 0 \text{ в } \mathbb{R}_-^3, \quad \xi \in \partial\Xi_{\pm}. \end{aligned} \quad (20)$$

Любое ограниченное решение задачи (20) — линейная комбинация  $c_0 + c_1 W_{\pm}(\xi)$  (см., например, обзор [10, §5]), в которой  $W_{\pm}$  — гармоническая в области  $\Xi_{\pm}$  функция с нулевыми данными Неймана на поверхности  $\partial\Xi_{\pm}$ , полностью определенная своим поведением на бесконечности:

$$W_{\pm}(\xi) = \begin{cases} (2\pi|\xi|)^{-1} + O(|\xi|^{-1}), & \xi \in \mathbb{R}_-^3, \quad |\xi| \rightarrow \infty, \\ |\theta_{\pm}|^{-1} (\xi_3 + M_{\pm}) + O(e^{-\kappa_3 \xi_3}), & \xi \in Q_{\pm}, \quad \xi_3 \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (21)$$

При этом  $M_{\pm} > 0$  – постоянная, зависящая только от формы сечения  $\theta_{\pm}$ .

4. Асимптотика коэффициентов рассеяния. Поскольку по предположению  $\kappa^2$  – собственное число задачи (13), (14), асимптотический анзац для решения (8) задачи (6) на канале  $\Theta^{\varepsilon}$  выглядит так:

$$u^{\varepsilon}(x) = \varepsilon^{-2} v^0(z) + \varepsilon^{-1} v'(z) + \varepsilon^0 (v''(z) + \mathcal{V}(\varepsilon^{-1}y, z)) + \dots \quad (22)$$

Здесь  $v^0 = a^0 v$  – собственная функция,  $a^0$  и  $v'$ ,  $v''$  – число и функции, подлежащие определению, а многочлен заменяет младшие асимптотические члены, не существенные для предприняемого анализа. Кроме того, функция  $\mathcal{V}$ , имеющая нулевое среднее по сечению, возникает как результат применения процедуры понижения размерности [8, 9, гл. 15] к задаче (6), суженной на тонкий канал (3), но  $\mathcal{V} = 0$  в случае прямого ( $H = \text{const}$ ) канала и  $\mathcal{V}(\varepsilon^{-1}y, z) = 0$  при  $|z \mp L| < \ell_0$  благодаря ограничению (5).

Вблизи зон присоединения канала  $\Theta^{\varepsilon}$  к рукавам  $\Omega_{\pm}^{\varepsilon}$  в силу краевых условий (14) имеем

$$u^{\varepsilon}(x) = \varepsilon^{-1} (\mp a^0 \xi_{\pm}^{\pm} \partial_z v(\pm L) + v'(\pm L)) + \dots \quad (23)$$

При этом  $\xi_{\pm}^{\pm} = \varepsilon^{-1}(L \mp z)$  – растянутая координата, отличающаяся от  $\xi_{\pm}^{\pm} = \xi_{\pm}^{\pm} + L' + \varepsilon L''$  (ср. формулы (9) и (19)). Следовательно, главный член внутреннего разложения

$$u^{\varepsilon}(x) = \varepsilon^{-1} V_{\pm}^0(\xi_{\pm}^{\pm}) + \varepsilon^0 V'_{\pm}(\xi_{\pm}^{\pm}) + \dots$$

принимает вид

$$V_{\pm}^0(\xi_{\pm}^{\pm}) = \mp a^0 |\theta_{\pm}| \partial_z v(\pm L) W_{\pm}(\xi_{\pm}^{\pm}, \xi_{\pm}^{\pm} \pm L' \pm \varepsilon L'') + C_{\pm}^0. \quad (24)$$

Вместе с тем внешние разложения в рукавах  $\Omega_{\pm}^{\varepsilon}$

$$u^{\varepsilon}(x) = u_{\pm}^0(y, L_{\pm}^{\varepsilon} \mp z) + \dots \quad (25)$$

остаются ограниченными при  $\varepsilon \rightarrow +0$ , т.е. ввиду затухания функции (21) в полупространстве приходится положить  $C_{\pm}^0 = 0$  в формуле (24). Следовательно, вблизи точек  $\mathbb{C}_{\pm}^{\varepsilon} = (0, 0, \pm L_{\pm}^{\varepsilon})$  выполнены разложения

$$\varepsilon^{-1} V_{\pm}^0(\xi_{\pm}^{\pm}) = \begin{cases} \mp a^0 A_{\pm} (2\pi|x - \mathbb{C}_{\pm}^{\varepsilon}|)^{-1} + \mathcal{O}(\varepsilon|x - \mathbb{C}_{\pm}^{\varepsilon}|^{-2}), & \pm z < L_{\pm}^{\varepsilon}, \\ \mp \varepsilon^{-1} a^0 \partial_z v(\pm L) (\xi_{\pm}^{\pm} + M_{\pm} + L' + \varepsilon L'') + \mathcal{O}(1), & \\ \pm z > L_{\pm}^{\varepsilon}. & \end{cases} \quad (26)$$

Наложим ограничения

$$L_{\pm} = -M_{\pm} \quad (27)$$

на вторые члены представлений (4) и в результате сравнения второй строки (26) с формулой (23) получим, что  $v'(\pm L) = 0$ , а значит, можно взять  $v' = 0$  в анзаце (22) на тонком канале.

Внутри рукавов  $\Omega_{\pm}^{\varepsilon}$  сращивание внутреннего разложения из первой строки (26) с внешним разложением (25) при учете проистекающих от (8) условий излучения

$$u_{-}^0(x) = (2\kappa|\omega_{-}|)^{-1/2} (e^{-i\kappa z} + R^0 e^{+i\kappa z}) + \dots, \\ u_{+}^0(x) = (2\kappa|\omega_{+}|)^{-1/2} T^0 e^{+i\kappa z} + \dots$$

показывает, что

$$u_{-}^0(x) = \zeta_{-}(x) + a^0 A_{-} G_{-}(x), \\ u_{+}^0(x) = -a^0 A_{+} G_{+}(x) \quad (28)$$

и

$$R^0 = S_{-} + a^0 A_{-} K_{-}, \quad T^0 = -a^0 A_{+} K_{+}. \quad (29)$$

Согласно формулам (28) и (10), (11) находим:

$$u_{\pm}^0(x) = \mp a^0 A_{\pm} (2\pi|x|)^{-1} + u_{\pm}^{\bullet} + \mathcal{O}(|x|), \\ u_{-}^{\bullet} = \zeta_{-}(0) + a^0 A_{-} G_{-}^0, \quad u_{+}^{\bullet} = -a^0 A_{+} G_{+}^0. \quad (30)$$

Следовательно, присоединив к (30) множители при  $1 = \varepsilon^0$  из формулы (22) и второй строки формулы (26), применим процедуру сращивания на указанном уровне и обнаружим связи

$$v''(-L) = g_{-} := \zeta_{-}(\mathbb{C}) + a^0 A_{-} G_{-}^0 + a^0 \partial_z v(-L) L''_{-}, \\ v''(+L) = g_{+} := -a^0 A_{+} G_{+}^0 - a^0 \partial_z v(+L) L''_{+}. \quad (31)$$

Слагаемое  $\mathcal{V}$  из анзаца (22) не сказывается ни на уравнении (13), ни на краевых условиях (31) для функции  $v''$ , а значит, условие (18) ее существования принимает вид

$$A_{-} \zeta_{-}(\mathbb{C}) = -a^0 \sum_{\pm} A_{\pm} (A_{\pm} G_{\pm}^0 + \partial_z v(\pm L) L''_{\pm}). \quad (32)$$

Осталось как-то зафиксировать величину  $L''_{\pm}$ , найти коэффициент  $a^0$  из соотношения (32) и, подставив его в формулы (29), вычислить главные члены асимптотики коэффициентов рассеяния

$$R^{\varepsilon} = R^0 + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad T^{\varepsilon} = T^0 + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (33)$$

5. Обеспечение почти полного прохождения. Для выполнения требований (7) нужно обратить в нуль выражение  $R^0$  из (29), т.е. соблюсти равенство

$$S_{-} = -a^0 A_{-} K_{-}. \quad (34)$$

Подставив соотношения (34), (12) в равенство (32) и зафиксировав величины

$$L_{\pm}'' = -|\theta_{\pm}| \operatorname{Re} G_{\pm}^0, \quad (35)$$

получаем необходимое (и достаточное согласно приведенным асимптотическим конструкциям) условие почти полного прохождения поршневой моды

$$A_{-}^2 |K_{-}|^2 = \sum_{\pm} A_{\pm}^2 \operatorname{Im} G_{\pm}^0. \quad (36)$$

Числа  $K_{\pm}, G_{\pm}^0 \in \mathbb{C}$  определены по заданным рукавам (1), но величины (4) и (16), относящиеся к соединительному каналу (3), по условию находятся в нашем распоряжении, и потому можно добиться выполнения условия (36) путем вариации профильной функции  $H$  – длина  $L_{-}^{\varepsilon} + L_{+}^{\varepsilon}$  канала  $\Theta^{\varepsilon}$  выбирается согласно формулам (15), (27) и (33).

6. Волновод, составленный из прямых цилиндров. Пусть  $\Omega_{\pm} = \omega_{\pm} \times \mathbb{R}_{+}$  и  $\Theta^{\varepsilon} = \theta \times [-L^{\varepsilon}, L^{\varepsilon}]$ . Решая предельные задачи из разд. 3, находим:

$$\begin{aligned} \zeta_{\pm}(\mathbb{O}) &= \sqrt{2} (\kappa |\omega_{\pm}|)^{-1/2}, \quad S_{\pm} = 1, \\ K_{\pm} &= \sqrt{2} i (\kappa |\omega_{\pm}|)^{-1/2}, \quad \operatorname{Im} G_{\pm}^0 = -(\kappa |\omega_{\pm}|)^{-1} \\ v(z) &= \cos(\kappa z), \quad L = (2\kappa)^{-1} \pi m, \quad m \in \{1, 2, 3, \dots\}, \\ A_{-} &= \kappa |\theta|, \quad A_{+} = (-1)^m \kappa |\theta|. \end{aligned} \quad (37)$$

Условие (36) почти полного прохождения поршневой моды принимает вид

$$2 \frac{\kappa |\theta|^2}{|\omega_{-}|} = \sum_{\pm} \frac{\kappa |\theta|^2}{|\omega_{\pm}|}$$

и выполняется исключительно при совпадении площадей сечений рукавов  $\Omega_{\pm}$ .

7. Комментарии. 1. *Геометрия.* Основную роль, разумеется, играет расстояние  $L_{+}^{\varepsilon} + L_{-}^{\varepsilon}$  между рукавами, а его разбиение (4) введено лишь для удобства: если, например,  $L_{-}^{\varepsilon} = 0$  и  $L_{+}^{\varepsilon} = -M_{+} - M_{-}$  (ср. формулы (27)), то вывод сохраняется, но второй член  $v'$  анзаца (22) перестает быть нулевым.

Границы областей  $\Omega_{\pm}$  и  $\theta$  могут быть липшицевыми, в частности, кусочно-гладкими. При этом вместо дифференциальной постановки задачи нужно использовать интегральное тождество – обобщенную постановку задачи. Допускаются кусочно-гладкие профильные функции  $H$ , в частности, выбор параметров  $L, L_{*}$  и  $H_{\pm} > 0$  в случае кусочно-постоянного профиля

$$\begin{aligned} H(z) &= H_{-} \quad \text{при} \quad z \in [-L, L_{*}), \\ H(z) &= H_{+} \quad \text{при} \quad z \in (L_{*}, L] \end{aligned}$$

позволяет добиться почти полного прохождения волны в ситуации  $\Omega_{\pm} = \omega_{\pm} \times \mathbb{R}_{+}, |\omega_{-}| \neq |\omega_{+}|$  из разд. 6.

Предположение об уплощении поверхностей  $\partial\Omega_{\pm}$  в окрестности начала координат  $\mathbb{O}$  тривиализует процедуру сращивания, но результат остается прежним и для изогнутых границ, а для конических точек  $\mathbb{O} \in \partial\Omega_{\pm}$  предложенный подход требует несущественных изменений (см. монографию [9, гл. 5]). Искривление оси канала  $\Theta^{\varepsilon}$  также не сказывается на предельном уравнении (13) (ср. публикации [11] и [9, гл. 15, 16]).

2. *Полное прохождение.* Проведенный асимптотический анализ в принципе позволяет достичь даже полного прохождения ( $R^{\varepsilon} = 0$ ) поршневой моды, так как выбор величин  $L_{\pm}''$  позволяет компенсировать возмущение мнимых частей выражений в (32), а вариация профиля  $H$  и как следствие величин  $A_{\pm}$  – возмущение вещественных частей. Вместе с тем необходимая процедура настройки усложняется значительно (см. статьи [11–13] для родственных задач) и вопрос оставлен открытым.

3. *Отражение.* Если  $\kappa^2$  не является собственным числом задачи (13), (14), то внешние разложения (25) и (22) включают функции  $u_{-}^0 = \zeta_{-}, u_{+}^0 = 0$  и решение  $v^0$  задачи (13), (17) с правыми частями  $g_{-} = \zeta_{-}(\mathbb{O}), g_{+} = 0$ . Таким образом,  $R^0 = S_{-}$  и  $T^0 = 0$  в представлениях (33) коэффициентов рассеяния, т.е. реализуется почти полное отражение поршневой моды.

Если нарушить “настройку” (35) длины канала  $\Theta^{\varepsilon}$ , то также возникает существенное отражение волны. Например, для составного цилиндрического волновода из разд. 6 при дополнительном ограничении  $|\omega| = |\omega_{+}| = |\omega_{-}|$  положим

$$L_{\pm}'' = |\theta| (\operatorname{Re} G_{\pm}^0 - (\kappa |\omega|)^{-1} t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Согласно соотношениям (29), (32) и (37) главные члены представлений (33) коэффициентов рассеяния принимают вид

$$R^0(t) = 1 - \frac{1+it}{1+t^2}, \quad T^0(t) = (-1)^{1+m} \frac{1+it}{1+t^2}.$$

Модуль  $|T^0(t)| = (1+t^2)^{-1}$  коэффициента прохождения монотонно убывает при возрастании малого отклонения  $2\varepsilon^2 t (\kappa |\omega|)^{-1} |\theta|$  от “правильно выбранной” длины канала. Пути  $\mathbb{R} \ni t \mapsto R^0(t), T^0(t) \in \mathbb{C}$

суть окружности с радиусом  $\frac{1}{2}$  и центрами в точках  $\frac{1}{2}, \frac{(-1)^{1+m}}{2}$  на вещественной оси.

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа С.А. Назарова выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 17-11-01003).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wood R.* On the remarkable case of uneven distribution of light in a diffraction grating spectrum // Proc. Phys. Soc. London. 1902. V. 18. P. 269–275.
2. *Вайнштейн Л.А.* Теория дифракции и метод факторизации. М.: Советское радио, 1966. 431 с.
3. *Fano U.* Effects of configuration interaction on intensities and phase shifts // Physical Review. 1961. V. 124. № 6. P. 1866–1878.
4. *Назаров С.А.* Аномалии рассеяния акустических волн вблизи точек отсечки непрерывного спектра (обзор) // Акустический журнал. 2020. Т. 66. № 5. С. 489–508.
5. *Kriegsmann G.A.* Complete transmission through a two-dimensional diffraction grating // SIAM J. Appl. Math. 2004. V. 65. № 1. P. 24–42.
6. *Lin J., Zhang H.* Scattering by a periodic array of sub-wavelength slits I: Field enhancement in the diffraction regime // Multiscale Model. Sim. 2018. V. 16. № 2. P. 922–953.
7. *Руденко О.В., Шварцбург А.Б.* О нелинейных и линейных волновых явлениях в узких трубках // Акустический журнал. 2019. Т. 65. № 3. С. 305–310.
8. *Назаров С.А.* Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки. Новосибирск: Научная книга, 2002. 408 с.
9. *Mazja W.G., Nasarow S.A., Plamenewski B.A.* Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestörten Gebieten. I. В.: Akademie-Verlag, 1991. 432 s.
10. *Назаров С.А.* Полиномиальное свойство самосопряженных эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов // Успехи матем. наук. 1999. Т. 54. № 5. С. 77–142.
11. *Chesnel L., Nazarov S.A., Taskinen J.* Surface waves in a channel with thin tunnels at the bottom: non-reflecting underwater topography // Asymptotic Analysis. 2020. V. 118. № 1, 2. P. 81–122.
12. *Bonnet-Ben Dhia A.-S., Chesnel L., Nazarov S.A.* Perfect transmission invisibility for waveguides with sound hard walls // J. Math. Pures Appl. 2018. V. 111. P. 79–105.
13. *Chesnel L., Nazarov S.A., Pagneux V.* Invisibility and perfect reflectivity in waveguides with finite length branches // SIAM J. Appl. Math. 2018. V. 78. № 4. P. 2176–2199.

## ABNORMAL TRANSMISSION OF WAVES THROUGH A THIN CANAL CONNECTING TWO ACOUSTIC WAVEGUIDES

S. A. Nazarov<sup>a</sup> and L. Chesnel<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Saint-Petersburg University, Saint-Petersburg, Russian Federation

<sup>b</sup> Centre de mathématiques appliquées École Polytechnique, Université Paris-Saclay, Paris, France

Presented by Academician of the RAS N.F. Morozov

A criterion of almost complete transmission of the piston mode from one cylindrical spacial waveguide to other semi-infinite waveguide through a thin connecting canal. A procedure of fine-tuning of canal's parameters is described while denying of this tuning leads to almost complete or significant reflection. In the case of cylindrical fragments of the waveguide the criterion takes the simplest form.

*Keywords:* acoustic waveguide, piston mode, almost complete transmission, thin canal, asymptotics of scattering coefficients