

УДК 517.977

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПОДВИЖНЫХ ОБЪЕКТОВ ДЛЯ ИЗМЕНЕНИЯ ПОЛОЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА БЕЗ СМЕЩЕНИЯ ЕГО ЦЕНТРА МАСС

© 2021 г. А. М. Шматков^{1,*}

Представлено академиком РАН Ф.Л. Черноусько 31.01.2021 г.

Поступило 02.02.2021 г.

После доработки 02.02.2021 г.

Принято к публикации 08.02.2021 г.

В явной форме найдены законы управления движущимися внутренними массами, позволяющие по заданной программе изменить ориентацию твердого тела без смещения его центра масс при отсутствии внешних сил. Указаны ограничения на возможные последовательности положений тела в различные моменты времени. Проведено сравнение со случаем единственной подвижной массы и случаем, когда все массы имеют один и тот же вектор скорости. Полученные соотношения можно использовать для управления космическими аппаратами и робототехническими системами.

Ключевые слова: пространственная переориентация, внутренние подвижные массы, реализация заданного движения

DOI: 10.31857/S2686740021020097

1. Для управления пространственной ориентацией космических аппаратов широко используют реактивные двигатели, а также гиродины. Однако первые требуют наличие рабочего тела, которое необходимо доставлять с Земли, а вторые должны постоянно находиться в движении, для чего нужна энергия. Применение подвижных внутренних масс не требует ни запаса рабочего тела, ни наличия постоянно вращающихся механических элементов [1–5]. Этот подход к задаче изменения пространственной ориентации может быть применен и в робототехнике в случаях, когда особенности внешней среды делают использование обычных внешних движителей (гусениц, колес, ног и т.п.) нежелательным.

Рассмотрим твердое тело массы M и взаимодействующее с ним конечное произвольное число N материальных точек, каждая из которых имеет массу m_i , причем $i = 1, \dots, N$. Применение нескольких подвижных масс для управления ориентацией твердого тела, предложенное в [6], дает преимущество при реализации управления. Предположим, что указанные объекты в начальный момент времени покоятся и в дальнейшем взаимодействуют друг с другом исключительно посредством внутренних сил, причем внешние силы

полностью отсутствуют. В этом случае центр масс системы находится в состоянии покоя:

$$M\mathbf{R}_c + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{R}_i = 0, \quad (1)$$

где \mathbf{R}_c – радиус-вектор центра масс S твердого тела, а \mathbf{R}_i – радиус-вектор материальной точки с номером i в неподвижной системе координат. Также в рассматриваемой системе сохраняется импульс:

$$M\mathbf{v}_c + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i = 0, \quad (2)$$

где \mathbf{v}_c – вектор скорости центра масс S твердого тела, а \mathbf{v}_i – вектор скорости материальной точки с номером i в неподвижной системе координат. Далее, выполняется закон сохранения кинетического момента относительно центра масс системы [6]:

$$M\mathbf{R}_c \times \mathbf{v}_c + \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{R}_i \times \mathbf{v}_i = 0, \quad (3)$$

где вектор $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость твердого тела, \mathbf{J} – его тензор инерции относительно своего центра масс, а знак \times обозначает векторное произведение.

Если есть только одна движущаяся материальная точка массы m , то центр масс тела в общем случае невозможно удерживать в покое. Тогда переориентация происходит в кёниговых осях [7], т.е. в поступательно перемещающейся системе

¹ Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского
Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: shmatkov@ipmnet.ru

координат с началом в центре масс тела, и решение имеет вид [8]

$$\mathbf{r} = \pm \sqrt{k_c} \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\xi}), \quad k_c = \frac{M+m}{Mm}, \quad \boldsymbol{\xi} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}, \quad (4)$$

где \mathbf{r} – радиус-вектор материальной точки относительно точки C , заданный своими компонентами в неподвижной системе координат. Также в (4) использована вектор-функция $\boldsymbol{\psi}$ векторного аргумента $\boldsymbol{\chi}$

$$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\chi}) = \frac{\boldsymbol{\chi} \times \dot{\boldsymbol{\chi}}}{\sqrt{-(\boldsymbol{\chi}, \dot{\boldsymbol{\chi}}, \ddot{\boldsymbol{\chi}})}}, \quad (5)$$

причем через $(\bullet, \bullet, \bullet)$ обозначено смешанное произведение векторов.

Пусть все материальные точки имеют один и тот же вектор скорости [6]:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i &= \mathbf{R}_i - \mathbf{R}_c, & \dot{\mathbf{r}}_i &= \dot{\mathbf{r}}_i^0 + \mathbf{r}, \\ \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i^0 &= 0, & \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i &= m\mathbf{r}, \end{aligned}$$

где \mathbf{r}_i^0 – заданные векторы, причем $i = 1, \dots, N$. Показано [6], что

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^* \boldsymbol{\omega} + \frac{mM}{M+m} \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \dot{\mathbf{r}}) &= 0, \\ \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i^0 \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i^0) &= \mathbf{J}^0 \boldsymbol{\omega}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\mathbf{J}^* = \mathbf{J} + \mathbf{J}^0$, а штрих означает производную по времени в подвижной системе координат, связанной с твердым телом. Используя [8] и учитывая [7] связь $\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \dot{\mathbf{r}}'$ между абсолютной и локальной производными вектора \mathbf{r} , из соотношения (6) получаем

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_r + \frac{mM}{M+m} \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} &= 0, \\ \mathbf{r} = \pm \sqrt{k_c} \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\xi}_r), & \quad \boldsymbol{\xi}_r = \mathbf{J}^* \boldsymbol{\omega}, \end{aligned} \quad (7)$$

где компоненты вектора \mathbf{r} заданы в неподвижной системе координат, а вектор-функция $\boldsymbol{\xi}_r = \boldsymbol{\xi}_r(t)$ должна иметь третью производную по времени.

Последовательность положений твердого тела в пространстве относительно кёниговой системы координат можно задать [7] с помощью ортогональной матрицы $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$. Тогда компонентами вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ в связанной с телом системе координат являются элементы кососимметрической матрицы $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{A}^{-1} \dot{\mathbf{A}}$. Это позволяет найти вектор $\boldsymbol{\xi}_r = \mathbf{J}^* \boldsymbol{\omega}$ в системе координат, связанной с телом, построить его проекции на кёниговую систему координат, применить формулу (7) и спроектировать полученный в кёниговой системе координат вектор \mathbf{r} на оси связанной с телом си-

стемы координат, тем самым определив требуемую траекторию движения подвижных масс относительно тела.

2. Потребуем, чтобы центр масс твердого тела всегда покоился. Целесообразность такого условия объясняется тем, что реальный объект, требующий изменения ориентации, как правило, представляет собой сложное устройство, включающее в себя самые разные элементы. Для части из них колебания, вызываемые перемещением подвижных масс, могут быть вредны. Например, космический аппарат может иметь антенны, колебания которых могут привести к сбоям в работе различного оборудования. В случае, когда речь идет о робототехнической системе, перемещающейся в ранимой среде, необязательные вибрации, связанные с работой системы переориентации, могут нанести этой среде дополнительные повреждения.

Подставим в уравнение (3) вектор $M\mathbf{v}_c$ из соотношения (2):

$$\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_c) \times \mathbf{v}_i = 0. \quad (8)$$

Поскольку в (1) функция $\mathbf{R}_c = \mathbf{R}_c(t) \equiv 0$, то

$$\boldsymbol{\xi} + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{R}_i \times \mathbf{v}_i = 0, \quad \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{R}_i = 0, \quad \boldsymbol{\xi} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}. \quad (9)$$

3. Рассмотрим задачу нахождения траекторий движения материальных точек из соотношений (9) при заданном векторе $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(t)$ при $N = 2$. На основании (9) имеем

$$k_m \boldsymbol{\xi} + \mathbf{R}_1 \times \mathbf{v}_1 = 0, \quad k_m = \frac{m_2}{m_1 m_2 + m_1^2}. \quad (10)$$

Из уравнения (10) получаем

$$\mathbf{R}_1 = \pm \sqrt{k_m} \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\xi}), \quad \mathbf{R}_2 = \mp \frac{m_1}{m_2} \sqrt{k_m} \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\xi}). \quad (11)$$

Сравним варианты (11) и (4) в случае, когда $m_1 = m_2 = \frac{m}{2}$. Тогда можно сопоставить векторы \mathbf{R}_1 и \mathbf{r} . Они всегда сонаправлены, а отношение их модулей равно

$$\zeta = \frac{|\mathbf{R}_1|}{|\mathbf{r}|} = \left(1 + \frac{m}{M}\right)^{-1/2}. \quad (12)$$

Из формулы (12) видно, что в случае использования одной материальной точки ее всегда нужно смещать больше, чем каждую из двух точек с той же суммарной массой. Заметим, что отношение (12) стремится к единице с ростом массы тела M по сравнению с m . Например, величина $\zeta \approx 0.95$ при $\frac{m}{M} = 0.10$. Другое отличие состоит в том, что в случае использования двух подвижных матери-

альных точек нет надобности в учете массы твердого тела, поскольку величина M не входит в соотношения (11).

4. Если число подвижных точечных масс равно трем, то решений бесконечно много. Например, найдем одно из них, представив, скажем, третью из масс как две, т.е. перейдем к задаче с четырьмя массами. Для этого запишем условие (9) как систему из четырех уравнений

$$\lambda_i \xi + m_i \mathbf{R}_i \times \mathbf{v}_i = 0, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (13)$$

где сумма масс $m_3 + m_4$ равна величине третьей подвижной массы и

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 m_i \mathbf{R}_i = 0, \quad \sum_{i=1}^4 \lambda_i = 1, \\ \lambda_i > 0, \quad i = 1, \dots, 4. \end{aligned} \quad (14)$$

Решение системы (13), (14) имеет вид

$$\mathbf{R}_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\lambda_{1,2}}{m_{1,2}}} \boldsymbol{\psi}(\xi), \quad \mathbf{R}_{3,4} = \mp \sqrt{\frac{\lambda_{3,4}}{m_{3,4}}} \boldsymbol{\psi}(\xi). \quad (15)$$

Заметим, что все три массы всегда находятся на одной и той же прямой. Величины $\lambda_i > 0, i = 1, \dots, 4$, можно найти с помощью условий

$$m_1 \mathbf{R}_1 = -m_3 \mathbf{R}_3, \quad m_2 \mathbf{R}_2 = -m_4 \mathbf{R}_4, \quad \mathbf{R}_3 = \mathbf{R}_4, \quad (16)$$

где первые два равенства обеспечивают неподвижность центра масс твердого тела, а последнее равенство отражает тот факт, что третья и четвертая материальные точки соответствуют одной и той же подвижной массе и должны всегда находиться в одной и той же точке пространства. Из формул (14)–(16) получаем следующую систему уравнений для поиска значений $\lambda_i, i = 1, \dots, 4$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 \lambda_i = 1, \quad m_1 \lambda_1 = m_3 \lambda_3, \\ m_2 \lambda_2 = m_4 \lambda_4, \quad m_4 \lambda_3 = m_3 \lambda_4. \end{aligned} \quad (17)$$

Из соотношений (17) имеем

$$\begin{aligned} \lambda_1 = \frac{m_2 m_3^2}{m_s}, \quad \lambda_2 = \frac{m_1 m_4^2}{m_s}, \\ \lambda_3 = \frac{m_1 m_2 m_3}{m_s}, \quad \lambda_4 = \frac{m_1 m_2 m_4}{m_s}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$m_s = m_1 m_2 m_4 + m_1 m_4^2 + m_1 m_2 m_3 + m_2 m_3^2.$$

Аналогичным способом можно найти решение в случае произвольного конечного числа подвижных масс.

5. Описанный выше способ неприменим, если в какой-либо момент времени смешанное произведение $(\boldsymbol{\chi}, \dot{\boldsymbol{\chi}}, \ddot{\boldsymbol{\chi}})$ положительно, поскольку тогда функция (5) не определена. Она не определена и в случае, когда векторы $\boldsymbol{\chi}$ и $\dot{\boldsymbol{\chi}}$ коллинеарны. Укажем другой подход, который позволяет решить

задачу и при указанных обстоятельствах. Для этого обратим внимание на то, что необязательно заменять систему уравнений (9) системой типа (13). Можно вместо (13) применять соотношения

$$\begin{aligned} \lambda_i \xi_i + m_i \mathbf{R}_i \times \mathbf{v}_i = 0, \quad \lambda_i > 0, \quad i = 1, \dots, N, \\ \sum_{i=1}^N \lambda_i \xi_i = \xi, \quad \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{R}_i = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Заметим, что в этом случае векторы \mathbf{R}_i будут направлены не коллинеарно одному и тому же вектору $\boldsymbol{\psi}(\xi)$, а коллинеарно векторам $\boldsymbol{\psi}(\lambda_i \xi_i)$. Далее для простоты рассмотрим использование этого подхода на следующем примере. Пусть имеются шесть подвижных одинаковых масс, каждая из которых равна $m/6$. Потребуем, чтобы

$$\mathbf{R}_{j+3} = -\mathbf{R}_j, \quad j = 1, \dots, 3. \quad (20)$$

Условие (20) обеспечивает неподвижность центра масс твердого тела. Тогда решение системы (19) можно свести к решению трех уравнений

$$\frac{1}{2} \xi_j + \frac{m}{6} \mathbf{R}_j \times \mathbf{v}_j = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (21)$$

где векторы ξ_j направлены вдоль координатных осей некоторой ортогональной неподвижной системы координат с центром в центре масс твердого тела. В этом случае векторы ξ_j и $\dot{\xi}_j$ всегда коллинеарны.

Введем вектор-функцию [8]

$$\boldsymbol{\psi}_{||}(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\eta}) = \frac{\boldsymbol{\chi} \times \boldsymbol{\eta}}{\sqrt{-(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}})}}, \quad (22)$$

где вектор-функция $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}(t)$ должна иметь вторую производную по времени, а смешанное произведение $(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}})$ должно быть отрицательным. Без ограничения общности можно полагать, что вектор $\boldsymbol{\eta}$ лежит в плоскости, ортогональной векторам $\boldsymbol{\chi}$ и $\dot{\boldsymbol{\chi}}$, и является единичным. В этом случае векторы $\boldsymbol{\eta}$ и $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ всегда ортогональны, а их векторное произведение коллинеарно вектору $\boldsymbol{\chi}$. С помощью (22) решение системы уравнений (21) можно записать в форме [8]

$$\mathbf{R}_j = \sqrt{\frac{3}{m}} \boldsymbol{\psi}_{||}(\xi_j, \boldsymbol{\eta}_j), \quad (23)$$

где для каждого значения $j = 1, 2, 3$ соответствующий дважды дифференцируемый вектор $\boldsymbol{\eta}_j = \boldsymbol{\eta}_j(t)$ лежит в плоскости, ортогональной вектору ξ_j , причем векторы $\xi_j, \boldsymbol{\eta}_j$ и $\dot{\boldsymbol{\eta}}_j$ образуют левую тройку. Таким образом, каждый из векторов $\boldsymbol{\eta}_j$ зависит от одной скалярной функции времени, которую можно выбирать произвольно с учетом описанных условий. Приняв во внимание (20), получаем, что каждая из трех пар материальных точек должна перемещаться симметрично относительно центра

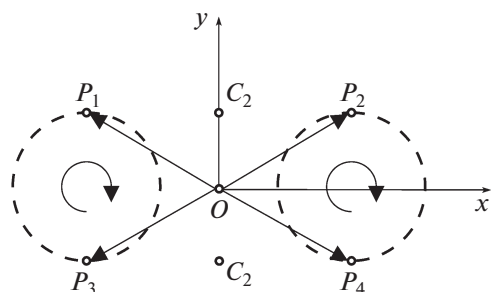


Рис. 1.

масс твердого тела в плоскости, ортогональной соответствующей оси координат. При выполнении этого условия траекторию движения и скорость перемещения для любой пары можно выбирать по-разному за счет выбора вектор-функции η_j , но так, чтобы в итоге получался нужный кинетический момент согласно формуле (23). Например, возьмем составляющую ξ_{3z} . Условие $(\chi_3, \eta_3, \dot{\eta}_3) < 0$ дает

$$\xi_{3z}(\eta_{3x}\dot{\eta}_{3y} - \dot{\eta}_{3x}\eta_{3y}) = \xi_{3z}\eta_{3x}^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\eta_{3y}}{\eta_{3x}} \right) < 0, \quad (24)$$

$$\eta_{3x} \neq 0.$$

Значение дроби в (24) равно тангенсу полярного угла, описывающего вектор η_3 в неподвижной системе координат, лежащей в плоскости, ортогональной вектору ξ_3 . Если, скажем, в течение всего времени движения $\xi_{3z} > 0$, то этот тангенс должен все время убывать, что возможно лишь тогда, когда рассматриваемая пара материальных точек вращается вокруг оси аппликат неподвижной системы координат. Но это не всегда удобно с точки зрения реализации. В этом случае можно заменить эту пару материальных точек, например, на систему из четырех подвижных масс так, чтобы вокруг оси вращались центры масс двух систем, каждая из которых состоит из двух точек. Тогда последние не обязаны двигаться вокруг центра масс твердого тела. В качестве примера на рис. 1 показаны четыре материальные точки P_i ,

$i = 1, \dots, 4$, одинаковой массы. Каждая из пар точек P_1, P_3 и P_2, P_4 вращается с одинаковой угловой скоростью в направлении, показанном стрелками, в плоскости Ox_3y_3 неподвижной системы координат по окружностям одинакового радиуса, показанным штриховыми линиями и находящимся на равных расстояниях от центра масс системы O , совпадающем с центром масс твердого тела C . Тогда центры масс C_1 и C_2 пар P_1, P_3 и P_2, P_4 соответственно вращаются вокруг центра масс системы O .

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 18-11-00307).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zimmerman K., Zeidis I., Bolotnik N., Pivovarov M. Dynamics of a two-module vibration-driven system moving along a rough horizontal plane // *Multibody Systems Dynamics*. 2009. V. 22. № 2. P. 199–219.
2. Xu J., Fang H. Improving performance: recent progress on vibration-driven locomotion systems // *Nonlinear Dynamics*. 2019. V. 98. № 4. P. 2651–2669.
3. Черноусько Ф.Л. Оптимальное управление движением двухмассовой системы // *ДАН*. 2018. Т. 480. № 5. С. 528–532.
4. Chernousko F. Optimal two-dimensional motions of a body controlled by a moving internal mass // *Multibody System Dynamics*. 2019. V. 46. № 4. P. 381–398.
5. Chernousko F.L. Two- and three-dimensional motions of a body controlled by an internal movable // *Nonlinear Dynamics*. 2020. V. 99. № 1. P. 793–802.
6. Черноусько Ф.Л. Управление ориентацией тела при помощи нескольких подвижных масс // *ДАН*. 2020. Т. 493. № 1. С. 70–74.
7. Маркеев А.П. Теоретическая механика. М.: ЧеРо, 1999. 572 с.
8. Шматков А.М. Изменение пространственной ориентации твердого тела с помощью подвижной массы // *Изв. РАН ТиСУ*. 2020. № 4. С. 151–159.

USING MOVABLE OBJECTS TO CHANGE THE POSITION OF A RIGID BODY WITHOUT SHIFTING ITS CENTER OF MASS

A. M. Shmatkov^a

^a *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS F.L. Chernousko

The laws of control of moving internal masses are found explicitly, which allow, according to a given program, to change the orientation of a rigid body without displacing its center of mass in the absence of external forces. Restrictions on possible sequences of body positions at different moments of time are indicated. A comparison is made with the case of a single moving mass and the case when all masses have the same velocity vector. The obtained relationships can be used to control spacecraft and robotic systems.

Keywords: spatial reorientation, internal moving masses, implementation of a given motion