

УДК 519.6

## ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ КИНЕТИЧЕСКОГО ТИПА ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ COVID-19

© 2021 г. В. В. Аристов<sup>1,\*</sup>, А. В. Строганов<sup>2,\*\*</sup>, А. Д. Ястребов<sup>2,\*\*\*</sup>

Представлено академиком РАН Ю.Г. Евтушенко 04.03.2021 г.

Поступило 17.03.2021 г.

После доработки 17.03.2021 г.

Принято к публикации 30.03.2021 г.

Предлагается одномерная модель на основе уравнения кинетического типа для изучения динамической плотности распределения носителей вируса во времени и пространстве с учетом их миграции из выделенного центра. Данная модель является новой и принципиально отличается от известных моделей типа диффузия-реакции. Строится аналитическое решение; для получения серии расчетов применяются и численные методы. Производится сравнение модельных и реальных данных в Италии, России и Чили. Помимо скорости заражения, вводится в рассмотрение “скорость выздоровления”. При прохождении волны выздоровления по территории с большей частью населения страны делается вывод о начале глобального выздоровления, что соответствует реальным данным. Предсказания оказываются точными и для второй волны пандемии в России. Ожидается, что модель способна адекватно описать не только развитие COVID-19, но и последующих эпидемий.

*Ключевые слова:* математическое моделирование, пандемия COVID-19, уравнение кинетического типа

DOI: 10.31857/S2686740021030020

1. Над изучением пандемии COVID-2019 работают научные группы во всем мире с применением различных математических методов, включая весьма сложные, требующие мощных вычислительных устройств. Но и простые модели, способные выявить характерные черты нынешней эпидемии, могут обнаруживать закономерности, ускользающие за многочисленными данными. Это позволило бы делать некоторые предсказания и, возможно, предотвратить более опасные сценарии распространения эпидемии. В статьях, основанных на известной модели SIR и ее модификаций с большим количеством параметров, решения строятся, как правило, для изучения развития болезни только по времени [1–3]. Пространственное рас-

пространение вирусов обычно изучают с помощью модели диффузия-реакции [4–7], см. также [8]. Такой подход применяется при исследовании сложных автоволновых процессов, см. [9]. Но можно использовать и кинетические уравнения, которые, по сути, основаны на другой физической и математической модели: в [10] такие методы применяются для описания транспортных потоков, в [11, 12] – для моделирования социоисторических процессов (модель агрессии).

Настоящая работа сходна с [11, 12], но в силу линейности уравнения модель оказалась более простой. Подчеркнем, что здесь принципиальное отличие от моделей с диффузией, где всегда происходит передвижение инфицированных из области с большим заражением в область с меньшим заражением. Представима ситуация, когда из области с меньшим заражением на транспорте передвигаются в область с большим, где объявлен карантин и выезд закрыт.

Используется неоднородное уравнение переноса с кинетической правой частью. В уравнении фигурируют два параметра. Первый отвечает осредненной (по различным транспортным средствам) скорости продвижения эпидемии. Второй – величине “сопротивления” распространению но-

<sup>1</sup> Вычислительный центр им. А.А. Дородницына, Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” Российской академии наук, Москва, Россия

<sup>2</sup> МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, Россия

\*E-mail: aristovvl@yandex.ru

\*\*E-mail: savthe@gmail.com

\*\*\*E-mail: andr.yast711@gmail.com

сителей вирусов, это моделируется кинетическим членом, описывающим убывание инфицированных пассажиров, что связано с возвращением их в места проживания или в места временного пребывания для покидающих очаг заражения.

Выделялись две фазы распространения инфекции: переносная и контактная, первая фаза закладывает основы для контактной фазы. В нашей работе изучается переносный механизм, связанный с миграцией инфицированных носителей из центра заражения. Контактный механизм является вторичным: после появления инфицированных носителей происходят заражения на местах. Наложение двух факторов дает сумму всех инфицированных. Контактные заражения отчетливо проявляются при введении мер карантинной изоляции отдельных регионов. Предположения об изоляции и протекании болезни в таких областях за примерно один и тот же период времени позволяют показать, что процесс выздоровления “симметричен” процессу заражения: выздоровление начинается раньше в местах, где раньше произошло заражение.

Изучались процессы в России, Италии и Чили, где главные источники эпидемии были связаны со столичными центрами (Москвой, Миланом – столицей Ломбардии, Сантьяго), в которые приезжали пассажиры из других стран, где эпидемия уже началась. Распространение инфекции происходило преимущественно в одном направлении, чему способствовала географическая протяженность стран, что позволяет рассматривать одномерное уравнение (учитывалось отсутствие проникновения инфекции с “боковых границ”: где находятся Тирренское и Адриатическое моря, Тихий океан и Анды, северные и южные граничные малонаселенные территории в России – рассматривались области только к востоку от Москвы. Данные о заражениях брались из [13–16].

2. По аналогии с [12] для определения плотности инфицированных пассажиров, высаживающихся в определенном месте в некоторый момент времени, применяется следующее неоднородное уравнение переноса:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + U \frac{\partial n}{\partial x} = -\sigma n(t, x), \quad (1)$$

где  $t$  – время,  $x$  – расстояние,  $n(t, x)$  – плотность перемещающихся носителей вируса в транспортном средстве,  $U$  – скорость транспортного средства,  $\sigma$  – коэффициент “сопротивления” движению инфицированных элементов (в основном за счет высаживания пассажиров в местах проживания), имеющий размерность частоты. Начальное условие для задачи Коши принимается в виде

$$n_0(x) = H(-x),$$

где  $H(x)$  – функция Хевисайда. Такая постановка задачи означает, что фактически в исследуемую область  $x > 0$  через границу  $x = 0$  поступают носители вируса. С использованием стандартных методов решения линейного уравнения в частных производных получаем следующее решение:

$$n(t, x) = n_0(x - Ut) \cdot e^{-\frac{\sigma x}{U}}. \quad (2)$$

Будем обозначать плотность высадившихся в данной точке носителей вируса через  $n_M(t, x)$ . Ясно, что эта плотность растет также, как убывает  $n(t, x)$ , следовательно, можно записать

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} + \frac{dn_M}{dt} &= 0; \\ \frac{dn}{dt} &= \frac{\partial n}{\partial t} + U \frac{\partial n}{\partial x}; \\ \frac{dn_M}{dt} &= \frac{\partial n_M}{\partial t}. \end{aligned}$$

С учетом (1) уравнение для  $n_M(t, x)$  принимает следующий вид:

$$\frac{\partial n_M}{\partial t} = \sigma n. \quad (3)$$

Решение данного уравнения записывается так:

$$n_M(t, x) = n_{M0}(x) + \int_0^t \sigma n(\tau, x) d\tau.$$

Подстановка выражения (2) и начальных условий  $n_{M0}(x) = 0$  и  $n_0(x) = H(-x)$  позволяет получить выражение для  $n_M(t, x)$ :

$$n_M(t, x) = \frac{\sigma}{U} \cdot (Ut - x) \cdot H(Ut - x) \cdot e^{-\frac{\sigma x}{U}}. \quad (4)$$

Параметр  $\sigma$  может зависеть от  $t$  и  $x$  ( $U$  также может быть зависимой величиной, но мы полагаем ее постоянной). Один из вариантов зависимости  $\sigma$  от координаты может быть получен с помощью учета плотности населения

$$\sigma(x) = \sigma_1 \rho(x), \quad (5)$$

где  $\rho(x)$  – линейная плотность населения, имеющая размерность 1/км, а  $\sigma_1$  – некоторая константа, имеющая размерность км/дн.

Подставляя (5) в формулу (2), получаем следующее выражение:

$$n(t, x) = n_0(x - Ut) \cdot e^{-\frac{\sigma_1}{U} \int_0^x \rho(z) dz}.$$

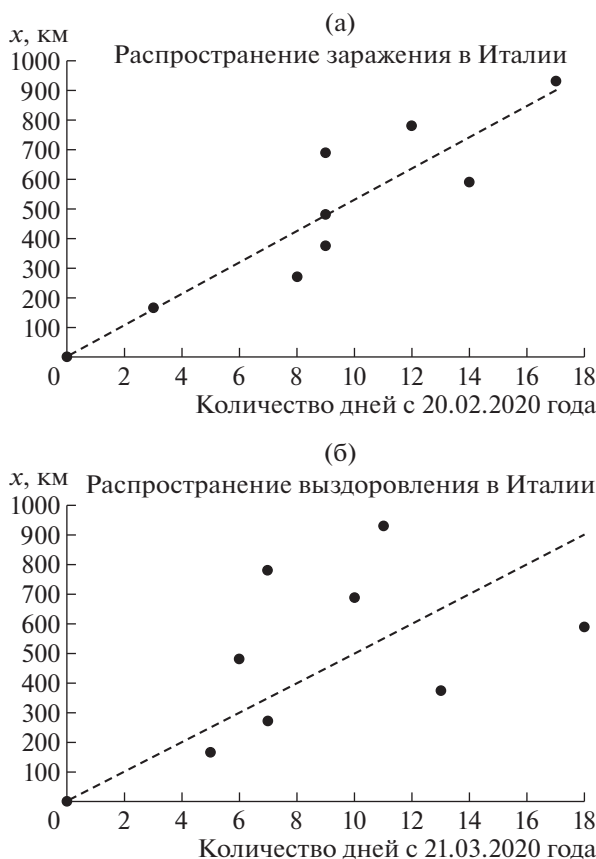


Рис. 1. Графики распространения заболевания (а) и выздоровления (б) в Италии.

Аналогичная подстановка в формулу (4) в результате дает

$$n_M(t, x) = \frac{\sigma_1 \cdot \rho(x)}{U} \cdot (Ut - x) \cdot H(Ut - x) \cdot e^{-\frac{\sigma_1}{U} \int_0^x \rho(z) dz} \quad (6)$$

Параметр  $\sigma_1$  определяется так: фиксируется  $t$  в формуле (6) и подставляются известные данные для двух значений  $x$ .

Вдоль выделенного направления распространения инфекции территория страны разбивается на полосы. Для аппроксимации сведений по известным источникам в выделенных полосах мы суммировали значения в регионах, вошедших в полосу, с соответствующими весами.

3. В Италии территория страны была поделена на 9 полос. Параметр  $U$ , определяющий скорость распространения вируса, можно оценить по данным о первых заражениях в каждой полосе. Мы фиксировали первый день, в который было не менее 5 заболевших. Задавая точки, соответствующие этим дням, по методу наименьших квадратов строим соответствующую прямую. По тангенсу

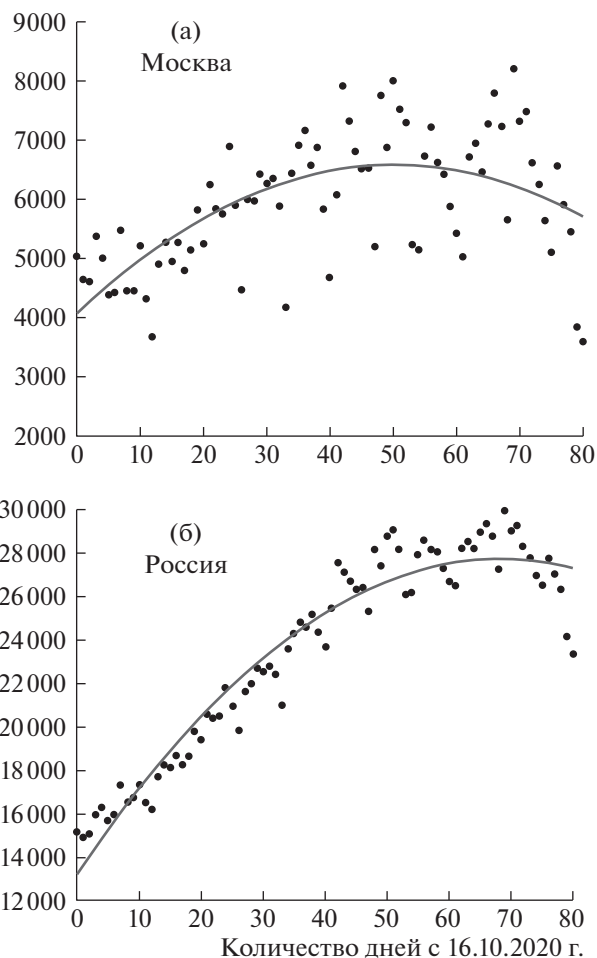
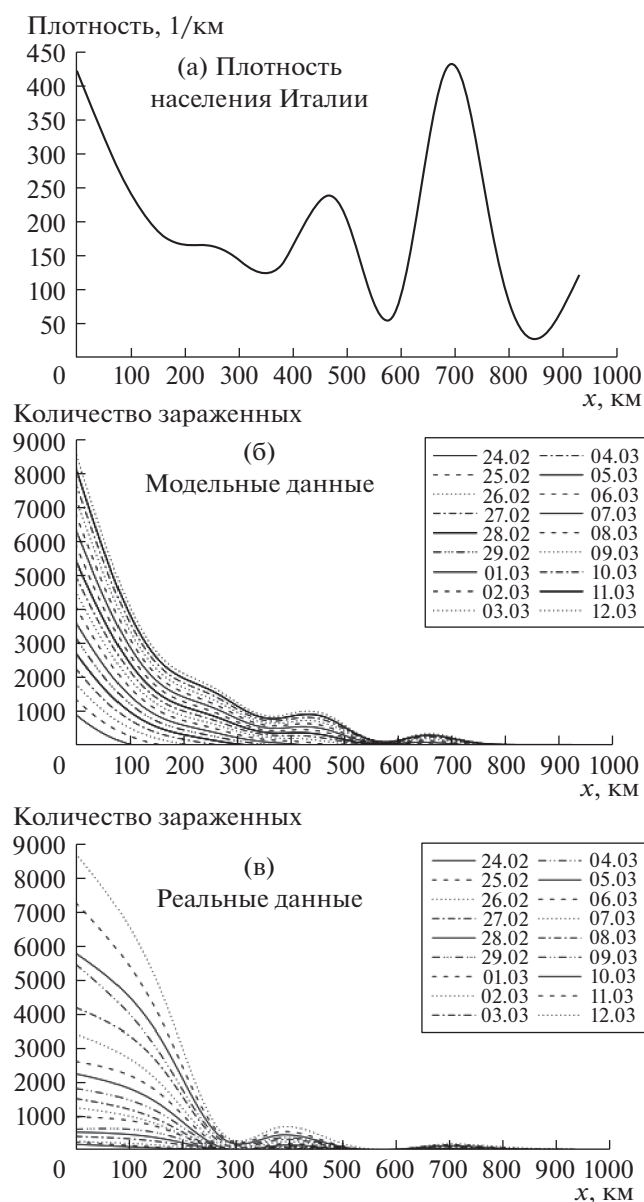


Рис. 2. Графики с реальными данными количества заражений в день в Москве и России на 30.12.2020 г.

угла наклона этой прямой на верхнем графике рис. 1 находим  $U$ . Нижний график на рис. 1 соответствует распространению выздоровления. Начало выздоровления для выбранной полосы определялось по достижению максимума заражений в день. Использовался метод наименьших квадратов с приближением многочленом второго порядка. Для каждой параболы определялся максимум, который принимался за дату начала выздоровления для этой полосы. Пример применения метода наименьших квадратов продемонстрирован на рис. 2 для России. Для Италии скорость заражения оказалась равна 53 км/дн, а скорость выздоровления 50 км/дн.

В России территория была поделена на 7 полос на восток от Москвы, и аналогичными методами были найдены скорость заражения, равная 87 км/дн, и скорость выздоровления, равная 52 км/дн.

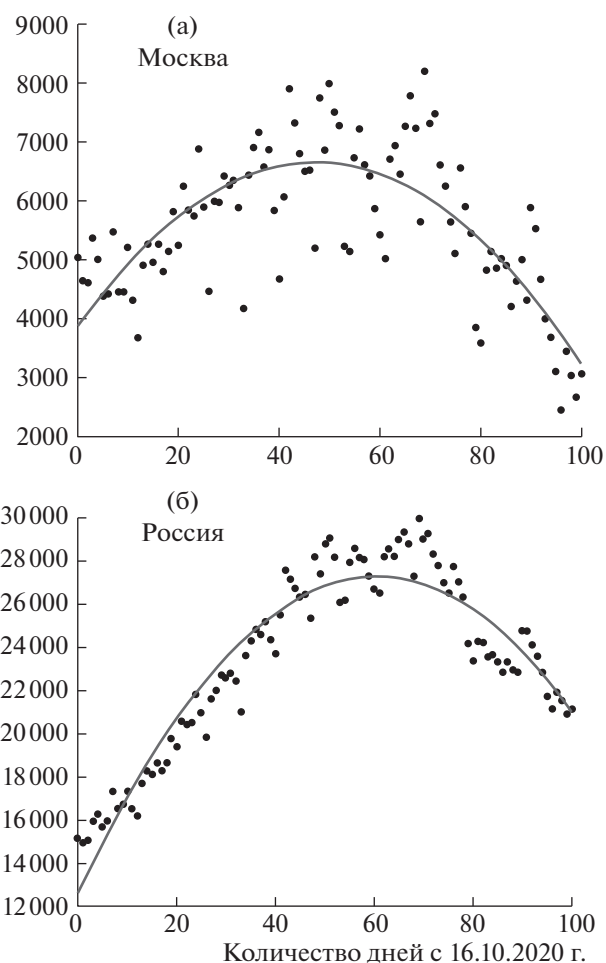
В Чили территория была поделена на 4 полосы к северу от Сантьяго и 3 полосы к югу от столицы. Эти два направления рассматривались независимо друг от друга. Для Чили скорости заражения



**Рис. 3.** Плотность населения в Италии (а), модельные данные для 18 дней, начиная со второго дня, (б) и реальные данные за 18 дней с 24.02.2021 г. для Италии (в).

оказались равны 44 и 97 км/дн для севера и юга соответственно. Скорости выздоровления равны 23 и 96 км/дн.

Сравнение решения по уравнениям модели (нижний график на рис. 3) с реальными данными (верхний график на рис. 3) представлено для первых 18 дней наблюдений (начиная с 24 февраля). Видно, что характер реального и теоретического распределений схож, но значения реальных данных находятся выше теоретических, поскольку важную роль начинает играть второй — контактный фактор. Причем, хотя положения максимум-



**Рис. 4.** Графики с реальными данными количества заражений в день в Москве и России на 30.01.2020 г.

мов количества инфицированных по расчетным и реальным данным примерно соответствуют положениям локальных максимумов плотности населения (средний график на рис. 3), вторые максимумы зараженных меньше первых (а для плотности второй максимум больше). Это показывает, что модель отражает реальность: в Италии быстрое убывание по пространству связано как с тем, что многие стремились покинуть Ломбардию, так и с карантинными барьерами. В дальнейшем с влиянием плотности населения на контактные заражения второй максимум становится постепенно выше первого (эти данные после 18 дней заражения не приводятся).

Близость значений скоростей распространения и выздоровления (эта близость оказалась с некоторой погрешностью верна и для России, и Чили) позволяет делать предсказания о достижении максимума заражений в день по стране с помощью сведений о максимуме заражений в центре распространения эпидемии. Так, на основе

данных первой волны COVID-19 в России было установлено, что максимум заражений в России достигается через две-три недели после достижения аналогичного максимума в Москве.

4. В настоящее время продолжается новая волна пандемии, и столь ясных условий развития и распространения COVID-19 уже не наблюдается. Осенняя волна пандемии имеет более сложный характер, чему способствовало много факторов, в частности, не было такой строгой изоляции, как весной. Но все же для России, ситуация в которой представляет для нас наибольший интерес, можно предположить, что Москва являлась основным центром распространения вируса на восток. Поэтому максимум заражения в Москве будет достигнут примерно на две-три недели раньше, чем во всей России. Предсказания, сделанные в конце декабря, см. рис. 2, подтвердились с учетом реальных данных в конце января, см. рис. 4. На рис. 2 и рис. 4 верхние графики отвечает характеру заражения в Москве и России в целом соответственно. На рис. 2, где приведены данные на 30 декабря, максимум для Москвы соответствует 10–12 декабря, для России он достигнут примерно к 28–30 декабря. Можно ожидать, что с этого момента времени по России начнется спад заболеваемости. Данные, полученные на конец января, подтвердили это предсказание модели. Построенные графики на рис. 4 показывают отмеченную выше величину запаздывания в России по сравнению с Москвой. Правда, в согласии с принятым методом определения максимумов произошло некоторое смещение их к несколько более ранним датам, но сохраняется указанная разность примерно в две недели. На рис. 4 для Москвы максимум соответствует 4–5 декабря, для России – это 20–21 декабря.

Полученные результаты могут иметь предсказательные возможности для ожидаемых последующих волн пандемии, в частности, связанных с появлением новых штаммов вируса. Для использования в дальнейшем более подробной двумерной модели со многими центрами заражения надо будет проводить более сложные численные расчеты.

Авторы подтверждают отсутствие конфликта интересов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kermack W.O., McKendrick A.G.* A contribution to the mathematical theory of epidemics. // Proc. R. Soc. Lond. A. 1927. V. 115. P. 700–721. <https://doi.org/10.1098/rspa.1927.0118>
2. *Ivorra B., Ferrández M.R., Vela-Pérez M., Ramos A.M.* Mathematical modeling of the spread of the coronavirus disease 2019 (COVID-19) taking into account the undetected infections. The case of China // Commun Nonlinear Sci Numer Simul. 2020 Sep; 88: 105303.

Published online 2020 Apr 30.  
<https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2020.105303>

3. *Bailey N.T.J.* Mathematical Theory of Epidemics. Griffin. 1st ed. 1957. 202 p.
4. *Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С.* Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества и его применение к одной биологической проблеме // Бюлл. МГУ. Сер. А. Математика и механика. 1937. Т. 1. С. 1–25.
5. *Noble J.V.* Geographic and temporal development of plagues // Nature. 1974. V. 250. P. 726–729. <https://doi.org/10.1038/250726a0>
6. *Gross B., Zheng Z., Liu S., Chen X., Sela A., Li J., Li D., Havlin S.* Spatio-temporal propagation of COVID-19 pandemics // EPL (Europhysics Letters). 2020. V. 131. № 5. <https://doi.org/10.1209/0295-5075/131/58003>
7. *Ramaswamy H., Oberai A.A., Yortsos Ya.C.* A comprehensive spatial-temporal infection model // hem Eng Sci. 2021. Apr 6. 233:116347. Epub 2021 Jan 6. <https://doi.org/10.1016/j.ces.2020.116347>
8. *Пастухова С.Е., Евсеева О.А.* Асимптотика решения уравнения диффузии в периодической среде на больших временах и ее применение к оценкам усреднения // Рос. технол. журн. 2017. Т. 5 (5). С. 60–69. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2017-5-5-60-69>
9. *Васильев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г.* Автоволновые процессы. М.: Наука, 1987.
10. *Prigogine I., Herman R.* Kinetic Theory of Vehicular Traffic. N.Y.: American Elsevier, 1971. 100 p.
11. *Аристов В.В., Ильин О.В.* Модель агрессии на основе кинетических уравнений // Компьютерные исследования и моделирование. 2014. Т. 6. № 5. С. 165–174. <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2014-6-5-829-838>
12. *Aristov V.V., Ilyin O.V.* Kinetic Models for Historical Processes of Fast Invasion and Aggression // Phys. Rev. E. 2015. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.042806>
13. Карта распространения коронавируса в России и мире // <https://yandex.ru/web-maps/covid19>
14. Coronavirus in Italia, i dati e la mappa // [lab24.ilsolare.com/coronavirus](http://lab24.ilsolare.com/coronavirus)
15. Роспотребнадзор. О подтвержденных случаях новой короновирусной инфекции COVID-2019 в России // [https://www.rospotrebnadzor.ru/about/info/news/news\\_details.php?ELEMENT\\_ID=16253&phrase\\_id=2989389](https://www.rospotrebnadzor.ru/about/info/news/news_details.php?ELEMENT_ID=16253&phrase_id=2989389)
16. Ministerio de Salud. Casos confirmados en Chile COVID-19 // <https://www.minsal.cl/nuevo-coronavirus-2019-ncov/casos-confirmados-en-chile-covid-19/>

## APPLICATION OF THE KINETIC-TYPE MODEL TO STUDY SPATIAL SPREAD OF COVID-19

V. V. Aristov<sup>a</sup>, A. V. Stroganov<sup>b</sup>, and A. D. Yastrebov<sup>b</sup>

<sup>a</sup> *Dorodnicyn Computing Centre, Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

<sup>b</sup> *Federal State Budget Educational Institution of Higher Education “MIREA – Russian Technological University”, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS Yu.G. Evtushenko

A one-dimensional model is proposed based on a kinetic-type equation for studying the dynamic distribution density of virus carriers in time and spatial representation, taking into account their distribution from a dedicated center. This model is new and is fundamentally different from the known models of the diffusion-reaction type. An analytical solution is being built; numerical methods are also used to obtain a series of calculations. A comparison of the model and real data in Italy, Russia, and Chile is made. In addition to the rate of infection, the consideration of “rate of recovery” is introduced. When the wave of recovery passes through the territory the bigger part of a population lives, a conclusion is made about the beginning of a global recovery, which corresponds to real data. Predictions are also accurate for the second wave of the pandemic in Russia. The model is expected to be able to adequately describe not only the development of COVID-19 but also subsequent epidemics.

*Keywords:* mathematical modeling, COVID-19 pandemic, kinetic type equation