

УДК 621.454.3.01:539.371

## ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ТРЕХСЛОЙНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ КОЛЬЦЕВЫМИ РЕБРАМИ И ПУСТОТЕЛЫМ ЦИЛИНДРОМ, ПРИ ДЕЙСТВИИ ВНЕШНЕГО ПУЛЬСИРУЮЩЕГО ДАВЛЕНИЯ

© 2021 г. В. Н. Бакулин<sup>1,\*</sup>, А. Я. Недбай<sup>2</sup>

Представлено академиком РАН А.М. Липановым 07.03.2021 г.

Поступило 07.03.2021 г.

После доработки 11.03.2021 г.

Принято к публикации 16.03.2021 г.

Предложена модель для исследования динамической устойчивости трехслойной цилиндрической оболочки с несимметричным пакетом композитных несущих слоев и легким наполнителем, подкрепленной кольцевыми ребрами и упругим пустотелым цилиндром, при действии осевых сил и внешнего пульсирующего давления. Впервые получены уравнения и рассмотрены основные этапы решения задачи с помощью предложенной комбинации методов. Для произвольно расположенных неодинаковых ребер задача сводится к решению системы уравнений относительно амплитудных значений двух окружных и радиального перемещений оболочки в местах установки ребер. При равномерно расположенных одинаковых ребрах характеристическое уравнение для определения критических частот представляет систему трех алгебраических уравнений. Впервые построены зависимости критических частот главных областей неустойчивости и исследовано влияние на них параметров цилиндра и ребер. Разработанная оригинальная математическая модель позволяет впервые провести анализ одновременного влияния ребер и цилиндра на границы областей неустойчивости и определить возникновение параметрического резонанса, приводящего к разрушению корпуса двигателя летательного аппарата.

*Ключевые слова:* динамическая устойчивость, внешнее пульсирующее давление, критические частоты, области неустойчивости, трехслойная цилиндрическая оболочка, характеристическое уравнение, несимметричный пакет слоев, несущие слои, легкий наполнитель, кольцевые ребра

DOI: 10.31857/S2686740021030056

### ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Во время полета на корпус твердотопливного двигателя, являющегося одним из наиболее нагруженных и важных элементов летательного аппарата (ЛА) [1], помимо аэродинамических и инерционных нагрузок действуют различные тепловые излучения и частицы [2]. Одной из функций корпуса является предотвращение попадания внутрь внешнего тепла, поэтому его оптимальной конструкцией является трехслойная оболочка. Наружный слой такой оболочки, часто более прочный, служит для защиты двигателя от внешних механических и частично тепловых факторов. Внутренний слой, более толстый, удерживает

внутреннее давление газов при работе двигателя. Наполнитель между слоями обычно имеет низкие значения коэффициента теплопроводности и модуля упругости и защищает внутренний слой от воздействия тепла. Для повышения устойчивости корпуса от действия внешнего давления оболочку подкрепляют кольцевыми ребрами (шпангоутами).

При полете ЛА на внешней поверхности корпуса происходит пульсация давления, обусловленная турбулентностью атмосферы, бафтингом [3, 4], неравномерностью сгорания топлива, вибрациями, а также изменениями углов атаки и рысканья. При определенных условиях эти пульсации способны привести к возникновению параметрического резонанса [3, 5, 6] и разрушению корпуса.

Аналізу динамической и аэроупругой устойчивости оболочек посвящены работы [7–10]. Однако поведение трехслойных оболочек, подкреп-

<sup>1</sup> Институт прикладной механики  
Российской академии наук, Москва, Россия

<sup>2</sup> АО Корпорация “Московский институт  
теплотехники”, Москва, Россия

\*E-mail: vbak@yandex.ru

ленных ребрами жесткости, остается практически не исследованным [11–13].

В представленной статье предложена модель для исследования динамической устойчивости трехслойной цилиндрической оболочки с несимметричным пакетом композитных несущих слоев и легким заполнителем, подкрепленной кольцевыми ребрами и пустотелым цилиндром, при действии осевых сил и внешнего пульсирующего давления. Подкрепляющее действие цилиндра учитывается в виде упругого основания, коэффициент постели которого определяется из уравнений трехмерной теории упругости. Впервые получены уравнения и рассмотрены основные этапы решения задачи с помощью предложенной комбинации методов. Решение уравнений ищется в виде тригонометрического ряда по осевой координате. Полученная бесконечная система неоднородных дифференциальных уравнений типа Матве–Хилла решается с помощью тригонометрического ряда по временной координате. Для произвольно расположенных неодинаковых ребер задача сводится к решению системы алгебраических уравнений относительно амплитудных значений двух окружных и радиального перемещений оболочки в местах расстановки ребер, число неизвестных равно утроенному количеству ребер. При равномерно расположенных одинаковых ребрах характеристическое уравнение для определения критических частот представляет систему трех алгебраических уравнений. На числовом примере впервые построены зависимости критических частот главных областей неустойчивости и исследовано влияние на них радиуса канала цилиндра, количества и высоты ребер. Разработанная оригинальная математическая модель значительно расширяет круг решаемых задач и позволяет впервые провести анализ одновременного влияния кольцевых ребер и цилиндра на границы областей неустойчивости и определить возникновение параметрического резонанса, приводящего к разрушению корпуса двигателя ЛА.

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим трехслойную цилиндрическую оболочку с несимметричными ортотропными композитными несущими слоями и легким заполнителем, подкрепленную кольцевыми ребрами и упругим пустотелым цилиндром, при действии на поверхности внешнего давления, изменяющегося во времени по гармоническому закону. Торцы оболочки шарнирно оперты и нагружены постоянными осевыми силами. Будем считать, что ребра расположены сравнительно редко. При этом взаимным влиянием тангенциальных контактных усилий и радиальных инерционных сил можно пренебречь. Цилиндр представляется упругим основанием Винклера, коэффициент постели ко-

торого определяется из уравнений трехмерной теории упругости [14].

Введем безразмерную систему цилиндрических координат, в которой за координатную поверхность принята срединная поверхность заполнителя. Тогда уравнения движения оболочки можно представить в виде [14]

$$L_{j1}u_\alpha + L_{j2}v_\alpha + L_{j3}w + L_{j4}u_\beta + L_{j5}v_\beta + (\delta_{j2} + \delta_{j3} + \delta_{j5}) \times \sum_{i=1}^M [l_{j2}^{(i)}v_{\alpha i} + l_{j3}^{(i)}w_i + l_{j5}^{(i)}v_{\beta i}] \delta(\alpha - \alpha_i) = 0 \quad (1)$$

$$(j = 1, 2, \dots, 5),$$

где  $L_{ji}$ ,  $l_{ji}$  – дифференциальные операторы, имеющие вид (вид других операторов аналогичен работе [14])

$$L_{33} = \frac{D_{11}}{R^2} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + \frac{2(D_{12} + D_{33})}{R^2} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{D_{22}}{R^2} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} - \frac{h_0^2}{h} \left( G_{13} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + G_{23} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) + T_\alpha \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + (P_0 + P_1 \cos \omega t) R \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \Pi R^2 + B_{22} + F_0 R^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2};$$

$$L_{34} = L_{43} = \left( \bar{B}_{12} - 2 \frac{R h_0}{h} G_{13} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha};$$

$$L_{35} = L_{53} = \left( \bar{B}_{22} - 2 \frac{R h_0}{h} G_{23} \right) \frac{\partial}{\partial \beta};$$

$$l_{33}^{(i)} = \frac{1}{R} \left( E_i F_i - a_i \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) + \rho_i F_i R \frac{\partial^2}{\partial t^2};$$

$$l_{25}^{(i)} = l_{52}^{(i)} = -2 \frac{\varepsilon_i E_i F_i}{R h_0} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2};$$

$$l_{35}^{(i)} = l_{53}^{(i)} = -\frac{2}{R h_0} (\varepsilon_i E_i F_i + R a_i) \frac{\partial}{\partial \beta};$$

$$l_{55}^{(i)} = -\frac{4}{R h_0^2} \left[ a_i R^2 - E_i (\varepsilon_i^2 F_i + I_i) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right];$$

$$F_0 = \rho_B h_1 + \rho_H h_2 + h \rho_C;$$

$$B_{ss} = B_s^B + B_s^H; \quad \bar{B}_{ss} = B_s^B - B_s^H;$$

$$B_{12} = B_1^B v_2^B + B_1^H v_2^H \quad (s = 1, 2, 3);$$

$$\bar{B}_{12} = B_1^B v_2^B - B_1^H v_2^H; \quad B_1^B = E_1^B h_1 / \eta^B;$$

$$B_2^B = E_2^B h_1 / \eta^B; \quad B_3^B = G_{12}^B h_1;$$

$$D_{12} = D_1^B v_2^B + D_1^H v_2^H; \quad D_1^B = E_1^B h_1^3 / 12 \eta^B;$$

$$D_2^B = E_2^B h_1^3 / 12 \eta^B; \quad D_3^B = G_{12}^B h_1^3 / 6; \quad z_0 = R_0 / R;$$

$$\eta^B = 1 - \nu_1^B \nu_2^B; \quad h_0 = h + (h_1 + h_2) / 2;$$

$$2\varepsilon_i = r_i^B + r_i^H; \quad a_i = 5G_i F_i / 6,$$

$\alpha, \beta$  – безразмерные координаты вдоль образующей и в окружном направлении срединной поверхности заполнителя, принятой за координатную поверхность;  $w, u_\alpha, u_\beta, v_\alpha, v_\beta$  – нормальное и приведенные осевые и тангенциальные перемещения соответственно верхнего и нижнего несущих слоев [14];  $R, R_0$  – радиус срединной поверхности заполнителя и внутренний радиус цилиндра (радиус канала цилиндра) соответственно;  $h_1, h_2, h$  – соответственно толщина верхнего, нижнего и среднего слоев;  $E_1^B, E_2^B, G_{12}^B, \nu_1^B, \nu_2^B$  – соответственно осевой и окружной модули упругости, модуль сдвига и коэффициенты Пуассона верхнего слоя (обозначения для нижнего слоя с индексом “H” имеют аналогичный смысл);  $G_{13}, G_{23}$  – модули поперечного сдвига заполнителя;  $\rho_B, \rho_H, \rho_C$  – плотности материалов верхнего, нижнего и среднего слоев;  $E_i, G_i, \rho_i$  – модуль упругости, модуль сдвига и плотность материала  $i$ -го ребра;  $F_i, I_i$  – площадь и момент инерции ребра;  $M$  – количество ребер;  $\Pi$  – коэффициент постели;  $T_\alpha$  – начальное осевое усилие;  $\delta(\alpha)$  – дельта-функция;  $\delta_{kj}$  – символ Кронекера;  $r_i^B, r_i^H$  – соответственно расстояния от оси ребра до срединной поверхности верхнего и нижнего слоев, причем эта величина считается положительной, если ось ребра лежит ниже срединной поверхности несущего слоя.

Решение уравнений (1) будем искать в виде

$$\{u_\alpha, u_\beta\} = \cos n\beta \sum_{m=1}^{\infty} \{f_{1m}(t), f_{4m}(t)\} \cos \gamma_m \alpha;$$

$$\{v_\alpha, v_\beta\} = \sin n\beta \sum_{m=1}^{\infty} \{f_{2m}(t), f_{5m}(t)\} \sin \gamma_m \alpha; \quad (2)$$

$$w = \cos n\beta \sum_{m=1}^{\infty} f_{3m}(t) \sin \gamma_m \alpha,$$

где  $\gamma_m = \frac{m\pi}{\alpha_0}$ ;  $\alpha_0 = \frac{L}{R}$ ;  $L$  – длина оболочки;  $f_{jm}(t)$  – неизвестные функции времени (в дальнейшем аргумент  $t$  опускается);  $m$  – количество полуволн в осевом направлении;  $n$  – количество волн в окружном направлении.

Раскладывая дельта-функцию в тригонометрический ряд и подставляя (2) в (1), получим неоднородную систему дифференциальных уравнений типа Матье–Хилла

$$a_{11}f_{1m} + a_{12}f_{2m} + a_{13}f_{3m} + a_{14}f_{4m} + a_{15}f_{5m} = 0;$$

$$a_{21}f_{1m} + a_{22}f_{2m} + a_{23}f_{3m} + a_{24}f_{4m} + a_{25}f_{5m} =$$

$$= -\frac{2}{\alpha_0} \sum_{i=1}^M (b_{22}f_{2i} + b_{23}f_{3i} + b_{25}f_{5i}) \sin \gamma_m \alpha_i;$$

$$a_{31}f_{1m} + a_{32}f_{2m} +$$

$$+ \left( R^2 F_0 \frac{d^2}{dt^2} - RP_1 n^2 \cos \omega t + a_{33}^0 \right) f_{3m} +$$

$$+ a_{34}f_{4m} + a_{35}f_{5m} =$$

$$(3)$$

$$= -\frac{2}{\alpha_0} \sum_{i=1}^M \left[ b_{32}f_{2i} + \left( R\rho_i F_i \frac{d^2}{dt^2} + b_{33}^0 \right) f_{3i} + b_{35}f_{5i} \right] \sin \gamma_m \alpha_i;$$

$$a_{41}f_{1m} + a_{42}f_{2m} + a_{43}f_{3m} + a_{44}f_{4m} + a_{45}f_{5m} = 0;$$

$$a_{51}f_{1m} + a_{52}f_{2m} + a_{53}f_{3m} + a_{54}f_{4m} + a_{55}f_{5m} =$$

$$= -\frac{2}{\alpha_0} \sum_{i=1}^M (b_{52}f_{2i} + b_{53}f_{3i} + b_{55}f_{5i}) \sin \gamma_m \alpha_i,$$

$$\text{где } a_{11} = -B_{11}\gamma_m^2 - B_{33}n^2;$$

$$a_{12} = a_{21} = (B_{12} + B_{33})\gamma_m n;$$

$$a_{13} = -a_{31} = B_{12}\gamma_m; \quad a_{14} = a_{41} = -\bar{B}_{11}\gamma_m^2 - \bar{B}_{33}n^2;$$

$$a_{15} = a_{51} = (\bar{B}_{12} + \bar{B}_{33})\gamma_m n;$$

$$a_{22} = -B_{33}\gamma_m^2 - B_{22}n^2; \quad a_{23} = -B_{22}n;$$

$$a_{24} = a_{42} = (\bar{B}_{12} + \bar{B}_{33})\gamma_m n;$$

$$a_{25} = a_{52} = -\bar{B}_{33}\gamma_m^2 - \bar{B}_{22}n^2;$$

$$a_{32} = B_{22}n;$$

$$a_{33}^0 = \frac{D_{11}}{R^2} \gamma_m^4 + \frac{2(D_{12} + D_{33})}{R^2} \gamma_m^2 n^2 +$$

$$+ \frac{D_{22}}{R^2} n^4 + \frac{h_0^2}{h} (G_{13}\gamma_m^2 + G_{23}n^2) -$$

$$- T_\alpha \gamma_m^2 + B_{22} + R^2 \Pi - RP_0 n^2;$$

$$a_{34} = -a_{43} = -\left( \bar{B}_{12} - \frac{2Rh_0}{h} G_{13} \right) \gamma_m n;$$

$$a_{35} = \left( \bar{B}_{22} - \frac{2Rh_0}{h} G_{23} \right) n;$$

$$a_{44} = -B_{11}\gamma_m^2 - B_{33}n^2 - \frac{4R^2}{h} G_{13};$$

$$a_{45} = a_{54} = (B_{12} + B_{33})\gamma_m n;$$

$$a_{53} = -\left( \bar{B}_{22} - \frac{2Rh_0}{h} G_{23} \right) n;$$

$$a_{55} = -B_{33}\gamma_m^2 - B_{22}n^2 - \frac{4R^2}{h} G_{23};$$

$$b_{22} = -\frac{E_i F_i n^2}{R}; \quad b_{23} = -b_{32} = \frac{-E_i F_i n}{R};$$

$$b_{25} = b_{52} = \frac{2\varepsilon_i E_i F_i n^2}{R h_0};$$

$$b_{33}^0 = \frac{E_i F_i + a_i n^2}{R_i};$$

$$b_{35} = -b_{53} = -\frac{2n(\varepsilon_i E_i F + R a_i)}{R h_0};$$

$$b_{55} = -4 \frac{[R^2 a_i + E_i(\varepsilon_i^2 F_i + I_i) n^2]}{R h_0^2}.$$

Коэффициент постели  $\Pi$  будет иметь вид

$$\Pi = \frac{2\mu \Delta}{R \psi}; \quad \psi = \sum_{j=1}^6 \Phi_j D_{6j}; \quad \xi = \gamma_m; \quad x = z_0 \gamma_m;$$

$$\Phi_1 = -\frac{n^2}{\xi} I_n(\xi);$$

$$\Phi_3 = -\frac{(\lambda + \mu)}{2(\lambda + 2\mu)} \xi \left( \frac{n^2}{\xi^2} + 1 \right) I_n(\xi); \quad \Phi_5 = -I_n'(\xi);$$

$D_{6j}$ ,  $\Delta$  – соответственно дополнение и определитель матрицы, элементы которой имеют вид (вид других элементов аналогичен работе [14])

$$C_{11} = \frac{n^2}{x} I_n(x);$$

$$C_{13} = -I_n'(x) - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \left( \frac{n^2}{x^2} + 1 \right) x I_n(x);$$

$$C_{15} = 2I_n'(x);$$

$$C_{63} = \frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu)} \times$$

$$\times \xi \left[ \left( \frac{n^2}{\xi^2} + 1 \right) \xi I_n'(\xi) - \left( \frac{n^2}{\xi^2} - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right) I_n(\xi) \right];$$

$$C_{65} = \xi \left[ \frac{1}{\xi} I_n'(\xi) - \left( \frac{n^2}{\xi^2} + 1 \right) I_n(\xi) \right];$$

$$\mu = \frac{E_0}{2(1 + \nu_0)}; \quad \lambda = \frac{E_0 \nu_0}{(1 + \nu_0)(1 - 2\nu_0)},$$

где  $E_0$ ,  $\nu_0$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала цилиндра; штрихом обозначена производная по соответствующему аргументу.

Для получения четных столбцов матрицы  $C_{ij}$  и  $\Phi_j$  необходимо в предыдущих элементах заменить функцию  $I_n(x)$  на модифицированную функцию Бесселя  $K_n(x)$  с тем же аргументом.

Решение уравнений (3) будем искать в виде

$$\{f_{1m}, f_{2m}, f_{3m}, f_{4m}, f_{5m}; f_{2i}, f_{3i}, f_{5i}\} =$$

$$= \sum_{q=1,3,\dots}^{\infty} \left\{ [A_{1m}^{(q)}, A_{2m}^{(q)}, A_{3m}^{(q)}, A_{4m}^{(q)}, A_{5m}^{(q)}; A_{2i}^{(q)}, A_{3i}^{(q)}, A_{5i}^{(q)}] \sin \frac{q\omega t}{2} \right\} +$$

$$+ \sum_{q=1,3,\dots}^{\infty} \left\{ [B_{1m}^{(q)}, B_{2m}^{(q)}, B_{3m}^{(q)}, B_{4m}^{(q)}, B_{5m}^{(q)}; B_{2i}^{(q)}, B_{3i}^{(q)}, B_{5i}^{(q)}] \cos \frac{q\omega t}{2} \right\}.$$

Подставляя первую сумму из (4) в (3) и приравнявая коэффициенты при одинаковых  $\sin \frac{q\omega t}{2}$ , получим систему неоднородных алгебраических уравнений. Ограничимся первым членом ряда  $q=1$ , который определяет границу главной области неустойчивости и, согласно [15], в большинстве случаев его достаточно для практических расчетов. В результате получим (индекс  $q$  в дальнейшем опускается)

$$\sum_{j=1}^5 a_{1j} A_{jm} = 0; \quad \sum_{j=1}^5 a_{4j} A_{jm} = 0;$$

$$\sum_{j=1}^5 a_{2j} A_{jm} = -\frac{2}{\alpha_0} \sum_{i=1}^M (b_{22} A_{2i} + b_{23} A_{3i} + b_{25} A_{5i}) \sin \gamma_m \alpha_i; \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^5 a_{3j} A_{jm} = -\frac{2}{\alpha_0} \sum_{i=1}^M (b_{32} A_{2i} + b_{33} A_{3i} + b_{35} A_{5i}) \sin \gamma_m \alpha_i;$$

$$\sum_{j=1}^5 a_{5j} A_{jm} = -\frac{2}{\alpha_0} \sum_{i=1}^M (b_{52} A_{2i} + b_{53} A_{3i} + b_{55} A_{5i}) \sin \gamma_m \alpha_i;$$

$$\text{где } a_{33} = a_{33}^0 - \frac{R^2 F_0 \omega^2}{4} \mp \frac{R P_1 n^2}{2}; \quad b_{33} = b_{33}^0 - \frac{R \rho_i F_i \omega^2}{4}.$$

Решая систему (5), получим

$$A_{km} = -\frac{2}{\alpha_0} \sum_{i=1}^M (B_{k1} A_{2i} + B_{k2} A_{3i} + B_{k3} A_{5i}) \sin \gamma_m \alpha_i, \quad (6)$$

$$k = 1, 2, \dots, 5,$$

где

$$B_{k1} = \frac{b_{22} D_{2k} + b_{32} D_{3k} + b_{52} D_{5k}}{\Delta_1};$$

$$B_{k2} = \frac{b_{23} D_{2k} + b_{33} D_{3k} + b_{53} D_{5k}}{\Delta_1};$$

$$B_{k3} = \frac{b_{25} D_{2k} + b_{35} D_{3k} + b_{55} D_{5k}}{\Delta_1};$$

$\Delta_1$ ,  $D_{jk}$  – определитель и дополнение элемента  $a_{jk}$  матрицы (5).

Так как в местах расположения ребер справедливости соотношения

$$(A_{2r}, A_{3r}, A_{5r}) = \sum_{m=1}^{\infty} (A_{2m}, A_{3m}, A_{5m}) \sin \gamma_m \alpha_r,$$

то подставив в них выражения (6), получим систему  $3M$  уравнений относительно  $A_{ij}$

$$\begin{aligned} A_{2r} &= -\frac{2}{\alpha_0} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^M (B_{12}A_{2i} + B_{22}A_{3i} + B_{32}A_{5i}) \times \\ &\quad \times \sin \gamma_m \alpha_i \sin \gamma_m \alpha_r; \\ A_{3r} &= -\frac{2}{\alpha_0} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^M (B_{13}A_{2i} + B_{23}A_{3i} + B_{33}A_{5i}) \times \\ &\quad \times \sin \gamma_m \alpha_i \sin \gamma_m \alpha_r; \\ A_{5r} &= -\frac{2}{\alpha_0} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^M (B_{15}A_{2i} + B_{25}A_{3i} + B_{35}A_{5i}) \times \\ &\quad \times \sin \gamma_m \alpha_i \sin \gamma_m \alpha_r; \\ &\quad (r = 1, 2, \dots, M). \end{aligned} \quad (7)$$

Равенство нулю определителя системы (7) представляет характеристическое уравнение критических частот.

Подставляя вторую сумму из (4) в (3), получим характеристическое уравнение типа (7), в котором коэффициенты  $A_{jr}$  необходимо заменить на  $B_{jr}$  соответственно, а в коэффициенте  $a_{33}$  принять знак “+”.

Для случая равномерно расположенных ребер ( $\alpha_i = \frac{i\alpha_0}{M+1}$ ) коэффициенты перед  $A_{ki}$  не будут зависеть от индекса  $i$  и решение системы (7) можно представить в виде

$$\{A_{2i}, A_{3i}, A_{5i}\} = \{A_2, A_3, A_5\} \sin \frac{\pi N \alpha_i}{\alpha_0}, \quad 1 \leq N \leq M, \quad (8)$$

где  $N$  – целое число, характеризующее форму потери устойчивости;  $A_2, A_3, A_5$  – постоянные.

Подставляя (8) в уравнение (7), получим однородную систему трех алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \frac{M+1}{\alpha_0} \sum_m (B_{1j}A_2 + B_{2j}A_3 + B_{3j}A_5) A_j &= 0; \\ j &= 2, 3, 5, \\ m &= N, \quad 2s(M+1) \pm N, \quad s = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Характеристическое уравнение будет представлять равенство нулю определителя системы (9). Придавая  $n$  и  $N$  различные целочисленные значения, находим значения критических частот.

### ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Исследуем динамическую устойчивость трехслойной цилиндрической оболочки с композитными несущими слоями и легким наполнителем, подкрепленной одним и тремя кольцевыми ребрами и пустотелым цилиндром, при действии осевой сжимающей силы и внешнего давления, гармонически изменяющегося во времени:

$$\begin{aligned} L/R &= 6; \quad h_1/R = 0.002; \\ h_2/R &= 0.006; \quad h/R = 0.008; \\ (E_1^B, E_1^H)/E_0 &= 1.5 \times 10^4; \\ (E_2^B, E_2^H, E_i)/E_0 &= 2.3 \times 10^4; \\ (G_{12}^B, G_{12}^H, G_i)/E_0 &= 2.4 \times 10^3; \\ (G_{13}, G_{23})/E_0 &= 30; \\ v_1^B = v_1^H &= 0.15; \quad v_2^B = v_2^H = 0.23; \\ F_i/R^2 &= 8 \times 10^{-4}; \quad H/R = 0.04; \\ I/FR^2 &= 1.33 \times 10^{-4}; \\ R_0/R &= 0.6; \quad P_0/E_0 = 0.05; \\ T_\alpha/E_0R &= 0.5T_{кр} = 2; \\ r_i^B/R &= 0.01; \quad r_i^H/R = 0.02; \\ (\rho_B, \rho_H, \rho_i)/\rho_C &= 5; \quad v_0 = 0.49; \end{aligned}$$

$T_{кр}$  – критическое усилие потери устойчивости неподкрепленной трехслойной оболочки;  $H$  – высота ребра.

На рис. 1 показаны области неустойчивости (заштрихованная часть) оболочки с одним ребром при различных значениях радиуса канала цилиндра. Штриховой линией представлена оболочка без цилиндра. Здесь  $Y = \omega/\omega_0$  – отношение критической частоты пульсаций к собственной частоте неподкрепленной оболочки,  $X = p_1/p_0$  – отношение амплитуды переменной составляющей внешнего давления к постоянной, величина которой равна 0.8 критического давления потери устойчивости неподкрепленной оболочки.

На рис. 2 приведены области неустойчивости для оболочки с тремя ребрами при различных значениях безразмерной высоты  $H/R$  ребер.

Из приведенного примера следует, что:

увеличение толщины внутреннего цилиндра в 2 раза повышает границы критических частот примерно в 3 раза и уменьшает площадь области неустойчивости примерно в 2.7 раза;

для оболочки с одним ребром наличие 20% толщины свода внутреннего цилиндра уменьшает площадь области неустойчивости в 2 раза;

для оболочки без цилиндра увеличение числа ребер с одного до трех повышает границы критических частот примерно на 40% и уменьшает площадь области неустойчивости примерно в 2.1 раза, но при наличии цилиндра ( $z_0 = 0.6$ ) параметры области неустойчивости становятся одинаковыми;

увеличение высоты ребер в 2 раза повышает границы критических частот примерно в 1.8 раза и уменьшает площадь области неустойчивости примерно в 2 раза.

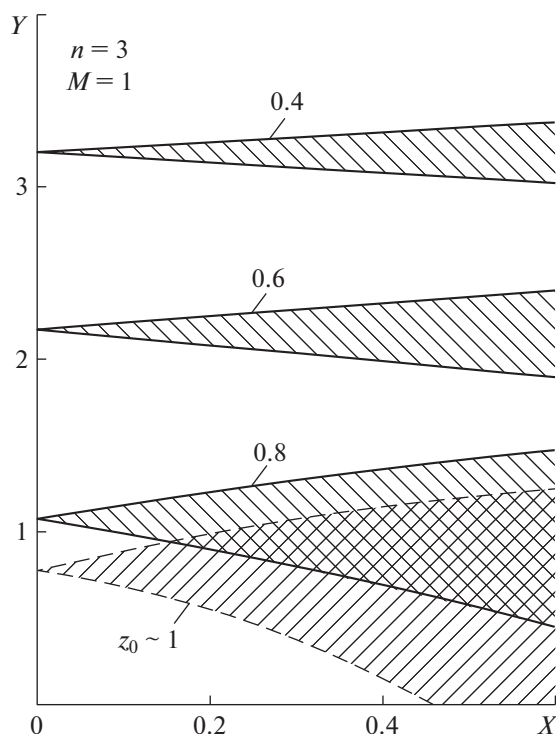


Рис. 1. Области неустойчивости оболочек с различными радиусами канала ( $M$  – количество ребер,  $n$  – количество кольцевых волн,  $z_0 = R_0/R$ ).

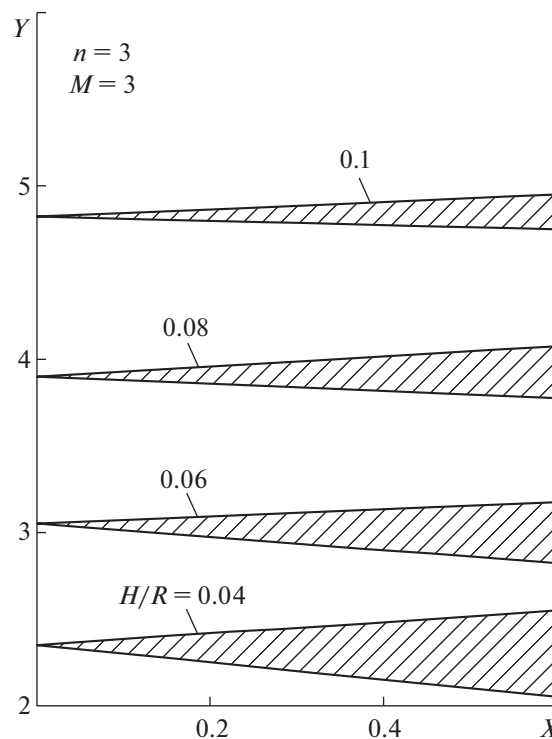


Рис. 2. Области неустойчивости оболочек при различной высоте ребер ( $H$  – высота ребра).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленном сообщении впервые получены уравнения и построена новая модель для анализа динамической устойчивости трехслойной цилиндрической оболочки с несимметричными ортотропными несущими слоями, подкрепленной кольцевыми ребрами и пустотелым изотропным цилиндром, при действии осевой нагрузки и внешнего пульсирующего давления. Рассмотрены основные этапы решения указанной задачи с помощью предложенной комбинации методов. Разработаны алгоритмы решения для произвольно расположенных неодинаковых ребер и для равномерно расположенных одинаковых ребер, в последнем случае характеристическое уравнение для определения критических частот значительно упрощается и представляет собой систему трех алгебраических уравнений.

На численном примере впервые построены зависимости критических частот главных областей неустойчивости и исследовано влияние на них радиуса канала цилиндра, количества и высоты ребер. Разработанная оригинальная математическая модель значительно расширяет круг решаемых задач и позволяет впервые провести анализ одновременного влияния кольцевых ребер и цилиндра на границы областей неустойчивости трехслойной цилиндрической оболочки с несимметричным па-

кетом ортотропных несущих слоев и легким заполнителем.

Получены приоритетные научные результаты, заключающиеся в разработке новой модели для исследования динамической устойчивости трехслойных цилиндрических оболочек и впервые построенных с помощью этой модели зависимостей, определяющих возникновение параметрического резонанса, приводящего к разрушению корпуса двигателя летательного аппарата.

## ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПРИМ РАН.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Липанов А.М., Алиев А.В. Проектирование РДТТ. М.: Машиностроение, 1995. 397 с.
2. Бакулин В.Н., Образцов И.Ф., Потопахин В.А. Динамические задачи нелинейной теории многослойных оболочек: Действие интенсивных термодинамических нагрузок, концентрированных потоков энергии. М.: Физматлит, 1998. 464 с.
3. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи аэроупругости. М.: Физматлит, 1976. 416 с.
4. Липанов А.М., Карсканов С.А., Чернышев С.Л., Липанов И.И. Теоретическое исследование условий возникновения скоростного бафтинга // Вестн.

- Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2019. Т. 29. № 3. С. 382–395.
5. *Огибалов П.М., Колтунов М.А.* Оболочки и пластины. М.: ГИТТЛ, 1971. 696 с.
  6. *Майльбаев А.А., Сейранян А.П.* Многопараметрические задачи устойчивости. Теория и приложения в механике. М.: Физматлит, 2009. 400 с.
  7. *Бакулин В.Н., Волков Е.Н., Симонов А.И.* Динамическая устойчивость цилиндрической оболочки при действии переменного по оси внешнего давления // Изв. вузов. Авиационная техника. 2017. № 4. С. 11–17.
  8. *Бакулин В.Н., Волков Е.Н., Недбай А.Я.* Флаттер слоистой цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевыми ребрами и нагруженной осевыми силами // ДАН. 2015. Т. 463. № 4. С. 414–417.
  9. *Бакулин В.Н., Конопельчев М.А., Недбай А.Я.* Аэроупругая устойчивость композитной цилиндрической оболочки линейно-переменной толщины // ДАН. 2019. Т. 488. № 1. С. 595–601.
  10. *Бакулин В.Н., Недбай А.Я.* Динамическая устойчивость цилиндрической оболочки, подкрепленной продольными ребрами кусочно-постоянной толщины, при действии осевой нагрузки // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2020. Т. 495. С. 39–45.
  11. *Соломонов Ю.С., Георгиевский В.П., Недбай А.Я., Поспелов А.А.* Динамическая устойчивость трехслойной цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевыми ребрами, при действии внешнего давления // Сб. матер. Всерос. науч. конф. М.: ИПРИМ РАН, 2015. С. 290–292.
  12. *Соломонов Ю.С., Георгиевский В.П., Недбай А.Я., Конопельчев М.А.* Устойчивость трехслойной оболочки с кольцевыми ребрами в сверхзвуковом потоке газа // Материалы XX Юбилейной Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВСППС'2017). 24–31 мая 2017. Алушта. М.: Изд-во МАИ, 2017. С. 321–323.
  13. *Соломонов Ю.С., Георгиевский В.П., Недбай А.Я., Конопельчев М.А.* Устойчивость трехслойной оболочки с кольцевыми ребрами в сверхзвуковом потоке газа // Механика композиционных материалов и конструкций. 2017. Т. 23. № 3. С. 435–443.
  14. *Соломонов Ю.С., Георгиевский В.П., Недбай А.Я., Андрушин В.А.* Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек. М.: Физматлит, 2014. 408 с.
  15. *Болотин В.В.* Динамическая устойчивость упругих систем. М.: ГИТТЛ, 1956. 600 с.

## THE DYNAMIC STABILITY OF THREE-LAYERED CYLINDRICAL SHELL, REINFORCED RING RIBS AND HOLLOW CYLINDER UNDER EXTERNAL PRESSURE PULSING

V. N. Bakulin<sup>a</sup> and A. Ya. Nedbay<sup>b</sup>

<sup>a</sup> *Institute of Applied Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

<sup>b</sup> *Corporation Moscow Institute of Heat Technology, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS A.M. Lipanov

A model is proposed for studying the dynamic stability of a three-layer cylindrical shell with an asymmetric package of composite bearing layers and a light filler, supported by annular ribs and an elastic hollow cylinder, under the action of axial forces and external pulsating pressure. For the first time, the equations are obtained and the main stages of solving the problem are considered using the proposed combination of methods. For arbitrarily arranged unequal edges, the problem is reduced to solving a system of equations with respect to the amplitude values of the two circumferential and radial displacements of the shell at the locations of the edges. For evenly spaced identical edges, the characteristic equation for determining the critical frequencies is a system of three algebraic equations. For the first time, the dependences of the critical frequencies of the main instability regions are constructed and the influence of the cylinder and ribs parameters on them is investigated. The developed original mathematical model makes it possible for the first time to analyze the simultaneous influence of the edges and the cylinder on the boundaries of the instability regions and to determine the occurrence of a parametric resonance that leads to the destruction of the aircraft engine body.

*Keywords:* dynamic stability, external pulsating pressure, critical frequencies, areas of instability, three-layer cylindrical shell, the characteristic equation, an asymmetrical layer package, load-bearing layers, easy placeholder, ring ribs