МЕХАНИКА

УДК 531.26,521.14,514.85

ПРОИЗВОДЯЩАЯ ФУНКЦИЯ КОМПОНЕНТ ТЕНЗОРА ЭЙЛЕРА–ПУАНСО

© 2021 г. А. А. Буров[1,2,*], Е. А. Никонова[2,**]

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 29.03.2021 г.
Поступило 01.04.2021 г.
После доработки 16.04.2021 г.
Принято к публикации 16.04.2021 г.

В работе вводятся функции, позволяющие вычислять компоненты тензора Эйлера–Пуансо с помощью дифференцирования. Роль этих функций аналогична роли производящих функций в математической статистике, позволяющих вычислять статистические моменты любого порядка. Обсуждаются свойства этих функций.

Ключевые слова: тензор Эйлера–Пуансо, момент инерции произвольного порядка, статистические моменты, производящая функция

DOI: 10.31857/S2686740021030068

1. ОСНОВНОЕ УТВЕРЖДЕНИЕ

Из математической статистики хорошо известно (см., например, [1]) понятие производящей функции, позволяющей вычислять статистические моменты любого порядка с помощью дифференцирования. Пусть $\mathcal{G}$ – твердое тело, $Ox_1x_2x_3$ – прямоугольная правая система координат, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$ – координаты радиус-вектора $\overrightarrow{OP}$ точки $P \in \mathcal{G}$, $\rho(\mathbf{x})$ – плотность тела в точке P. Напомним, что тензор Эйлера–Пуансо k-го порядка задается своими компонентами

$$I_{k_1k_2k_3} = \iiint\limits_{\mathcal{G}} x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} \rho(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 dx_3, \quad k_1 + k_2 + k_3 = k. \tag{1}$$

Введем функцию

$$F(\mathbf{t}) = \iiint\limits_{\mathcal{G}} e^{(\mathbf{t},\mathbf{x})} \rho(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 dx_3, \quad \mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}. \tag{2}$$

Утверждение.

$$I_{k_1k_2k_3} = \frac{\partial^k F(0,0,0)}{\partial t_1^{k_1} \partial t_2^{k_2} \partial t_3^{k_3}}. \tag{3}$$

В справедливости утверждения можно убедиться непосредственно, опираясь на теорему о дифференцировании по параметру под знаком интеграла (см., например, [2, с. 141, п. 297]), условия которой предполагаются выполненными.

Будем называть функцию (2) производящей функцией тензора Эйлера–Пуансо.

2. ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ПРОИЗВОДЯЩЕЙ ФУНКЦИИ

Свойство 1. Пусть $O'x_1'x_2'x_3'$ – прямоугольная правая система координат, оси которой параллельны соответствующим осям системы координат $Ox_1x_2x_3$, а $\overrightarrow{OO'} = \mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)^{\mathrm{T}}$. Тогда для таким образом введенных осей производящая функция $F(\mathbf{t};\mathbf{f})$ такова, что

$$F'(\mathbf{t};\mathbf{f}) = \iiint\limits_{\mathcal{G}} e^{(\mathbf{t},\mathbf{x}')} \rho(x') dx_1' dx_2' dx_3' = e^{-(\mathbf{t},\mathbf{f})} F(\mathbf{t}). \tag{4}$$

Это свойство доказывается непосредственным вычислением, опирающимся на подстановку $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{f}$. Оно аналогично хорошо известной из механики теореме Гюйгенса–Штейнера (см., например, [3]), согласно которой момент инерции твердого тела относительно любой оси равен моменту инерции относительно оси, проходящей через центр масс тела и параллельной данной оси,

[1]*Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” Российской академии наук, Москва, Россия*
[2]*Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия*
**E-mail: jtm@yandex.ru*
***E-mail: nikonova.ekaterina.a@gmail.com*

сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния между осями.

Свойство 2. Пусть $Ox_1''x_2''x_3''$ — прямоугольная правая система координат, полученная поворотом из системы координат $Ox_1x_2x_3$ так, что координаты радиус-вектора одной и той же точки в этих двух системах связаны соотношением $\mathbf{x}'' = \mathbf{S}\mathbf{x}$, где $\mathbf{S}$ — ортогональная матрица поворота. Тогда производящая функция $F''(\mathbf{t};\mathbf{S})$ в системе координат $Ox_1''x_2''x_3''$ имеет вид

$$\begin{aligned} F''(\mathbf{t};\mathbf{S}) &= \iiint\limits_{\mathcal{G}B} e^{(\mathbf{t},\mathbf{x}'')}\rho(\mathbf{x}'')dx_1''dx_2''dx_3'' = \\ &= \iiint\limits_{\mathcal{G}} e^{(\mathbf{t},\mathbf{S}\mathbf{x})}\rho(\mathbf{x})\det(\mathbf{S})dx_1dx_2dx_3 = \\ &= \iiint\limits_{\mathcal{G}} e^{(\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{t},\mathbf{x})}\rho(\mathbf{x})dx_1dx_2dx_3 = F(\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{t}). \end{aligned} \tag{5}$$

Замечание 1. Непосредственное преобразование компонент тензора Эйлера—Пуансо при таких заменах систем координат задается несложными, но весьма громоздкими выражениями.

3. ПРИМЕРЫ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ

Вычисление производящих функций для некоторых однородных тел приводит к следующим результатам.

Прямоугольный параллелепипед. Пусть тело $\mathcal{G}$ — прямоугольный параллелепипед с ребрами $2a_1$, $2a_2$, $2a_3$. В осях $Ox_1x_2x_3$, параллельных ребрам параллелепипеда и проходящих через его центр масс, производящая функция принимает вид

$$F(\mathbf{t};a_1,a_2,a_3) = 8\frac{\mathrm{sh}(a_1t_1)\mathrm{sh}(a_2t_2)\mathrm{sh}(a_3t_3)}{t_1t_2t_3}. \tag{6}$$

В частности, для куба с ребром $2a$

$$F(\mathbf{t};a) = 8\frac{\mathrm{sh}(at_1)\mathrm{sh}(at_2)\mathrm{sh}(at_3)}{t_1t_2t_3}.$$

Равногранный тетраэдр. Пусть тело $\mathcal{G}$ — равногранный тетраэдр (относительно определения и основных свойств см. [4]) с бимедианами $2a_1$, $2a_2$, $2a_3$. Рассмотрим оси $Ox_1x_2x_3$, направленные вдоль бимедиан и проходящие через центр масс — точку их пересечения. Если в этих осях координаты вершин тетраэдра (a_1; $-a_2$; $-a_3$), ($-a_1$; $-a_2$; a_3), ($-a_1$; a_2; $-a_3$), (a_1; a_2; a_3), то производящая функция принимает вид

$$\begin{aligned} F(\mathbf{t};a_1,a_2,a_3) &= 4a_1a_2a_3 \times \\ \times \sum_{(1,2,3)} &\frac{e^{a_1t_1}\mathrm{ch}(a_2t_2+a_3t_3) - e^{-a_1t_1}\mathrm{ch}(a_2t_2-a_3t_3)}{(a_1^2t_1^2-a_2^2t_2^2)(a_3^2t_3^2-a_1^2t_1^2)}a_1t_1. \end{aligned} \tag{7}$$

В частном случае правильного тетраэдра с бимедианой $2a$ эта функция записывается как

$$F(\mathbf{t};a) = 4\sum_{(1,2,3)}\frac{e^{at_1}\mathrm{ch}((t_2+t_3)a) - e^{-at_1}\mathrm{ch}((t_2-t_3)a)}{(t_1^2-t_2^2)(t_3^2-t_1^2)}t_1.$$

Октаэдр. Пусть тело $\mathcal{G}$ — октаэдр, ребра которого соединяют середины соседних граней прямоугольного параллелепипеда с ребрами $2a_1$, $2a_2$, $2a_3$. В осях $Ox_1x_2x_3$, соединяющих его противоположные вершины и проходящих через центр октаэдра, производящая функция записывается как

$$\begin{aligned} F(\mathbf{t};a_1,a_2,a_3) &= 8a_1a_2a_3e^{-a_3t_3} \times \\ &\times \sum_{(1,2,3)}\frac{a_1t_1\mathrm{sh}(a_1t_1)}{(a_1^2t_1^2-a_3^2t_3^2)(a_1^2t_1^2-a_2^2t_2^2)}. \end{aligned} \tag{8}$$

В частном случае правильного октаэдра, вписанного в куб с ребром $2a$, производящая функция записывается как

$$F(\mathbf{t};a) = 8\sum_{(1,2,3)}\frac{t_1\mathrm{sh}(at_1)}{(t_1^2-t_3^2)(t_1^2-t_2^2)}.$$

Цилиндр. Пусть тело $\mathcal{G}$ — прямой круговой цилиндр с радиусом основания R высотой $2h$. Пусть $Ox_1x_2x_3$ — система координат, начало которой совпадает с центром симметрии цилиндра, а ось Ox_3 — с его осью симметрии. Тогда выражение для производящей функции имеет вид

$$\begin{aligned} F(\mathbf{t};R,h) &= 2\pi R^2\frac{\mathrm{sh}(t_3h)}{t_3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t_1^2+t_2^2)^nR^{2n}}{2^{2n}n!(n+1)!} = \\ &= 4\pi R\frac{\mathrm{sh}(t_3h)}{t_3\sqrt{t_1^2+t_2^2}}J_1(\sqrt{t_1^2+t_2^2}R), \end{aligned} \tag{9}$$

где $J_1(z)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода порядка 1 (см., например, [5, с. 13, п. 7.2.2]) с аргументом $\sqrt{t_1^2+t_2^2}R$.

Конус. Пусть тело $\mathcal{G}$ — прямой круговой конус с радиусом основания R и высотой h. В проходящих через центр масс конуса осях $Ox_1x_2x_3$, с осью Ox_3, направленной вдоль высоты, выражение для производящей функции имеет вид

$$F(\mathbf{t}) = \frac{\pi R^2}{h^2t_3^3}e^{3t_3h/4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t_1^2+t_2^2)^n}{2^{2n}n!(n+1)!}\left(\frac{R}{ht_3}\right)^{2n}\gamma(2n+3,ht_3), \tag{10}$$

где

$$\gamma(2n+3,ht_3) = \int\limits_0^{ht_3}e^{-t}t^{2n+2}dt$$

есть нижняя неполная гамма-функция.

Трехосный эллипсоид. Пусть тело $\mathcal{G}$ — трехосный эллипсоид с полуосями a_1, a_2 и a_3. В проходящих через центр масс эллипсоида осях $Ox_1x_2x_3$, совпадающих с его главными осями инерции, выражение для производящей функции имеет вид

$$F(\mathbf{t}) = \frac{4\pi a_1 a_2 a_3}{\mathcal{T}^2}\left(\operatorname{ch}\mathcal{T} - \frac{\operatorname{sh}\mathcal{T}}{\mathcal{T}}\right),\quad \mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbf{t}) = \sqrt{a_1^2 t_1^2 + a_2^2 t_2^2 + a_3^2 t_3^2}. \tag{11}$$

В случае однородного эллипсоида значение интеграла (1) при произвольных k_1, k_2, k_3 было найдено Леженом Дирихле в гамма-функциях (см., например, [6, с. 396, п. 676, пример 6]).

Полагая $a_1 = a_2 = a_3 = a$, приходим к производящей функции для шара радиуса a, выражение которой имеет вид

$$F(\mathbf{t}) = \frac{4\pi a^3}{\mathcal{T}^2}\left(\operatorname{ch}\mathcal{T} - \frac{\operatorname{sh}\mathcal{T}}{\mathcal{T}}\right),\quad \mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbf{t}) = a\sqrt{(\mathbf{t},\mathbf{t})}.$$

4. ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ И КОМПОНЕНТ ТЕНЗОРА ЭЙЛЕРА–ПУАНСО

Как известно (см., например, [7, 8]), тензор инерции $\mathbf{J}$ тела и тензор Эйлера–Пуансо второго порядка $\mathbf{I}_2$ связаны соотношениями

$$\mathbf{J} = \operatorname{Tr}(\mathbf{I}_2)\mathbf{E} - \mathbf{I}_2,\quad \mathbf{I}_2 = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\mathbf{J})\mathbf{E} - \mathbf{J},\quad \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} I_{200} & I_{110} & I_{101} \\ I_{110} & I_{020} & I_{011} \\ I_{101} & I_{011} & I_{002} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

где $\mathbf{E}$ – единичная матрица 3×3. У этих тензоров общие собственные векторы, а вместе с ними – и главные оси инерции.

Ц и л и н д р. Для рассмотренного цилиндра массы m в выбранных осях тензоры $\mathbf{I}_2$ и $\mathbf{J}$ имеют вид (ср. [9])

$$\mathbf{I}_2 = m \cdot \operatorname{diag}\left(\frac{R^2}{4}, \frac{R^2}{4}, \frac{h^2}{3}\right),$$
$$\mathbf{J} = m \cdot \operatorname{diag}\left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3}, \frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3}, \frac{R^2}{2}\right).$$

В случае, когда $h = \frac{\sqrt{3}}{2}R$, центральный тензор инерции $\mathbf{J}$ шаровой (ср. [10, 11]). Для цилиндра в силу симметрии тензор $\mathbf{I}_3$ нулевой, а ненулевые компоненты тензора $\mathbf{I}_4$ имеют вид

$$I_{400} = I_{040} = m\frac{R^4}{8},\quad I_{004} = m\frac{R^4}{5},$$
$$I_{220} = m\frac{R^4}{24},\quad I_{022} = I_{202} = m\frac{R^2h^2}{12}.$$

К о н у с. Для рассмотренного конуса массы m в выбранных осях тензоры $\mathbf{I}_2$ и $\mathbf{J}$ имеют вид (ср. [9])

$$\mathbf{I}_2 = m \cdot \operatorname{diag}\left(\frac{3R^2}{20}, \frac{3R^2}{20}, \frac{3h^2}{80}\right),$$
$$\mathbf{J} = \frac{3}{20}m \cdot \operatorname{diag}\left(R^2 + \frac{h^2}{4}, R^2 + \frac{h^2}{4}, 2R^2\right).$$

В случае, когда $h = 2R$, центральный тензор инерции $\mathbf{J}$ шаровой (ср. [10, 11]). Ненулевые компоненты тензоров $\mathbf{I}_3$ и $\mathbf{I}_4$ имеют вид

$$\mathbf{I}_3\colon\ I_{003} = m\frac{h^3}{160},\quad I_{021} = I_{201} = -m\frac{R^2h}{80},$$
$$\mathbf{I}_4\colon\ I_{400} = I_{040} = m\frac{3R^4}{56},\quad I_{004} = m\frac{39h^4}{8960},$$
$$I_{220} = m\frac{R^4}{56},\quad I_{022} = I_{202} = m\frac{9R^2h^2}{2240}$$

соответственно.

З а м е ч а н и е 2. Компоненты тензора Эйлера–Пуансо присутствуют в разложениях гравитационного потенциала в ряд по гармоническим многочленам (см., например, [7]). Исследованию их роли в динамике твердого тела посвящены работы Р.С. Суликашвили [10, 11], в которых такая роль изучалась для однородных конуса и цилиндра, а также для тел, обладающих симметриями правильных многогранников [12]. Для ряда малых небесных тел компоненты тензора Эйлера–Пуансо вычислялись в [13–16] вплоть до компонент тензоров четвертого порядка.

З а м е ч а н и е 3. В математической статистике изучаются моменты для непостоянных плотностей распределений вероятностей (см., например, [17]), как правило, нетипичных для теоретической механики. Формы компактных носителей, на которых в математической статистике рассматриваются постоянные плотности распределения, в общем случае, за исключением иллюстрационных примеров, тоже нетипичны для теоретической механики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Уилкс С.* Математическая статистика. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1967. 632 с.
2. *Фихтенгольц Г.М.* Основы математического анализа. Т. 2. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1968. 464 с.
3. *Четаев Н.Г.* Теоретическая механика. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. 368 с.
4. *Шарыгин И.Ф.* Задачи по геометрии. Стереометрия. Сер. Библиотечка Квант. Вып. 31. М.: Наука, 1984. 160 с.
5. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966. 296 с.
6. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1956. 656 с.

7. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1968. 800 с.
8. *Dobrovolskis A.R.* Inertia of Any Polyhedron // Icarus. 1996. V. 124. № 2. P. 698–704.
9. *Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р.* Курс теоретической механики. Т. 2. Динамика. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. 544 с.
10. *Суликашвили Р.С.* Влияние моментов инерции высших порядков на динамику твердого тела с неподвижной точкой // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ АН СССР, 1985. С. 90–104.
11. *Суликашвили Р.С.* О влиянии моментов инерции третьего и четвертого порядков на движение твердого тела // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 2. С. 268–274.
12. *Суликашвили Р.С.* Стационарные движения тел, допускающих группу симметрии правильных многогранников в ньютоновском поле сил // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 4. С. 582–586.
13. *Burov A.A., Nikonov V.I.* Inertial characteristics of higher orders and dynamics in a proximity of a small celestial body // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2020. V. 16. № 2. P. 259–273.
14. *Буров А.А., Никонов В.И.* Вычисление потенциала притяжения астероида (433) Эрос с точностью до членов четвертого порядка // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2020. Т. 492. С. 58–62.
15. *Буров А.А., Никонов В.И.* Чувствительность значений компонент тензоров Эйлера–Пуансо к выбору триангуляционной сетки поверхности тела // ЖВМиМФ. 2020. Т. 60. № 10. С. 1764–1776.
16. *Никонов В. И.* Гравитационные поля малых небесных тел. М.: Белый ветер, 2020. 68 с.
17. *Triantafyllopoulos K.* On the central moments of the multidimensional Gaussian distribution // Math. Scientist. 2003. V. 28. Is. 2. P. 125–128.

THE GENERATING FUNCTION FOR THE COMPONENTS OF THE EULER-POINSOT TENSOR

A. A. Burov[a,b] and E. A. Nikonova[b]

[a] *Federal Research Center "Computing Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

[b] *National Research University "Higher School of Economics", Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

The generating functions enable to calculate the components of the Euler–Poinsot tensor using differentiation are introduced. The role of these functions is similar to the role of generating functions in mathematical statistics, enabling one to calculate statistical moments of any order. The properties of these functions are discussed.

Keywords: Euler–Poinsot tensor, inertia moments of arbitrary order, statistical moments, generating function