ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2021, том 498, с. 11–16

ФИЗИКА

УДК 537.2

ОБОБЩЕННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ МАКСВЕЛЛА ГАРНЕТТА ДЛЯ ТЕКСТУРИРОВАННЫХ МАТРИЧНЫХ КОМПОЗИТОВ С ВКЛЮЧЕНИЯМИ В ОБОЛОЧКЕ

© 2021 г. Академик РАН В. И. Колесников[1,*], И. В. Лавров[2], В. В. Бардушкин[2], А. П. Сычев[1,3,**], В. Б. Яковлев[2,4]

Поступило 30.03.2021 г.
После доработки 30.03.2021 г.
Принято к публикации 07.04.2021 г.

Предложено обобщение приближения Максвелла Гарнетта для текстурированного матричного композита, состоящего из эллипсоидальных включений с оболочкой. С помощью указанного обобщенного приближения получено выражение для тензора эффективной диэлектрической проницаемости рассматриваемой среды. Показано, что в случае матричного композита со сферическими включениями в оболочке данное выражение совпадает с формулой, полученной в обобщенном приближении эффективного поля с выбором матрицы в качестве среды сравнения.

Ключевые слова: приближение Максвелла Гарнетта, эффективная диэлектрическая проницаемость, обобщенное приближение эффективного поля, матричный композит, включение с оболочкой

DOI: 10.31857/S268674002103010X

Приближение Максвелла Гарнетта (МГ) [1] широко используется для вычисления эффективных электрофизических характеристик неоднородных сред матричного типа, в том числе для прогнозирования их оптических свойств [2–4]. В [5] было установлено, что в случае, когда металлические частицы в материале изолированы друг от друга диэлектрической прослойкой (матрицей), оптические свойства пленки из такого материала качественно хорошо прогнозируются с помощью приближения МГ и его обобщений. Первоначально приближение МГ было получено Дж.К. Максвеллом Гарнеттом [1] для объяснения оптических свойств стекла с мельчайшими металлическими частицами сферической формы. В дальнейшем были получены обобщения формулы МГ для различных вариантов структуры матричных композитов с однородными включениями эллипсоидальной формы [2, 3, 6, 7]. Ключевым моментом этих обобщений являлся выбор среднего поля в матрице в качестве действующего [8]. Имеются также обобщения МГ на частные варианты сред с неоднородными включениями: со сферическими включениями с однослойной [9, 10] или многослойной [11] оболочкой, с непрерывной радиальной зависимостью диэлектрической проницаемости [11]. Тем не менее, учитывая большой практический интерес к композитам с неоднородными включениями [12, 13], имеется необходимость обобщений приближения МГ для указанных сред, позволяющих учитывать такие особенности структуры среды, как несферическая форма включений, вероятностное распределение их ориентаций и форм, а также наличие нескольких видов включений.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЕЕ РЕШЕНИЕ В ОБОБЩЕННОМ ПРИБЛИЖЕНИИ МАКСВЕЛЛА ГАРНЕТТА

Рассмотрим образец объемом V статистически однородного композита, состоящего из однородной изотропной матрицы с погруженными в нее неоднородными включениями общим количеством N, каждое из которых представляет собой однородное анизотропное эллипсоидальное ядро с однородной анизотропной оболочкой, внешняя граница которой так же, как и внутренняя, явля-

[1] *Ростовский государственный университет путей сообщения, Ростов-на-Дону, Россия*
[2] *Национальный исследовательский университет “Московский институт электронной техники”, Москва, Россия*
[3] *Федеральный исследовательский центр Южный научный центр Российской академии наук, Ростов-на-Дону, Россия*
[4] *Институт нанотехнологий микроэлектроники Российской академии наук, Москва, Россия*
**E-mail: kvi@rgups.ru*
***E-mail: alekc_sap@mail.ru*

ется эллипсоидальной. Диэлектрические проницаемости матрицы, оболочки и ядра k-го включения обозначим ε_m, $\boldsymbol{\varepsilon}_1^{(k)}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_2^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots, N$. Полуоси внешней $S_1^{(k)}$ и внутренней $S_2^{(k)}$ границ оболочки k-го включения обозначим $a_{11}^{(k)}$, $a_{12}^{(k)}$, $a_{13}^{(k)}$ и $a_{21}^{(k)}$, $a_{22}^{(k)}$, $a_{23}^{(k)}$ соответственно, объемную долю ядра в нем – v_k, объем всего k-го включения – V_k, объемную долю всех включений в образце – f. Очевидно, что

$$v_k = \frac{a_{21}^{(k)}a_{22}^{(k)}a_{23}^{(k)}}{a_{11}^{(k)}a_{12}^{(k)}a_{13}^{(k)}}, \quad V_k = \frac{4\pi}{3}a_{11}^{(k)}a_{12}^{(k)}a_{13}^{(k)}, \quad k = 1, 2, \ldots, N.$$

Пусть к границе S данного образца приложено постоянное электрическое поле напряженностью $\mathbf{E}_0$. Тензор $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ эффективных диэлектрических характеристик образца данного композита связывает средние по объему образца векторы электрической индукции и напряженности электрического поля:

$$\langle \mathbf{D} \rangle = \boldsymbol{\varepsilon}^* \langle \mathbf{E} \rangle.$$

Для $\langle \mathbf{E} \rangle$ при отсутствии в нем двойных поляризационных слоев можно написать выражение

$$\langle \mathbf{E} \rangle = (1-f)\langle \mathbf{E}^{(m)} \rangle + f(V_{inc})^{-1} \times \sum_{k=1}^{N} V_k((1-v_k)\langle \mathbf{E}_1^{(k)} \rangle + v_k \langle \mathbf{E}_2^{(k)} \rangle), \tag{1}$$

где $\langle \mathbf{E}^{(m)} \rangle$, $\langle \mathbf{E}_1^{(k)} \rangle$ и $\langle \mathbf{E}_2^{(k)} \rangle$ – средние напряженности поля в матрице, в оболочке и ядре k-го включения соответственно; $V_{inc} = fV$ – объем всех включений в образце. Аналогично (1), для средней поляризации образца имеем

$$\langle \mathbf{P} \rangle = (1-f)\langle \mathbf{P}^{(m)} \rangle + f(V_{inc})^{-1} \times \sum_{k=1}^{N} V_k((1-v_k)\langle \mathbf{P}_1^{(k)} \rangle + v_k \langle \mathbf{P}_2^{(k)} \rangle). \tag{2}$$

Векторы поляризации и напряженности электрического поля в матрице, в оболочке и ядре k-го включения связаны материальными уравнениями

$$\mathbf{P}^{(m)}(\mathbf{x}) = \chi_m \mathbf{E}^{(m)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{P}_1^{(k)}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\chi}_1^{(k)}\mathbf{E}_1^{(k)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{P}_2^{(k)}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\chi}_2^{(k)}\mathbf{E}_2^{(k)}(\mathbf{x}), \tag{3}$$

где $\chi_m = (4\pi)^{-1}(\varepsilon_m - 1)$, $\boldsymbol{\chi}_1^{(k)} = (4\pi)^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon}_1^{(k)} - \mathbf{I})$, $\boldsymbol{\chi}_2^{(k)} = (4\pi)^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon}_2^{(k)} - \mathbf{I})$ – восприимчивости матрицы, оболочки и ядра k-го включения соответственно. Тензор эффективной восприимчивости образца композита $\boldsymbol{\chi}^*$, определяемый уравнением

$$\langle \mathbf{P} \rangle = \boldsymbol{\chi}^* \langle \mathbf{E} \rangle, \tag{4}$$

связан с $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ соотношением

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \mathbf{I} + 4\pi\boldsymbol{\chi}^*. \tag{5}$$

Подставляя (3), (4), (1) в (2) и упрощая, получим уравнение

$$(1-f)(\boldsymbol{\chi}^* - \chi_m\mathbf{I})\langle \mathbf{E}^{(m)} \rangle = \frac{f}{V_{inc}}\sum_{k=1}^{N} V_k \Big((1-v_k)(\boldsymbol{\chi}_1^{(k)} - \boldsymbol{\chi}^*)\langle \mathbf{E}_1^{(k)} \rangle + v_k(\boldsymbol{\chi}_2^{(k)} - \boldsymbol{\chi}^*)\langle \mathbf{E}_2^{(k)} \rangle\Big). \tag{6}$$

Следуя [8], определим обобщение приближения МГ на матричный композит с включениями в оболочке как приближение, при котором средние значения напряженности электрического поля в оболочке и ядре конкретного включения с номером k связаны со средней напряженностью поля в матрице так же, как и в таком же уединенном включении в бесконечной матрице с однородным приложенным полем, т.е.

$$\langle \mathbf{E}_1^{(k)} \rangle = \boldsymbol{\lambda}_1^{(k)} \langle \mathbf{E}^{(m)} \rangle, \quad \langle \mathbf{E}_2^{(k)} \rangle = \boldsymbol{\lambda}_2^{(k)} \langle \mathbf{E}^{(m)} \rangle, \tag{7}$$

где $\boldsymbol{\lambda}_1^{(k)}$ и $\boldsymbol{\lambda}_2^{(k)}$ – тензоры 2-го ранга, зависящие от геометрической формы включений и от их материальных свойств, а также от материальных свойств матрицы; их конкретный вид будет найден позже.

Подставляя (7) в (6) и выражая $\boldsymbol{\chi}^*$ из (5) через $\boldsymbol{\varepsilon}^*$, получим

$$(1-f)(\boldsymbol{\varepsilon}^* - \varepsilon_m\mathbf{I})\langle \mathbf{E}^{(m)} \rangle = \sum_{k=1}^{N} w_k((1-v_k)(\boldsymbol{\varepsilon}_1^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}^*)\boldsymbol{\lambda}_1^{(k)} + v_k(\boldsymbol{\varepsilon}_2^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}^*)\boldsymbol{\lambda}_2^{(k)})\langle \mathbf{E}^{(m)} \rangle, \tag{8}$$

где $w_k = V_k/V$ – объемная доля k-го включения в образце. Уравнение (8) должно выполняться при любом значении $\langle \mathbf{E}^{(m)} \rangle$, зависящем непрерывно от $\mathbf{E}_0$, поэтому (8) влечет за собой тензорное равенство, выражая из которого $\boldsymbol{\varepsilon}^*$, имеем

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \left[(1-f)\varepsilon_m\mathbf{I} + \sum_{k=1}^{N} w_k((1-v_k)\boldsymbol{\varepsilon}_1^{(k)}\boldsymbol{\lambda}_1^{(k)} + v_k\boldsymbol{\varepsilon}_2^{(k)}\boldsymbol{\lambda}_2^{(k)})\right] \times \left[(1-f)\mathbf{I} + \sum_{k=1}^{N} w_k((1-v_k)\boldsymbol{\lambda}_1^{(k)} + v_k\boldsymbol{\lambda}_2^{(k)})\right]^{-1}. \tag{9}$$

Введем обозначения:

$$\boldsymbol{\lambda}^{(k)} = (1-v_k)\boldsymbol{\lambda}_1^{(k)} + v_k\boldsymbol{\lambda}_2^{(k)}, \quad \boldsymbol{\kappa}^{(k)} = (1-v_k)\boldsymbol{\varepsilon}_1^{(k)}\boldsymbol{\lambda}_1^{(k)} + v_k\boldsymbol{\varepsilon}_2^{(k)}\boldsymbol{\lambda}_2^{(k)}, \quad k = 1, 2, \ldots, N. \tag{10}$$

Вводя средние значения тензоров $\boldsymbol{\lambda}^{(k)}$ и $\boldsymbol{\kappa}^{(k)}$ по всем включениям

$$\langle \boldsymbol{\lambda} \rangle = \frac{1}{f}\sum_{k=1}^{N} w_k \boldsymbol{\lambda}^{(k)}, \quad \langle \boldsymbol{\kappa} \rangle = \frac{1}{f}\sum_{k=1}^{N} w_k \boldsymbol{\kappa}^{(k)}, \tag{11}$$

перепишем (9) в виде

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \left[(1-f)\varepsilon_m \mathbf{I} + f\langle \boldsymbol{\kappa} \rangle\right]\left[(1-f)\mathbf{I} + f\langle \boldsymbol{\lambda} \rangle\right]^{-1}, \tag{12}$$

аналогичном соотношению для тензора эффективной диэлектрической проницаемости матричного композита с однородными анизотропными эллипсоидальными включениями, полученном в [7], только в данном случае тензоры $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{\kappa}$, усредняемые по всем включениям, имеют более сложный вид.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ТЕНЗОРОВ, СВЯЗЫВАЮЩИХ СРЕДНИЕ НАПРЯЖЕННОСТИ ПОЛЯ

Пусть уединенное k-е включение погружено в бесконечную матрицу с приложенным однородным электрическим полем напряженностью $\mathbf{E}_0$. Аналогично предположениям, принятым в [14], будем считать, что внутренняя $S_2^{(k)}$ и внешняя $S_1^{(k)}$ границы оболочки становятся софокусными эллипсоидами после линейного неортогонального преобразования

$$\mathbf{r} = \mathbf{T}_k \mathbf{r}'_k, \tag{13}$$

устраняющего анизотропию диэлектрических свойств оболочки k-го включения. Здесь $\mathbf{r} = (x^1\ x^2\ x^3)^{\mathrm{т}}$, $\mathbf{r}'_k = (x_k^{1'}\ x_k^{2'}\ x_k^{3'})^{\mathrm{т}}$ – векторы-столбцы координат текущей точки в исходной системе координат $x^1x^2x^3$ и системе $x_k^{1'}x_k^{2'}x_k^{3'}$, полученной из нее преобразованием (13). Связь матрицы преобразования (13) с тензором диэлектрической проницаемости оболочки включения имеет вид [14]

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1^{(k)} = \mathbf{T}_k\left(\mathbf{T}_k\right)^{\mathrm{т}}. \tag{14}$$

При преобразовании (13) поверхности-эллипсоиды $S_1^{(k)}$, $S_2^{(k)}$ трансформируются соответственно в софокусные поверхности-эллипсоиды $S_1'^{(k)}$, $S_2'^{(k)}$, полуоси которых обозначим как $a_{11'}^{(k)}$, $a_{12'}^{(k)}$, $a_{13'}^{(k)}$ и $a_{21'}^{(k)}$, $a_{22'}^{(k)}$, $a_{23'}^{(k)}$. Условие (14) определяет преобразование (13) с точностью до поворота, поэтому можно считать, что оси системы $x_k^{1'}x_k^{2'}x_k^{3'}$ направлены вдоль геометрических осей поверхностей-эллипсоидов $S_1'^{(k)}$, $S_2'^{(k)}$.

В данных условиях электрическое поле в ядре включения – однородное с напряженностью [14]

$$\mathbf{E}_2^{(k)} = \boldsymbol{\lambda}_{20}^{(k)}\mathbf{E}_0, \tag{15}$$

где

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\lambda}_{20}^{(k)} = [(\mathbf{I} + (\varepsilon_m)^{-1}\mathbf{L}_1^{(k)}(\boldsymbol{\varepsilon}_1^{(k)} - \varepsilon_m\mathbf{I}))\times \\ \times(\mathbf{I} + (\mathbf{L}_{2,0}'^{(k)} - v_k\mathbf{L}_{1,0}'^{(k)})(\boldsymbol{\varepsilon}_2^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}_1^{(k)})) + \\ + v_k(\varepsilon_m)^{-1}\mathbf{L}_1^{(k)}(\boldsymbol{\varepsilon}_2^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}_1^{(k)})]^{-1};\end{gathered} \tag{16}$$

$\mathbf{L}_1^{(k)}$ – тензор геометрических факторов эллипсоида с поверхностью $S_1^{(k)}$, его главные компоненты [14]

$$\begin{gathered}L_{1i}^{(k)} = \frac{a_{11}^{(k)}a_{12}^{(k)}a_{13}^{(k)}}{2}\int_0^{+\infty}\frac{du}{[u + (a_{1i}^{(k)})^2]R_1^{(k)}(u)}, \\ i = 1,2,3;\end{gathered} \tag{17}$$

$$\begin{gathered}R_1^{(k)}(u) = [(u + (a_{11}^{(k)})^2)(u + (a_{12}^{(k)})^2)(u + (a_{13}^{(k)})^2)]^{1/2}, \\ k = 1,2,\ldots,N;\end{gathered}$$

$\mathbf{L}_{1,0}'^{(k)}$, $\mathbf{L}_{2,0}'^{(k)}$ – тензоры обобщенных геометрических факторов эллипсоидов с внешними границами $S_1^{(k)}$, $S_2^{(k)}$ соответственно с учетом анизотропии оболочки k-го включения в системе координат $x^1x^2x^3$, определяемые формулами [14]

$$\mathbf{L}_{j,0}'^{(k)} = (\mathbf{T}_k^{-1})^{\mathrm{т}}\mathbf{L}_j'^{(k)}\mathbf{T}_k^{-1}, \quad j = 1,2,$$

где тензоры $\mathbf{L}_1'^{(k)}$, $\mathbf{L}_2'^{(k)}$ – диагональные с главными компонентами

$$\begin{gathered}L_{ji'}'^{(k)} = \frac{a_{j1'}^{(k)}a_{j2'}^{(k)}a_{j3'}^{(k)}}{2}\int_0^{+\infty}\frac{du}{[u + (a_{ji'}^{(k)})]^2\tilde{R}_j^{(k)}(u)}, \\ i' = 1', 2', 3'; \quad j = 1, 2,\end{gathered}$$

$$\tilde{R}_j^{(k)}(u) = [(u + (a_{j1'}^{(k)})^2)(u + (a_{j2'}^{(k)})^2)(u + (a_{j3'}^{(k)})^2)]^{1/2}.$$

Из (15) вытекает, что средняя по объему напряженность поля в ядре равна

$$\left\langle \mathbf{E}_2^{(k)} \right\rangle = \boldsymbol{\lambda}_{20}^{(k)}\mathbf{E}_0. \tag{18}$$

Найдем среднюю по объему напряженность электрического поля в оболочке включения. Потенциал электрического поля в оболочке имеет выражение [14]

$$\begin{gathered}\varphi_1^{(k)} = ((\boldsymbol{\beta}_1^{(k)} + \mathbf{N}_0'^{(k)}(\xi')\boldsymbol{\alpha}_1^{(k)})\mathbf{E}_0, \mathbf{r}), \\ \mathbf{r} \in V_1^{(k)}, \quad 0 \le \xi' \le t',\end{gathered} \tag{19}$$

где $V_1^{(k)}$ – объем, занимаемый оболочкой k-го включения;

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\alpha}_1^{(k)} = (\boldsymbol{\varepsilon}_2^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}_1^{(k)})\boldsymbol{\lambda}_{20}^{(k)}, \\ \boldsymbol{\beta}_1^{(k)} = -(\mathbf{I} + \mathbf{L}_{2,0}'^{(k)}(\boldsymbol{\varepsilon}_2^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}_1^{(k)}))\boldsymbol{\lambda}_{20}^{(k)},\end{gathered} \tag{20}$$

$\mathbf{N}_0'^{(k)}(\xi')$ – тензорная функция, определяемая формулой

$$\mathbf{N}_0'^{(k)}(\xi') = (\mathbf{T}_k^{-1})^{\mathrm{т}}\mathbf{N}'^{(k)}(\xi')\mathbf{T}_k^{-1},$$

где тензорная функция $\mathbf{N}'^{(k)}(\xi')$ – диагональная с главными компонентами

$$N_{i'}'^{(k)}(\xi') = \frac{a_{21'}^{(k)}a_{22'}^{(k)}a_{23'}^{(k)}}{2}\int_{\xi'}^{+\infty}\frac{du}{[u+(a_{2i'}^{(k)})^2]\tilde{R}_u^{(k)}},$$

$$i' = 1', 2', 3'; \quad 0 \le \xi' \le t';$$

$$\tilde{R}_u^{(k)} = [(u+(a_{21'}^{(k)})^2)(u+(a_{22'}^{(k)})^2)(u+(a_{23'}^{(k)})^2)]^{1/2};$$

t' – "шаг софокусности" эллипсоидов $S_1'^{(k)}$, $S_2'^{(k)}$:

$$t' = (a_{1i'}^{(k)})^2 - (a_{2i'}^{(k)})^2, \quad i' = 1', 2', 3'.$$

Для средней напряженности поля в оболочке имеем

$$\left\langle \mathbf{E}_1^{(k)} \right\rangle = (V_1^{(k)})^{-1}\iiint_{V_1^{(k)}}\mathbf{E}_1^{(k)}dV = = (V_1^{(k)})^{-1}\iiint_{V_1^{(k)}}(-\nabla\varphi_1^{(k)})dV. \quad (21)$$

Поскольку в системе координат $x^1x^2x^3$ тензоры квадратичных форм поверхностей-эллипсоидов $S_1^{(k)}$ и $S_2^{(k)}$, ограничивающих объем $V_1^{(k)}$, вообще говоря, не диагональны, целесообразно в (21) перейти в систему $x_k^{1'}x_k^{2'}x_k^{3'}$, сделав замену (13). Учтя правило преобразования градиента [14], а также то, что якобиан преобразования (13) $\det\mathbf{T}_k$ = = const, получим

$$\left\langle \mathbf{E}_1^{(k)} \right\rangle = (V_1^{(k)})^{-1}(\mathbf{T}_k^{-1})^{\mathrm{T}}\det\mathbf{T}_k\iiint_{V_1'^{(k)}}(-\nabla'\varphi_1^{(k)})dV', \quad (22)$$

где $\nabla'\varphi_1^{(k)}$ – градиент потенциала в оболочке в системе координат $x_k^{1'}x_k^{2'}x_k^{3'}$, $V_1'^{(k)}$ – образ области $V_1^{(k)}$ при преобразовании (13). Переходя в (22) от объемного интеграла к поверхностным, получим

$$\left\langle \mathbf{E}_1^{(k)} \right\rangle = (V_1^{(k)})^{-1}(\mathbf{T}_k^{-1})^{\mathrm{T}}\det\mathbf{T}_k \times \left[-\oint\!\!\oint_{S_1'^{(k)}}\varphi_1^{(k)}\mathbf{n}_1'dS' + \oint\!\!\oint_{S_2'^{(k)}}\varphi_1^{(k)}\mathbf{n}_2'dS'\right], \quad (23)$$

где $\mathbf{n}_1'$, $\mathbf{n}_2'$ – внешние единичные нормали к поверхностям $S_1'^{(k)}$, $S_2'^{(k)}$. С учетом (13) перепишем (19) в виде

$$\varphi_1^{(k)} = ((\mathbf{T}_k)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\beta}_1^{(k)} + \mathbf{N}_0'^{(k)}(\xi')\boldsymbol{\alpha}_1^{(k)})\mathbf{E}_0, \mathbf{r}'),$$

$$\mathbf{r}' \in V_1'^{(k)}; \quad 0 \le \xi' \le t'.$$

На поверхности $S_2'^{(k)}$ имеем $\xi' = 0$, $\mathbf{N}_0'^{(k)}(0) = \mathbf{L}_{2,0}'^{(k)}$ [14], поэтому $\varphi_1^{(k)}$ на $S_2'^{(k)}$ имеет вид

$$\varphi_1^{(k)}\Big|_{S_2'^{(k)}} = ((\mathbf{T}_k)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\beta}_1^{(k)} + \mathbf{L}_{2,0}'^{(k)}\boldsymbol{\alpha}_1^{(k)})\mathbf{E}_0, \mathbf{r}'|_{S_2'^{(k)}}). \quad (24)$$

Аналогично на поверхности $S_1'^{(k)}$ имеем $\xi' = t'$, $\mathbf{N}_0'^{(k)}(t') = v_k\mathbf{L}_{1,0}'^{(k)}$, поэтому

$$\varphi_1^{(k)}\Big|_{S_1'^{(k)}} = ((\mathbf{T}_k)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\beta}_1^{(k)} + v_k\mathbf{L}_{1,0}'^{(k)}\boldsymbol{\alpha}_1^{(k)})\mathbf{E}_0, \mathbf{r}'|_{S_1'^{(k)}}). \quad (25)$$

Подставим (25) в интеграл по поверхности $S_1'^{(k)}$ в (23):

$$\oint\!\!\oint_{S_1'^{(k)}}\varphi_1^{(k)}\mathbf{n}_1'dS' = = \left((\mathbf{T}_k)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\beta}_1^{(k)} + v_k\mathbf{L}_{1,0}'^{(k)}\boldsymbol{\alpha}_1^{(k)})\mathbf{E}_0, \oint\!\!\oint_{S_1'^{(k)}}\mathbf{r}'\otimes\mathbf{n}_1'dS'\right).$$

Вычисляя поверхностный интеграл, получим

$$\oint\!\!\oint_{S_1'^{(k)}}\mathbf{r}'\otimes\mathbf{n}_1'dS' = \frac{4\pi}{3}a_{11'}^{(k)}a_{12'}^{(k)}a_{13'}^{(k)}\mathbf{I}.$$

Таким образом,

$$\oint\!\!\oint_{S_1'^{(k)}}\varphi_1^{(k)}\mathbf{n}_1'dS' = \frac{4\pi}{3}a_{11'}^{(k)}a_{12'}^{(k)}a_{13'}^{(k)} \times \times(\mathbf{T}_k)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\beta}_1^{(k)} + v_k\mathbf{L}_{1,0}'^{(k)}\boldsymbol{\alpha}_1^{(k)})\mathbf{E}_0. \quad (26)$$

Аналогично с учетом (24) для интеграла по поверхности $S_2'^{(k)}$ имеем

$$\oint\!\!\oint_{S_2'^{(k)}}\varphi_1^{(k)}\mathbf{n}_2'dS' = = \frac{4\pi}{3}a_{21'}^{(k)}a_{22'}^{(k)}a_{23'}^{(k)}(\mathbf{T}_k)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\beta}_1^{(k)} + \mathbf{L}_{2,0}'^{(k)}\boldsymbol{\alpha}_1^{(k)})\mathbf{E}_0. \quad (27)$$

Подставляя (26), (27) в (23), получим

$$\langle\mathbf{E}_1^{(k)}\rangle = (V_1^{(k)})^{-1}[-V_1^{(k)}\boldsymbol{\beta}_1^{(k)} + V_2^{(k)}(\mathbf{L}_{2,0}'^{(k)} - \mathbf{L}_{1,0}'^{(k)})\boldsymbol{\alpha}_1^{(k)}]\mathbf{E}_0, \quad (28)$$

где $V_2^{(k)} = \frac{4\pi}{3}a_{21}^{(k)}a_{22}^{(k)}a_{23}^{(k)}$ – объем ядра k-го включения.

С учетом (20) перепишем (28) в виде

$$\left\langle \mathbf{E}_1^{(k)} \right\rangle = \frac{1}{1-v_k}((1-v_k)\mathbf{I} + +(\mathbf{L}_{2,0}'^{(k)} - v_k\mathbf{L}_{1,0}'^{(k)})(\boldsymbol{\varepsilon}_2^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}_1^{(k)}))\boldsymbol{\lambda}_{20}^{(k)}\mathbf{E}_0. \quad (29)$$

Поскольку средняя напряженность поля в матрице при наличии в ней единственного включения равна $\mathbf{E}_0$, из (29) следует вид тензора $\boldsymbol{\lambda}_1^{(k)}$:

$$\boldsymbol{\lambda}_1^{(k)} = \frac{1}{1-v_k}((1-v_k)\mathbf{I} + +(\mathbf{L}_{2,0}'^{(k)} - v_k\mathbf{L}_{1,0}'^{(k)})(\boldsymbol{\varepsilon}_2^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}_1^{(k)}))\boldsymbol{\lambda}_{20}^{(k)}, \quad (30)$$

где $\boldsymbol{\lambda}_{20}^{(k)}$ определяется из (16). Аналогично из (18) следует вид тензора $\boldsymbol{\lambda}_2^{(k)}$:

$$\boldsymbol{\lambda}_2^{(k)} = \boldsymbol{\lambda}_{20}^{(k)}. \tag{31}$$

Таким образом, обобщенным приближением МГ для матричного композита с эллипсоидальными включениями с эллипсоидальной оболочкой можно считать формулу (12), где используемые в нем тензорные величины определяются выражениями (10), (11), (30), (31).

ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ОБОБЩЕННОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ МАКСВЕЛЛА ГАРНЕТТА

1. Непосредственно проверяется, что в предельных случаях композита с однородными включениями, т.е. при отсутствии ядра либо оболочки у всех включений, либо при совпадающих материальных характеристиках ядер и оболочек, результат по формулам (12), (10), (11), (30), (31) совпадает с результатом, полученным в [7] для композита с однородными эллипсоидальными включениями.

2. Рассмотрим случай, когда оболочки всех включений изотропные, т.е. $\boldsymbol{\varepsilon}_1^{(k)} = \varepsilon_1^{(k)}\mathbf{I}$, и главные оси тензоров $\boldsymbol{\varepsilon}_2^{(k)}$ всех включений совпадают с осями их ядер. Тогда $S_2^{(k)}$ и $S_1^{(k)}$ – софокусные эллипсоиды, их оси совпадают с главными осями тензора $\boldsymbol{\varepsilon}_2^{(k)}$. В этом случае [14]

$$\mathbf{L}'^{(k)}_{1,0} = (\varepsilon_1^{(k)})^{-1}\mathbf{L}_1^{(k)},$$
$$\mathbf{L}'^{(k)}_{2,0} = (\varepsilon_1^{(k)})^{-1}\mathbf{L}_2^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

где главные значения тензора $\mathbf{L}_2^{(k)}$ имеют выражения, аналогичные (17), с заменой полуосей $S_1^{(k)}$ на полуоси $S_2^{(k)}$. Для тензоров $\boldsymbol{\lambda}_{20}^{(k)}$, $\boldsymbol{\lambda}_1^{(k)}$, $\boldsymbol{\lambda}^{(k)}$, $\boldsymbol{\kappa}^{(k)}$ имеем

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{\lambda}_{20}^{(k)} = [(\mathbf{I} + (\varepsilon_m)^{-1}\mathbf{L}_1^{(k)}(\varepsilon_1^{(k)} - \varepsilon_m))\times \\
\times(\mathbf{I} + (\varepsilon_1^{(k)})^{-1}(\mathbf{L}_2^{(k)} - v_k\mathbf{L}_1^{(k)})(\boldsymbol{\varepsilon}_2^{(k)} - \varepsilon_1^{(k)}\mathbf{I})) + \\
+ v_k(\varepsilon_m)^{-1}\mathbf{L}_1^{(k)}(\boldsymbol{\varepsilon}_2^{(k)} - \varepsilon_1^{(k)}\mathbf{I})]^{-1}, \\
\boldsymbol{\lambda}_1^{(k)} = \frac{1}{1 - v_k}((1 - v_k)\mathbf{I} + (\varepsilon_1^{(k)})^{-1})\times \\
\times(\mathbf{L}_2^{(k)} - v_k\mathbf{L}_1^{(k)})(\boldsymbol{\varepsilon}_2^{(k)} - \varepsilon_1^{(k)}\mathbf{I}))\boldsymbol{\lambda}_{20}^{(k)}, \\
\boldsymbol{\lambda}^{(k)} = (\mathbf{I} + (\varepsilon_1^{(k)})^{-1}(\mathbf{L}_2^{(k)} - v_k\mathbf{L}_1^{(k)})(\boldsymbol{\varepsilon}_2^{(k)} - \varepsilon_1^{(k)}\mathbf{I}))\boldsymbol{\lambda}_{20}^{(k)}, \\
\boldsymbol{\kappa}^{(k)} = [\varepsilon_1^{(k)}\mathbf{I} + (v_k\mathbf{I} + (\mathbf{L}_2^{(k)} - v_k\mathbf{L}_1^{(k)}))\times \\
\times(\boldsymbol{\varepsilon}_2^{(k)} - \varepsilon_1^{(k)}\mathbf{I})]\boldsymbol{\lambda}_{20}^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, N.
\end{gathered} \tag{32}$$

Если все включения имеют одинаковую форму, материальные свойства и ориентацию, то номер включения в (32) можно опустить, а операцию усреднения в (12) снять. Тогда

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \left[(1 - f)\varepsilon_m\mathbf{I} + f\boldsymbol{\kappa}\right]\left[(1 - f)\mathbf{I} + f\boldsymbol{\lambda}\right]^{-1},$$

где $\boldsymbol{\lambda}_{20}$, $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{\kappa}$ определяются формулами, аналогичными (32).

3. Рассмотрим композит с одинаковыми включениями с шарообразным анизотропным ядром в сферической изотропной оболочке. В этом случае

$$v_k = v, \quad \varepsilon_1^{(k)} = \varepsilon_1, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_2^{(k)} = \boldsymbol{\varepsilon}_2,$$
$$\mathbf{L}_1^{(k)} = \mathbf{L}_2^{(k)} = \frac{1}{3}\mathbf{I}, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

и для $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ в итоге по формулам (32), (12) получим

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{\varepsilon}^* = \varepsilon_m\left[(1 - f)\mathbf{I} + 3f\varepsilon_1\left\langle\left[(2\varepsilon_1\mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}_2) + 2v(\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \varepsilon_1\mathbf{I})\right]\times\right.\right. \\
\left.\left.\times\left[(2\varepsilon_m + \varepsilon_1)(2\varepsilon_1\mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}_2) + 2v(\varepsilon_1 - \varepsilon_m)(\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \varepsilon_1\mathbf{I})\right]^{-1}\right\rangle\right]\times \\
\times\left[(1 - f)\mathbf{I} + 3\varepsilon_m f\left\langle((2\varepsilon_1\mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}_2) - v(\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \varepsilon_1\mathbf{I}))\times\right.\right. \\
\left.\left.\times\left[(2\varepsilon_m + \varepsilon_1)(2\varepsilon_1\mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}_2) + 2v(\varepsilon_1 - \varepsilon_m)(\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \varepsilon_1\mathbf{I})\right]^{-1}\right\rangle\right]^{-1}.
\end{gathered} \tag{33}$$

Усреднение в (33) производится по всем ориентациям кристаллографических осей ядер включений, которое может быть проведено, как в [7], с использованием теории представлений группы вращений. Заметим, что (33) формально может быть получена как частный случай обобщенного приближения эффективного поля для данного композита, если в качестве среды сравнения взять матрицу ([15, формула (33)]).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основным результатом настоящей работы являются формулы (12), (10), (11), (30), (31), в совокупности представляющие обобщенное приближение Максвелла Гарнетта для вычисления эффективных диэлектрических характеристик матричного композита с эллипсоидальными включениями с оболочкой. Данное приближение позволяет естественным образом учитывать такие структурные особенности композита, как наличие нескольких видов включений, а также вероятностные распределения их форм и ориентаций.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проекты 19-08-00111-а, 20-08-00155-а) и в рамках реализации ГЗ ЮНЦ РАН (проект АААА-А16-116012610052-3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Maxwell Garnett J.C.* // Phil. Trans. R. Soc. London. 1904. V. 203. P. 385–420.
2. *Bragg W.L., Pippard A.B.* // Acta Cryst. 1953. V. 6. № 11–12. P. 865–867.

3. *Levy O., Stroud D.* // Phys. Rev. B. 1997. V. 56. № 13. P. 8035–8046.
4. *Ораевский А.Н., Проценко И.Е.* // Квантовая электроника. 2001. Т. 31. № 3. С. 252–256.
5. *Gittleman J.I., Abeles B.* // Phys. Rev. B. 1977. V. 15. № 6. P. 3273–3275.
6. *Fricke H.* // Phys. Rev. 1924. V. 24. P. 575–587.
7. *Лавров И.В.* // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2009. № 1. С. 52–58.
8. *Борен К., Хафмен Д.* Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир, 1986. 660 с.
9. *Kerner E.H.* // Proc. Phys. Soc. B. 1956. V. 69. P. 802–807.
10. *Апресян Л.А., Власов Д.В., Задорин Д.А., Красовский В.И.* // ЖТФ. 2017. Т. 87. Вып. 1. С. 10–17. https://doi.org/10.21883/JTF.2017.01.44011.1841
11. *Sihvola A.* Electromagnetic Mixing Formulas and Applications. London: The Institution of Electrical Engineers, 1999. 296 p.
12. *Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю.* // Радиооптика. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2016. № 3. С. 29–46. https://doi.org/10.7463/rdopt.0316.0846170
13. *Bowler N.* // IEEE Trans. Dielectr. Electr. Insul. 2006. V. 13. № 4. P. 703–711.
14. *Лавров И.В., Яковлев В.Б.* // ЖТФ. 2017. Т. 87. Вып. 7. С. 963–972. https://doi.org/10.21883/JTF.2017.07.44663.1964
15. *Колесников В.И., Бардушкин В.В., Лавров И.В., Сычев А.П., Яковлев В.Б.* // ДАН. 2017. Т. 476. № 3. С. 280–284. https://doi.org/10.7868/S0869565217270081

GENERALIZED MAXWELL GARNETT APPROXIMATION FOR TEXTURED MATRIX COMPOSITES WITH COATED INCLUSIONS

Academician of the RAS V. I. Kolesnikov[a], V. V. Bardushkin[b], I. V. Lavrov[b], A. P. Sychev[a,c], and V. B. Yakovlev[b,d]

[a] *Rostov State Transport University, Rostov-on-Don, Russian Federation*

[b] *National Research University of Electronic Technology, Moscow, Russian Federation*

[c] *Federal Research Centre the Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russian Federation*

[d] *Institute of Nanotechnology of Microelectronics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

A generalization of the Maxwell Garnett approximation for a textured matrix composite consisting of ellipsoidal inclusions with a shell is proposed; using it, an expression for an effective permittivity tensor of a given medium is obtained. It is shown that in the case of a matrix composite with spherical inclusions in the shell, this expression coincides with the formula obtained in the generalized effective-field approximation, if the matrix is taken as the comparison medium.

Keywords: Maxwell Garnett approximation, effective permittivity, generalized effective-field approximation, matrix composite, inclusion with a shell