

УДК 517.958; 539.3(5); 517.956.226

О СУЩНОСТИ “ЧЕРНЫХ ДЫР” ДЛЯ УПРУГИХ ВОЛН В ТЕЛАХ С ПИКООБРАЗНЫМИ ЗАОСТРЕНИЯМИ

© 2021 г. С. А. Назаров^{1,*}

Представлено академиком РАН Н.Ф. Морозовым 08.02.2021 г.

Поступило 25.03.2021 г.

После доработки 31.03.2021 г.

Принято к публикации 31.03.2021 г.

Эффект “черной дыры” для упругих волн, обнаруженный М.А. Мироновым и детально изученный последователями, обычно связывается с распространением упругих волн вдоль пикообразного заострения деформируемого тела, т.е. пик абсорбирует энергию упругих колебаний и не возвращает ее в массивную часть тела. Вместе с тем идеальный пик изготовить невозможно, и в реальных конструкциях его кончик затуплен. Сглаживание заострения коренным образом изменяет строение спектра: уничтожает непрерывную его компоненту, но провоцирует концентрацию частот собственных колебаний в среднечастотном диапазоне. В сообщении указаны асимптотические формулы для собственных чисел балки Кирхгофа с истончающимся концом, и на их основе разъяснен новый, фактический, механизм действия “черной дыры”, а именно, затупленный пик, в котором длительное распространение волн невозможно, производит захват волн на “почти всех” частотах в достаточно широком диапазоне спектра. Улучшение качества заострения способствует усилению концентрации собственных чисел и увеличению зоны ее проявления.

Ключевые слова: “черные дыры” для упругих волн, затупленное пикообразное заострение, концентрация частот собственных колебаний, захват волн, асимптотика собственных чисел

DOI: 10.31857/S2686740021030123

1. **М о т и в и р о в к а.** В отличие от краевых задач для уравнения Гельмгольца, описывающих колебательные процессы в акустике, теплопроводности и электродинамике, в спектральных задачах для упругих тел и пластин Кирхгофа обнаруживаются разнообразные, зачастую вполне неожиданные, явления. К последним следует отнести так называемые “черные дыры” для упругих и акустических волн, возникающие при наличии пикообразных заострений, описанные впервые М.А. Мироновым [1] в рамках одномерной модели балки, истончающейся к концу, и реализованные в конкретных устройствах из пластика и металла. Эти разработки получили развитие как в инженерном плане (см. публикации [2–5] и др.), так и в математическом. В частности, в работах [6–8] и др. исследованы непрерывный и точечный спектры операторов плоской и пространственной задач теории упругости, осуществлена постановка энергетических условий излучения в вершине пика и, кроме того, введена унитарная и симметричная матрица рассеяния. Все это позволило дать строгое обоснова-

ние эффекту “черной дыры” [1] в рамках спектральной теории самосопряженных операторов: колебания массивной части тела возбуждают волны, распространяющиеся вдоль утончающегося пика с затухающей при приближении к его вершине скоростью, т.е. волны проникают в пик, но не возвращаются из него. Иными словами, упругое пикообразное заострение вбирает в себя кинетическую энергию, превращая ее в конце концов, например, в тепловую.

В настоящем сообщении на основе публикаций автора [9–11] сформулирован совершенно другой механизм поглощения энергии пикообразным заострением, которому в реальности нельзя придать идеальную форму – на самом деле кончик пика всегда оказывается затупленным, что коренным образом изменяет строение спектра упругого тела, в частности, уничтожает непрерывный спектр и тем самым запрещает распространение волн к вершине.

2. **С п е к т р.** Как и в работе [1], примем простейшую одномерную модель балки с острым краем (см. рис. 1 и [12, § 33])

$$B(x, \partial_x)u^\varepsilon(x) := \partial_x^2 x^6 \partial_x^2 u^\varepsilon(x) = \lambda x^2 u^\varepsilon(x), \quad x \in (\varepsilon, 1), \quad (1)$$

$$u^\varepsilon(1) = 0, \quad \partial_x u^\varepsilon(1) = 0, \quad (2)$$

¹ Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

*E-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

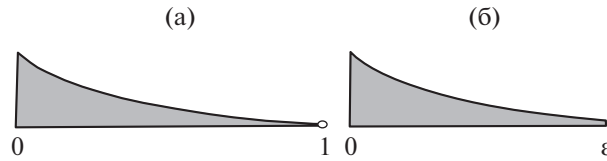


Рис. 1. Балки с острым (а) и затупленным (б) правыми концами.

$$\partial_x x^6 \partial_x^2 u^\epsilon(x) = 0, \quad x^6 \partial_x^2 u^\epsilon(x) = 0 \quad \text{при} \quad x = \epsilon. \quad (3)$$

Здесь u^ϵ – прогиб балки, $\lambda = D^{-1} \rho H^{-2} \omega^2$ – спектральный параметр, $\omega > 0$ – частота гармонических во времени колебаний, а $D > 0$ и $\rho > 0$ – приведенная цилиндрическая жесткость и плотность балки (постоянные). Кроме того, Hx^2 – приведенная толщина балки, исчезающая при приближении к концу $x = 0$, причем произведено масштабирование и коэффициент $H > 0$ устранен из дифференциального оператора $B(x, \partial_x)$. Условия Дирихле (2) означают, что массивный торец балки жестко зашпелен, а случаю $\epsilon = 0$ отвечает балка с пикообразным заострением, для которого краевые условия (3) в вершине пика не нужны (см., например, [12, § 33]), а случаю $\epsilon > 0$ – затупленный пик, кончик которого свободен от внешних воздействий согласно условиям Неймана (3). Процесс изготовления идеального пика симулируем посредством предельного перехода $\epsilon \rightarrow +0$.

При $\epsilon > 0$ задача (1)–(3) обладает дискретным спектром σ_d^ϵ , образующим неограниченную монотонную положительную последовательность

$$\lambda_1^\epsilon \leq \lambda_2^\epsilon \leq \dots \leq \lambda_n^\epsilon \leq \dots \rightarrow +\infty. \quad (4)$$

По понятным причинам кратность каждого собственного числа не превосходит двух. Если же $\epsilon = 0$ и уравнение (1) вырожденное, то у задачи (1), (2) возникает непрерывный спектр $[\lambda_+, +\infty)$. Этот факт проверяется путем несложных вычислений, поскольку (1) – обыкновенное дифференциальное уравнение эйлеровского типа. Так, в случае

$$\lambda > \lambda_+ = \frac{225}{16} \quad (5)$$

у уравнения (1) есть четыре решения

$$w_\pm^{im}(x) = x^{\pm iA(\lambda)-3/2}, \quad w_\pm^{re}(x) = x^{\pm A(\lambda)-3/2}, \quad (6)$$

где

$$A_\pm(\lambda) = \sqrt{4 + \lambda} \pm \frac{17}{4}. \quad (7)$$

При этом выше ($\rho > 0$) порога непрерывного спектра верны соотношения

$$\begin{aligned} A_-(\lambda_+ + \rho) &= \sqrt{\frac{2}{17}} \sqrt{\rho} (1 + O(\rho)), \\ A_+(\lambda_+ + \rho) &= \sqrt{\frac{17}{2}} \left(1 + \frac{2\rho}{289} + O(\rho^2) \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Только для решения w_+^{re} из списка (6) сходятся интегралы упругой и кинетической энергий

$$\int_0^1 x^6 |\partial_x^2 w(x)|^2 dx \quad \text{и} \quad \int_0^1 x^2 |w(x)|^2 dx. \quad (9)$$

Для функций w_\pm^{im} эти интегралы характеризуются логарифмической скоростью расходимости, а для функции w_-^{re} – степенной. При $\lambda < \lambda_+$ уравнение (1) имеет в точности два линейно независимых решения с конечными интегралами (9). Эти обстоятельства и определяют положение непрерывного спектра задачи (1), (2) при $\epsilon = 0$. Кроме того, у нее отсутствует точечный спектр, в частности, ниже точки отсечки λ_+ у обсуждаемой задачи нет изолированных собственных чисел. Наконец, укажем ее решение, порожденное “приходящей” от точки $x = 0$ волной

$$Z(x; \lambda) = w_-^{im}(x) + S(\lambda)w_+^{im}(x) + Q(\lambda)w_+^{re}(x). \quad (10)$$

Коэффициент $Q(\lambda)$ востребован не будет, и

$$S(\lambda) = -\frac{A_+(\lambda) + iA_-(\lambda)}{A_+(\lambda) - iA_-(\lambda)}, \quad |S(\lambda)| = 1. \quad (11)$$

3. Асимптотика собственных чисел (4). Следуя [9–11], примем следующий асимптотический анзац для собственной функции задачи (1)–(3) при $\epsilon > 0$ для фиксированного спектрального параметра (5):

$$u^\epsilon(x) = Z(x) + \epsilon^{A_+(\lambda)} K(\lambda)w_-^{re}(x) + \dots \quad (12)$$

Здесь и далее многоточие заменяет младшие члены асимптотики, не существенные для предприняемого анализа. Благодаря множителю $\epsilon^{A_+(\lambda)}$ с

положительным показателем из (7) при иррегулярном члене $w_{\varepsilon}^{\varepsilon}$ невязки в краевых условиях Дирихле (2) в точке $x = 1$ оказались малыми. Найдем условия, при которых подбор коэффициента $K(\lambda)$ позволит добиться малости невязок в краевых условиях Неймана в точке $x = \varepsilon > 0$. Подставив анзац (12) в два равенства (3), пренебрежем слагаемыми $o(\varepsilon^{3/2})$ и $o(\varepsilon^{5/2})$ соответственно, а затем исключим коэффициент $K(\lambda)$ из полученной системы двух линейных алгебраических уравнений и при учете формулы (11) для коэффициента $S(\lambda)$ в решении (10) получим соотношение

$$e^{2iA_-(\lambda)\ln\varepsilon} = T(\lambda), \tag{13}$$

где

$$T(\lambda) := \frac{(A_+(\lambda) - iA_-(\lambda))^2}{(A_+(\lambda) + iA_-(\lambda))^2} \times \frac{3 + 2iA_-(\lambda)5 + 2iA_-(\lambda)}{3 - 2iA_-(\lambda)5 - 2iA_-(\lambda)} \Rightarrow T(\lambda) = e^{2i\ell(\lambda)}. \tag{14}$$

Итак, для тех (малых и положительных) значений параметра ε , при которых соблюдено равенство (13), отделенные члены асимптотики (12) удовлетворяют уравнению (1) и оставляют малые невязки в краевых условиях (2) и (3). Следовательно, общие результаты [13] теории самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве доказывают существование в $c(\lambda)\varepsilon^{A_+(\lambda)}$ -окрестности точки λ собственного числа задачи (1)–(3) из последовательности (4).

4. Мигающие и планирующие собственные числа. Сначала зафиксируем спектральный параметр (5) и устремим размер ε к нулю. При учете формулы (14) получаем, что равенство (13) выполнено для бесконечно малой последовательности

$$\varepsilon_n = e^{-A_-(\lambda)^{-1}(\pi n - i(\lambda))}, \quad n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}. \tag{15}$$

В результате обнаруживаем вблизи точки λ члены $\lambda_{N_n}^{\varepsilon_n}$ последовательностей (4) с $\varepsilon = \varepsilon_n$. Более того, благодаря понятной непрерывной зависимости спектра от переменной $\varepsilon > 0$ заключаем, что для почти периодической в логарифмическом масштабе бесконечно малой монотонной положительной последовательности $\{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ с близкими к (15) членами произвольно выбранная точка $\lambda > \lambda_+$ становится собственным числом задачи (1)–(3) с $\varepsilon = \varepsilon_n$. Наконец, при $\varepsilon \in (\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_n)$ точка λ выпадает из спектра σ_d^{ε} , а значит, ее можно охарактеризовать как “мигающее” собственное число семейства рассматриваемых задач.

Продифференцируем соотношение (13) по переменной ε и пренебрежем младшими асимпто-

тическими членами. В итоге приходим к следующей упрощенной формуле для собственного числа λ_n^{ε} с зафиксированным номером $n \in \mathbb{N}$ в последовательности (4):

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_n^{\varepsilon}}{d\varepsilon} &= \frac{R(\lambda_n^{\varepsilon})}{\varepsilon |\ln \varepsilon|} + \dots := \\ &:= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{17}{4} (4 + \lambda_n^{\varepsilon})^{-1/2} \right) \frac{1}{\varepsilon |\ln \varepsilon|} + \dots \end{aligned} \tag{16}$$

Итак, члены последовательности с большой скоростью $O(R(\lambda_n^{\varepsilon})\varepsilon^{-1} |\ln \varepsilon|^{-1})$ ниспадают вдоль вещественной оси, но, поскольку $R(\lambda_+) = 0$ (см. формулы (5) и (16)), их скорость уменьшается до нуля при $\lambda_n^{\varepsilon} \rightarrow \lambda_+ + 0$, т.е. они плавно “салятся” на точку отсечки непрерывного спектра. Подчеркнем, что на интервале $(0, \lambda_+)$, свободном от дискретного спектра σ_d^0 задачи (1)–(3) при $\varepsilon = 0$, применима классическая теория возмущений самосопряженных операторов [13, гл. 9], и поэтому при малом $\varepsilon > 0$ пересечение $(0, \lambda_+) \cap \sigma_d^{\varepsilon}$ пусто, т.е. $\lambda_1^{\varepsilon} \geq \lambda_+$ в последовательности (4). Такое поведение – быстрое снижение и посадка с замедлением – свойственно планирующим летальным аппаратам, что и объясняет термин, вынесенный в заголовок раздела.

5. Концентрация спектра. Описанное поведение собственных чисел задачи (1)–(3) при $\varepsilon \rightarrow +0$ подразумевает насыщение спектром σ_d^{ε} любого конечного интервала выше точки отсечки λ_+ . Приведем асимптотические представления членов $\lambda_1^{\varepsilon}, \dots, \lambda_{N^{\varepsilon}}^{\varepsilon}$ последовательности (4), расположенных в малой окрестности точки λ_+ . Отыскивая собственные числа λ_k^{ε} в виде $\lambda_+ + \mu_k^{\varepsilon}$, воспользуемся формулами (8), (14) и после несложных вычислений получим, что

$$\mu_k^{\varepsilon} = \pi^2 k^2 \left(\sqrt{\frac{2}{17}} |\ln \varepsilon| + t_0 \right)^{-2} + \dots, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{17}$$

где $t_0 \in \mathbb{R}$ – легко вычисляемый, но не играющий существенной роли показатель из следующего представления величины (14):

$$T(\lambda_+ + \rho) = e^{2i\ell(\lambda_+ + \rho)} = e^{2i(t_0 \sqrt{\rho} + O(\rho))}.$$

Подчеркнем, что соотношения (16) и (17) не вступают в противоречие, так как по определению $\Lambda(\lambda_+ + \mu_k^{\varepsilon}) = O(\mu_k^{\varepsilon})$.

6. Выводы и замечания. Поскольку распространение волн вдоль пикообразного заострения с затупленным кончиком невозможно (непрерывного спектра нет), обнаруженный [1]

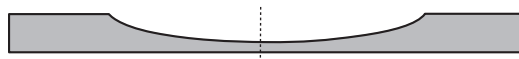


Рис. 2. Балка с глубокой выемкой. Штрихпунктирная линия отмечает плоскость симметрии.

эффект “черной дыры” реализуется по иному сценарию. Именно, в балке с близким к идеальному пиком (размер $\varepsilon > 0$ мал) выше точки отсечки λ_+ наблюдается концентрация частот собственных колебаний, т.е. на “почти всех” частотах происходит захват упругой волны, а вовсе не ее пробег к вершине пика. Иными словами, за обсуждаемый эффект отвечают резонансные явления.

Феномен концентрации спектра сужающейся балки на рис. 1б не зависит от типа краевых условий в ее конце $x = \varepsilon$. Например, при замене условий Неймана (3) условиями Дирихле

$$u^\varepsilon(x) = 0, \quad \partial_x u^\varepsilon(x) = 0 \quad \text{при} \quad x = \varepsilon$$

полученные асимптотические формулы сохраняются в целом и только изменяются коэффициенты (14). Кроме того, постановка других групп краевых условий

$$u^\varepsilon(x) = 0, \quad H^\varepsilon(x) \partial_x^2 u^\varepsilon(x) = 0 \quad \text{или} \\ \partial_x u^\varepsilon(x) = 0, \quad \partial_x H^\varepsilon(x) \partial_x^2 u^\varepsilon(x) = 0 \quad \text{при} \quad x = \varepsilon,$$

смешанных и допускающих соответственно нечетное или четное продолжение функции u^ε через точку $x = \varepsilon$, позволяют без особого труда вывести аналогичные изложенным выше результаты для балки с глубокой выемкой (рис. 2), приведенная толщина которой имеет вид

$$H^\varepsilon(x) = \min \left\{ 1, \varepsilon + \frac{x^2}{2} \right\}, \quad x \in [-1, 1].$$

Одномерная модель балки Кирхгофа переменной толщины не в состоянии предоставить все разнообразие аномалий строения спектра векторных задач теории упругости для пикообразных тел. Так, в трехмерных задачах помимо планирующих появляются малоподвижные собственные числа, порожденные точечным спектром предельной ($\varepsilon = 0$) задачи (см. [6]). В плоских и пространственных задачах непрерывный спектр приобретает две точки отсечки (см. статью [8]) и выше второй из них наблюдается хаотичное движение собственных чисел при $\varepsilon \rightarrow +0$ (“блуждание” дискретного спектра). Все эти явления описаны в публикациях [9–11], где сформулирован ранее неизвестный способ образования непрерывного спектра из дискретных спектров допредельных задач путем накопления собственных чисел около каждой точки на полуоси.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 17-11-01003).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Миронов М.А. Распространение изгибной волны в пластине, толщина которой плавно уменьшается до нуля на конечном интервале // Акустический журнал. 1988. Т. 34. № 3. С. 546–547.
2. Krylov V.V. New type of vibration dampers utilising the effect of acoustic “black holes” // Acta Acustica united with Acustica. 2004. V. 90. № 5. P. 830–837.
3. Krylov V.V., Tilman F.J.B.S. Acoustic “black holes” for flexural waves as effective vibration dampers // J. Sound Vibration. 2004. V. 274. P. 605–619.
4. Миронов М.А. Точные решения уравнений поперечных колебаний стержня со специальным законом изменения поперечного сечения // Акустический журнал. 2017. Т. 63. № 1. С. 3–8.
5. Pelat A., Gautier F., Conlon S., Semperlotti F. The acoustic black hole: A review of theory and applications // J. Sound and Vibration. 2020. V. 476. 115316.
6. Назаров С.А. О спектре задачи теории упругости для тела пикообразной формы // Сибирск. матем. журнал. 2008. Т. 49. № 5. С. 1105–1127.
7. Kozlov V., Nazarov S.A. On the spectrum of an elastic solid with cusps // Adv. Differential Equations. 2016. V. 21. № 9/10. P. 887–944.
8. Kozlov V.A., Nazarov S.A. Waves and radiation conditions in a cuspidal sharpening of elastic bodies // J. Elasticity. 2018. V. 132. P. 103–140.
9. Назаров С.А. “Блуждающие” собственные частоты двумерного упругого тела с обломанным пиком // Доклады РАН. 2017. Т. 477. № 2. С. 163–167.
10. Назаров С.А. Странное поведение частот собственных колебаний упругого тела с затупленным пиком // Прикладная матем. и механика. 2019. Т. 83. № 2. С. 265–281.
11. Назаров С.А. “Мигающие” и “планирующие” частоты собственных колебаний упругих тел с обломанным пикообразным заострением // Матем. сборник. 2019. Т. 210. № 11. С. 129–158.
12. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970.
13. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980.

ON THE ESSENCE OF “BLACK HOLES” FOR ELASTIC WAVES IN SOLIDS WITH CUSPIDAL SHARPENINGS

S. A. Nazarov^a

^a Saint-Petersburg State University, Saint Petersburg, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS N.F. Morozov

The effect of “black hole” for elastic waves discovered by V.A. Mironov and examined in detail by followers, is usually associated with propagation of elastic waves along the cuspidal sharpening of a solid, i.e., the cusp absorbs energy of elastic vibrations and does not return it to the massive part of the body. At the same time, an ideal cusp is not possible for creation and in real constructions its tip is blunted. Smoothing of the sharpening crucially changes the structure of the spectrum: the continuous component disappears but concentration of natural frequencies occurs in the med-frequency range. This note provides asymptotic formulas for eigenvalues of the Kirchhoff beam with thinning end and on their basis describes a new, effectual, mechanism of action of the “black hole” where the propagation of waves becomes impossible but trapping of wave occurs at “almost all” frequencies inside a wide range of the spectrum. Improvement of cusp’s quality leads to strengthening of concentration of eigenvalues and enlarging of its zone.

Keywords: “black holes” for elastic waves, blunted cuspidal sharpening, concentration of eigenfrequencies, trapping waves, asymptotics